2 Verknüpfen von Spiegelungen

In diesem Kapitel wollen wir uns zunächst allgemein mit Kongruenzabbildungen beschäftigen, um später zu überlegen, welche Möglichkeiten es gibt, solche Abbildungen zu verknüpfen.
Die Spiegelung an einer Geraden ist eine von vier Kongruenzabbildungen und wird später eine besondere Bedeutung erhalten.

2.1 Kongruenzabbildungen

Def!

Definition 2.1
In der Geometrie sind zwei Figuren kongruent, wenn sie zur Deckung gebracht werden können. Kongruente Figuren stimmen in entsprechenden Streckenlängen und Winkelgrößen überein.[1]

Schule

In unteren Klassen könnte man die Kongruenz praktisch überprüfen, indem man zwei Figuren mit der Schere ausschneidet und aufeinander legt. Wenn die beiden Figuren genau übereinander gelegt werden können, sind sie kongruent.

Def!

Definition 2.2
Eine Abbildung der Ebene auf sich heißt Kongruenzabbildung, wenn für alle Figuren Bild und Urbild kongruent sind.

Anschaulich handelt es sich um eine Abbildung, bei der Form und Größe des abgebildeten Objekts gleich bleiben gegenüber dem Ausgangsobjekt. Offensichtlich gilt dann:

Satz.

Satz 2.1
Kongruenzabbildungen sind geraden-, längen- und winkeltreu.

Bsp.

Beispiele für Kongruenzabbildungen sind
- Spiegelungen (z.B. Punkt-, Achsenspiegelung)
- Drehung
- Verschiebung
- Gleit-/ Schubspiegelung.

Wir wollen, bevor wir uns die Verknüpfung von Kongruenzabbildungen vornehmen, die drei Kongruenzabbildungen Drehung, Spiegelung und Verschiebung getrennt voneinander betrachten.

---

[1] Man kann hier der Versuchung erliegen, in der Definition den Begriff „Kongruenzabbildung“ zu verwenden. Dann dreht man sich allerdings mit den beiden Definitionen (hier 2.1 und 2.2) im Kreis, da man den einen Begriff mit dem anderen erläutert.

2.1.1 Drehung

Def!

Definition 2.3
Eine Drehung $D_{M,\alpha}$ um den Punkt M mit dem Drehwinkel α ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P' zuordnet. Dabei gilt für alle Punkte der Ebene folgende Abbildungsvorschrift:

a) $P = M \Rightarrow P' = P$

b) $P \neq M \Rightarrow \left|\measuredangle \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MP'}\right| = \alpha$ und $\left|MP\right| = \left|MP'\right|$.

Der Bildpunkt P' eines Punktes P bei der Drehung um den Punkt M mit dem Drehmaß α ($0° \leq \alpha < 360°$) wird demnach so erhalten, dass die Strahlen $\overrightarrow{MP}$ und $\overrightarrow{MP'}$ einen Winkel α einschließen und die Entfernung des Punktes M zu Bild- und Ausgangspunkt gleich groß ist (siehe Abb. 2.1).

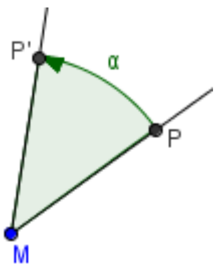


Abb. 2.1: Drehung des Punktes P um M mit dem Winkel α

Die Nulldrehung (identische Abbildung) erhalten wir, wenn $\alpha = 0°$ gilt.
Üblicherweise ist der Drehsinn immer gegen den Uhrzeigersinn, wenn der Winkel positiv angegeben ist. In Ausnahmefällen kann auch ein negativer Drehwinkel angegeben werden. Der Drehsinn ist dann im Uhrzeigersinn.
Die Umkehrabbildung zu $D_{M,\alpha}$ ist, wie in Abbildung 2.2 illustriert, $D_{M,360°-\alpha}$. Wird der Bildpunkt P' um M mit dem Winkel 360°-α gedreht, erhält man als Bildpunkt wieder den Punkt P.

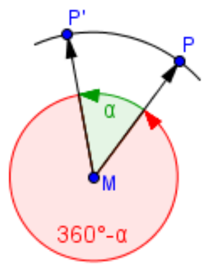


Abb. 2.2: Die Umkehrabbildung $D_{M,360°-\alpha}$.

Bei der Drehung stimmen der Umlaufsinn der Ausgangs- und Bildfigur überein.

2.1.2 Spiegelung

Wir beschäftigen uns sowohl mit der Achsen- als auch mit der Punktspiegelung.

Def!

Definition 2.4
Eine Spiegelung S_g an einer Gerade g ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P' zuordnet. Dabei gilt für alle Punkte der Ebene folgende Abbildungsvorschrift:

a) $P \in g \;\Rightarrow\; P = P'$

b) $P \notin g \;\Rightarrow\; g \perp PP'$ und $|PS| = |P'S|$

S ist der Fußpunkt des Lots von P auf g (siehe Abb. 2.3).

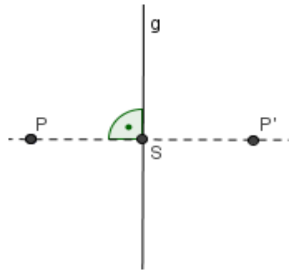


Abb. 2.3: Spiegelung des Punktes P an der Geraden g

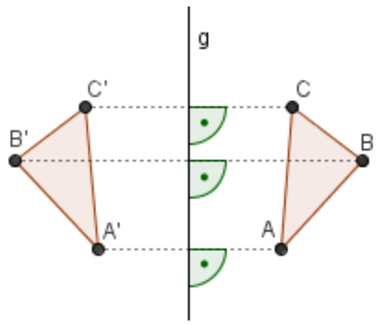


Abb. 2.4: Spiegelung eines Dreiecks ΔABC an der Geraden g

Abbildung 2.4 zeigt die Spiegelung eines Dreiecks ΔABC an einer Geraden g. Da die Achsenspiegelung als Kongruenzabbildungen u.a. längentreu ist, gilt $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$, $|CA| = |C'A'|$.

Bei einer Geradenspiegelung ändert sich der Umlaufsinn der Bildfigur gegenüber der Ausgangsfigur.

Spiegeln wir eine Figur zweimal an derselben Geraden, so haben wir den Ausgangszustand wieder hergestellt. Jede Achsenspiegelung ist demnach Umkehrabbildung zu sich selbst. Solche Abbildungen nennt man involutorisch.

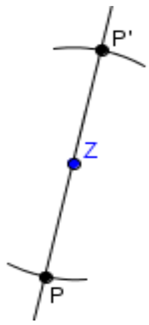
Definition 2.5

Def!

Eine Abbildung σ heißt *involutorisch*, wenn die Verknüpfung $\sigma \circ \sigma$ gleich der identischen Abbildung ist.
Beispiele für involutorische Abbildungen sind Achsen- und Punktspiegelung.

Def!

Definition 2.6
Eine Spiegelung S_Z an einem Punkt Z ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P' zuordnet. Dabei gilt für alle Punkte der Ebene folgende Abbildungsvorschrift:



a) $P = Z \Rightarrow P' = P$

b) $P \neq Z \Rightarrow P' \in \overrightarrow{PZ}$ und $|ZP| = |ZP'|$ und $P' \neq P$

(siehe Abbildung 2.5).
Z ist das Zentrum der Punktspiegelung.

Die Punktspiegelung ist eine besondere Drehung (Drehung um 180°) und besitzt daher auch deren Eigenschaften ($S_Z = D_{Z,180°}$).

Abb. 2.5: Spiegelung des Punktes P am Zentrum Z

In 2.1.1 (Drehung) haben wir uns überlegt, dass die Umkehrabbildung zu $D_{M,\alpha}$ $D_{M,360°-\alpha}$ ist. Wenn wir nun für die spezielle Drehung um 180° (Punktspiegelung) die Umkehrabbildung aufstellen, erhalten wir $D_{M,360°-180°} = D_{M,180°}$. Wir sehen also, dass auch die Drehung um 180° bzw. die Punktspiegelung involutorisch ist.

2.1.3 Verschiebung

Def!

Definition 2.7
Eine Verschiebung $V_{\overrightarrow{ST}}$ um den Vektor $\overrightarrow{ST}$ ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P' zuordnet. Dabei gilt für alle Punkte der Ebene folgende Abbildungsvorschrift:
$\overrightarrow{PP'}$ ist richtungsgleich zu $\overrightarrow{ST}$ und $|PP'| = |ST|$ (siehe Abbildung 2.6).

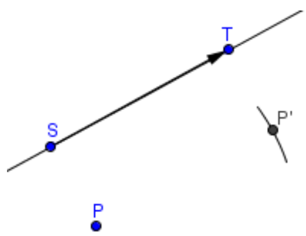


Abb. 2.6: Verschiebung des Punktes P um den Vektor $\overrightarrow{ST}$

Wie bei der Drehung gibt es auch bei der Verschiebung den Sonderfall der identischen Abbildung. Das ist die Verschiebung um den Nullvektor, also der Fall S = T. Hier gilt für den Bildpunkt P' = P.
Die Umkehrung zur Abbildung $V_{\overrightarrow{ST}}$ ist die Verschiebung $V_{\overrightarrow{TS}}$, denn den Ausgangspunkt P erhalten wir, wenn wir den Bildpunkt P' in die Rückrichtung um die gleiche Strecke verschieben.

Verschieben wir eine Figur, ist der Umlaufsinn von Ausgangs- und Bildfigur gleich (siehe als Beispiel Abbildung 2.7). Außerdem ist eine grundlegende Eigenschaft der Verschiebung, dass alle Urbild- und Bildpunkte gleichweit voneinander entfernt sind. Für Abbildung 2.7 heißt das: $|AA'| = |BB'| = |CC'|$.

Bsp.

Beispiel

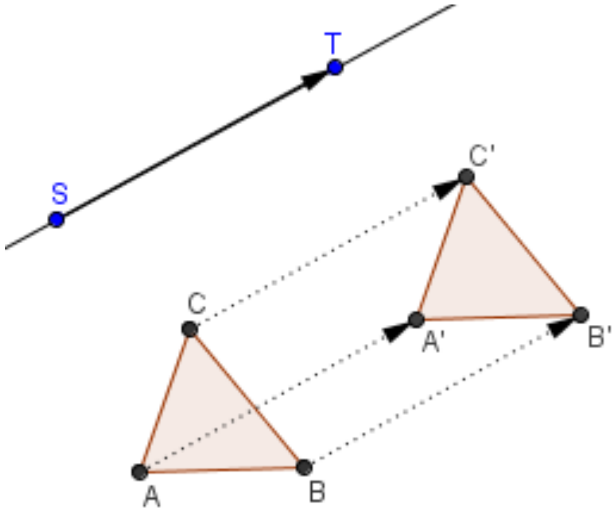


Abb. 2.7: Verschiebung des Dreiecks ΔABC um den Vektor $\overrightarrow{ST}$. Der Umlaufsinn des Bilddreiecks stimmt mit dem des Urbildes überein.

2.2 Hintereinanderausführen von zwei Kongruenzabbildungen

Im Folgenden wollen wir untersuchen, welche Gesetzmäßigkeiten bei der Verknüpfung von Kongruenzabbildungen auftreten. Für die Verknüpfung von zwei Abbildungen, zuerst σ und dann ϑ schreiben wir $\vartheta \circ \sigma$. Die Begründung für diese „falsche" Reihenfolge liegt in der Funktionsschreibweise und dem verketteten Anwenden von zwei Funktionen. Bilden wir einen beliebigen Punkt P zunächst mit σ ab auf den Punkt P', so schreiben wir das in der Funktionsschreibweise $P' = \sigma(P)$. Wird nun P' durch ϑ auf P" abgebildet, so schreiben wir das mit $P'' = \vartheta(P')$. Setzen wir nun die symbolischen Schreibweisen ineinander ein, so erhalten wir $P'' = \vartheta(P') = \vartheta(\sigma(P))$. Hier ergibt sich ganz natürlich, dass die zuerst angewendete Abbildung rechts steht. Diese Reihenfolge von rechts nach links übernehmen wir bei der Verwendung des $\circ$-Zeichens. Diese Vereinbarung ist in sofern bei der Verknüpfung von Abbildungen besonders wichtig, denn die Verknüpfung von (Kongruenz-)Abbildungen ist nicht kommutativ.

Bsp.

Beispiel

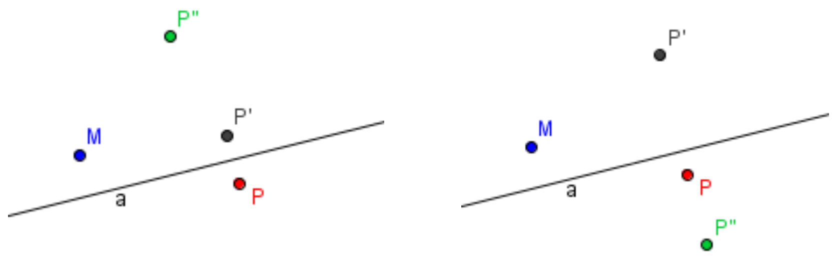


Abb. 2.8: Beispiel dafür, dass die Verknüpfung von Kongruenzabbildungen nicht kommutativ ist.

In der linken Abbildung wurde der Punkt P zunächst an der Geraden a gespiegelt und anschließend der Bildpunkt P' um M mit einem Winkel von 45° gedreht ($D_{\mathrm{M},45°} \circ S_{\mathrm{a}}$). Das Ergebnis ist der Punkt P".

In der rechten Abbildung wurde der Punkt P um M um 45° gedreht und danach der Bildpunkt P' an der Geraden a gespiegelt ($S_{\mathrm{a}} \circ D_{\mathrm{M},45°}$).

Auch hier nennen wir den Ergebnispunkt P".
Die beiden Verknüpfungen bilden den Punkt P nicht identisch ab, da die beiden Bildpunkte P'' nicht an der gleichen Stelle liegen.
Abbildung 2.8 zeigt also ein Gegenbeispiel, so dass die Kommutativität bei der Verknüpfung von Kongruenzabbildungen nicht gegeben ist: $D_{\mathrm{M},45°} \circ S_{\mathrm{a}} \neq S_{\mathrm{a}} \circ D_{\mathrm{M},45°}$.

Die Verknüpfung von Spiegelungen spielt eine besondere Rolle und soll daher vorzugsweise behandelt werden. Später werden wir erkennen, dass die Spiegelungsverknüpfung eine Grundlage für die anderen Kongruenzabbildungen darstellt und es ausreichend ist, diesen Fall zu behandeln.
Wir wollen im Nachfolgenden die Verknüpfung von zwei Achsenspiegelungen an zwei verschiedenen Achsen untersuchen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden: Die beiden Spiegelachsen schneiden sich in einem Punkt oder sie sind parallel zueinander.

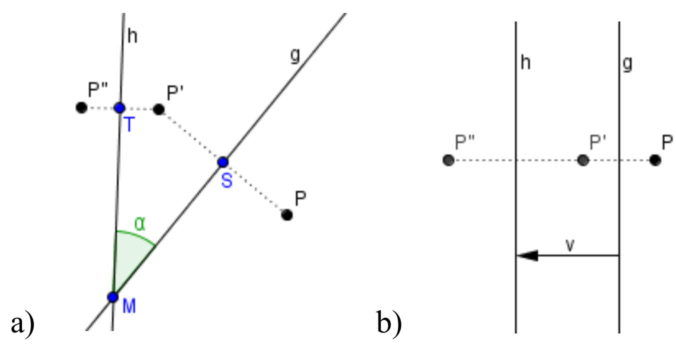


Abb. 2.9: Spiegelung von P an
a) sich schneidenden b) zueinander parallelen Geraden

In Abbildung 2.9 a) schneiden sich die beiden Spiegelachsen g und h im Punkt M und schließen einen Winkel α ein. Um eine Ersatzabbildung für die doppelte Spiegelung zu erhalten, können wir uns, da Spiegelungen längen- und winkeltreu sind, zunächst folgendes überlegen:

$\left|MP\right| = \left|MP'\right|$ und $\left|MP'\right| = \left|MP''\right| \Rightarrow \left|MP\right| = \left|MP''\right|$

$\left|\measuredangle PMS\right| = \left|\measuredangle SMP'\right|$ und $\left|\measuredangle P'MT\right| = \left|\measuredangle TMP''\right|$

Für unsere weiteren Betrachtungen reicht das Abbilden eines Punktes nicht aus. Abbildung 2.10 zeigt die Spiegelung eines Dreiecks ΔABC an der Geraden g, dann an h.

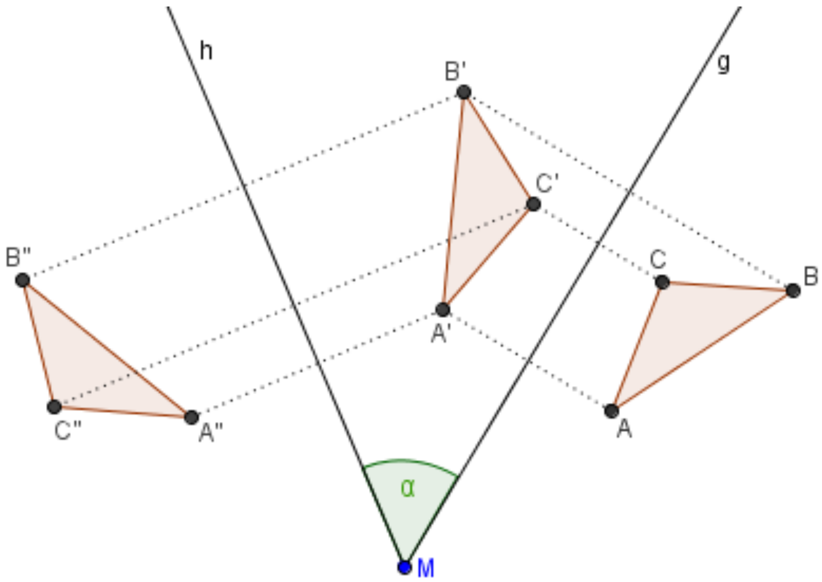


Abb. 2.10: Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an zwei sich schneidenden Geraden

Nach zweimaligem Spiegeln des Dreiecks sind Urbild und Bild kongruent und haben den gleichen Umlaufsinn. Eine Ersatzabbildung könnte demnach nur eine Verschiebung oder eine Drehung sein. Da man in diesem Beispiel schon ohne Messung sehen kann, dass die Bild- und Urbildpunkte nicht immer denselben Abstand zueinander haben, können wir auch eine Verschiebung ausschließen. Die Abbildung des Dreiecks ΔABC auf das Dreieck $\Delta A''B''C''$ durch das hintereinander Spiegeln an den beiden Achsen kann möglicherweise durch eine Drehung ersetzt werden.

Die oben aufgestellten Überlegungen zu den Winkeln helfen nun bei der Ermittlung des Drehwinkels (dazu betrachten wir erneut Abbildung 2.9 a)):

Da $\measuredangle SMP' + \measuredangle P'MT = \alpha$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} \left|\measuredangle PMP''\right| &= \left|\measuredangle PMS\right| + \left|\measuredangle SMP'\right| + \left|\measuredangle P'MT\right| + \left|\measuredangle TMP''\right| \\ &= 2 \cdot \left(\left|\measuredangle SMP'\right| + \left|\measuredangle P'MT\right|\right) \\ &= 2 \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Nach diesen Überlegungen können wir folgenden ersten Satz über das Hintereinanderausführen von zwei Spiegelungen aufstellen:

Satz.

Satz 2.2 a
Seien g und h zwei Geraden mit gemeinsamen Punkt M und dem eingeschlossenen Winkel α. Dann ist die Verkettung der Geradenspiegelungen $S_h \circ S_g$ die Drehung $D_{M,2\alpha}$.

Der zweite Fall (siehe Abb. 2.9 b)) beschäftigt sich mit dem Hintereinanderausführen von zwei Achsenspiegelungen, wobei die beiden Spiegelachsen parallel zueinander liegen.
Betrachten wir hierzu einmal wieder die Spiegelung eines Dreieckes:

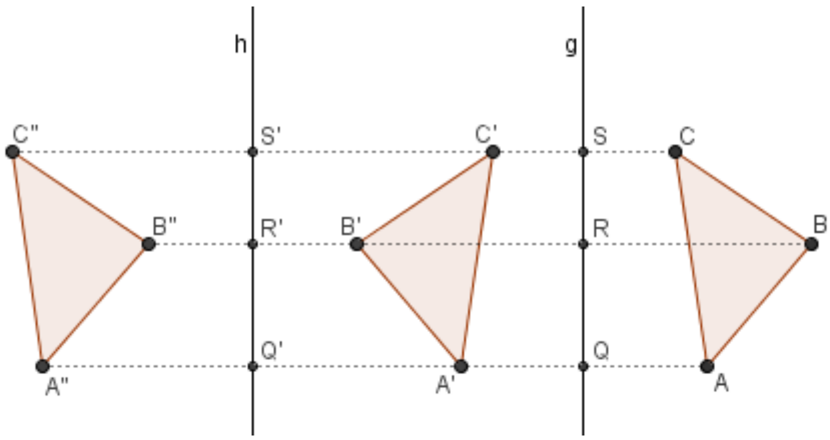


Abb. 2.11: Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an zwei parallelen Geraden

Nach dem zweimaligen Spiegeln ist der Umlaufsinn von Urbild und Bild gleich. Daher kann die Ersatzabbildung eine Drehung oder eine Verschiebung sein.
Betrachten wir zunächst in Abbildung 2.11 den Punkt A mit seinen Bildpunkten A' und A''. Die Längentreue der Spiegelung besagt: $|AQ| = |QA'|$ und $|A'Q'| = |Q'A''|$.

Es gilt :

$$|QQ'| = |QA'| + |A'Q'|$$

$$\Rightarrow |AA''| = |AQ| + |QA'| + |A'Q'| + |Q'A''| = 2 \cdot |QA'| + 2 \cdot |A'Q'| = 2 \cdot |QQ'|$$

Der Punkt A wurde also durch $S_h \circ S_g$ um $2 \cdot \left|\mathrm{QQ'}\right|$ (doppelt so weit wie der Abstand der beiden Spiegelachsen) in die Richtung $\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$ verschoben.
Diese Überlegung könnten wir nun analog auf die Punkte B und C übertragen und würden jeweils eine Verschiebung der Punkte in Richtung $\overrightarrow{\mathrm{RR'}}$ bzw. $\overrightarrow{\mathrm{SS'}}$ $(=\overrightarrow{\mathrm{QQ'}})$ erhalten. Die Länge der Verschiebung beträgt immer das Doppelte des Abstandes der beiden Spiegelgeraden.
Diese Überlegungen legen folgenden Satz nahe:

Satz.

Satz 2.2 b
Seien g und h zwei Geraden mit $\mathrm{g} \parallel \mathrm{h}$ und l eine Gerade mit $\mathrm{l} \perp \mathrm{g}$. Außerdem sei $\mathrm{l} \cap \mathrm{g} = \{\mathrm{A}\}$ und $\mathrm{l} \cap \mathrm{h} = \{\mathrm{B}\}$.
Dann ist die Verkettung der Geradenspiegelungen $S_h \circ S_g$ die Verschiebung $V_{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$.

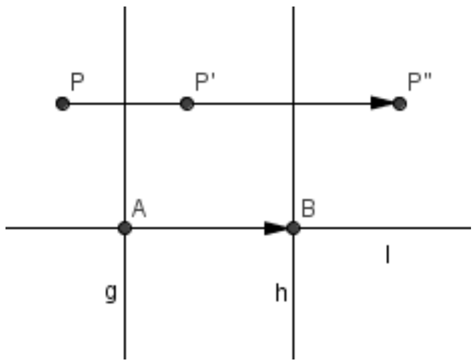


Abb. 2.12: Spiegelung des Punktes P an den Geraden g und h bzw. Verschiebung des Punktes P um den Vektor $2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Die Aussagen der beiden Sätze 2.2 a und 2.2 b fasst man zum **Zweispiegelungssatz** zusammen. Für die konkreten Aussagen ist es jedoch wesentlich, die beiden Fälle zu unterscheiden.

Die Umkehrung von Satz 2.2 muss ebenfalls aufgetrennt werden.

Satz.

Satz 2.3 a (Umkehrung von Satz 2.2 a)
Jede Drehung $D_{M,\,\alpha}$ lässt dich durch das Hintereinanderausführen von zwei Achsenspiegelungen $S_h \circ S_g$ ersetzen. Dabei müssen sich die Spiegelachsen g und h im Drehzentrum M unter $\frac{1}{2}\alpha$ schneiden.

Geradenpaare (a,b) und (c,d) mit $|\measuredangle a,b| = |\measuredangle c,d|$, die denselben Schnittpunkt haben, liefern bei gleicher Orientierung dieselbe Drehung.
Wenn wir eine Drehung durch zwei Achsenspiegelungen ersetzen wollen, ist also die Lage der Spiegelachsen nicht eindeutig festgelegt. Lediglich Schnittpunkt und der eingeschlossene Winkel sind genau bestimmt.

Satz.

Satz 2.3 b (Umkehrung von Satz 2.2 b)
Jede Verschiebung $V_{\overrightarrow{ST}}$ lässt sich durch das Hintereinanderausführen von zwei geeigneten Achsenspiegelungen $S_h \circ S_g$ ersetzen. Dabei müssen die Spiegelachsen g und h parallel zueinander sein, einen Abstand von $\frac{1}{2}|\mathrm{ST}|$ haben und senkrecht zum Vektor $\overrightarrow{\mathrm{ST}}$ liegen.

Geradenpaare (a,b) und (c,d) mit $a \parallel b \parallel c \parallel d$, die denselben Abstand haben, liefern bei gleicher Orientierung dieselbe Verschiebung.
Wollen wir eine Verschiebung durch zwei Achsenspiegelungen ersetzen, wählen wir die Spiegelachsen entsprechend des Satzes 2.3 b. Die genaue Lage der beiden Achsen ist auch hier nicht festgelegt.

Wie wir sehen, stellt die Geradenspiegelung eine Grundlage für die anderen Kongruenzabbildungen dar und wurde hier deshalb vertieft behandelt. Da wir jede Verschiebung oder Drehung durch Geradenspiegelungen ersetzen können, können wir uns auf das Verknüpfen von Achsenspiegelungen beschränken. Wesentlich ist dabei nur die Anzahl der Verknüpfungen und die Lage der Spiegelachsen zueinander.

2.3 Hintereinanderausführen von drei Achsenspiegelungen

Wir gehen nun weiter und fragen uns, welche Regelmäßigkeiten die Verkettung von drei Achsenspiegelungen ergibt. Dabei gibt es hinsichtlich der Lage der drei Spiegelachsen a, b und c drei grundsätzliche Fälle:

Fall 1: $a \parallel b \parallel c$ **Fall 2:** $a \cap b \cap c = \{S\}$ **Fall 3:** $a \cap b \cap c = \emptyset$

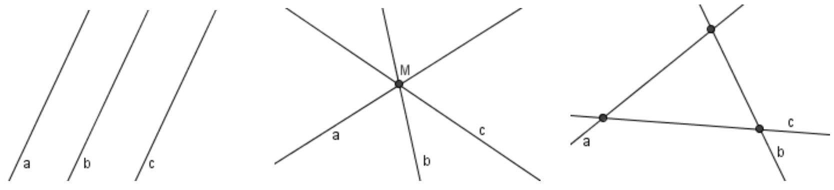
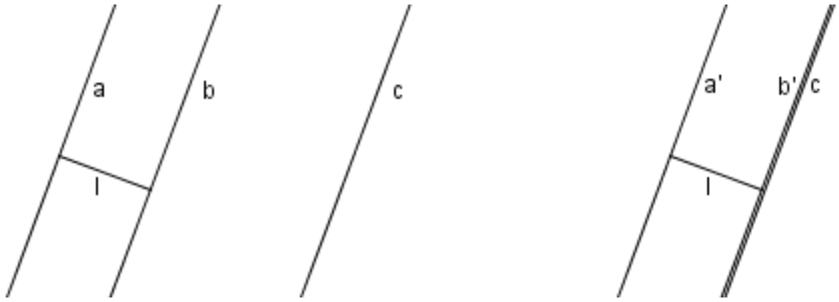


Abbildung 2.13: Verschiedene Lagen von drei Spiegelachsen

Wir betrachten die drei verschiedenen Fälle nacheinander und beginnen mit dem Hintereinanderausführen von drei Geradenspiegelungen bei drei zueinander parallelen Spiegelachsen.
Das Hintereinanderspiegeln an zwei zueinander parallelen Geraden liefert eine Verschiebung. Wenn wir die beiden Geraden a und b in ihrem Abstand gleich lassen, sie nur parallel so verschieben, dass b auf c liegt, ändert sich nichts am Gesamtergebnis (siehe Umkehrung zu Satz 2.2 b)). Demnach können wir die Verknüpfung der drei Spiegelungen folgendermaßen umformen:



$$\begin{aligned} S_c \circ \left(S_b \circ S_a\right) &= S_c \circ \left(S_{b'} \circ S_{a'}\right) \\ &= \left(S_c \circ S_{b'}\right) \circ S_{a'} \\ &= S_{a'} \end{aligned}$$

Abb. 2.14: Verschieben von zwei Spiegelachsen zur Zusammenfassung von drei Spiegelungen

Da c = b' gilt und das zweimalige Spiegeln an derselben Geraden die identische Abbildung darstellt, bleibt nur noch die Spiegelung an der Geraden a'.
Die Verknüpfung von drei Spiegelungen an parallelen Geraden kann durch eine Spiegelung ersetzt werden.
Formal: $S_c \circ S_b \circ S_a = S_{a'}$
Die neue Spiegelachse a' ist von c genauso weit entfernt, wie die Gerade b von der Geraden a.

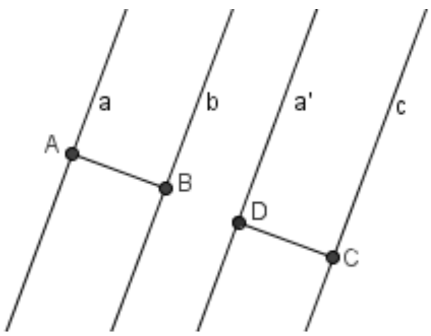


Abb. 2.15: Konstruierte Ersatzspiegelachse a'

Der zweite Fall funktioniert ähnlich. Das Hintereinanderspiegeln an zwei sich schneidenden Geraden liefert eine Drehung. Wenn wir die beiden Geraden a und b um ihren Schnittpunkt M mit gleichbleibendem Winkel drehen, ändert sich nichts am Ergebnis (siehe Umkehrung zu Satz 2.2 a)). Wir formen also folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} S_c \circ (S_b \circ S_a) &= S_c \circ (S_{b'} \circ S_{a'}) \\ &= (S_c \circ S_{b'}) \circ S_{a'} \\ &= S_{a'} \end{aligned}$$

Abb. 2.16: Drehung von zwei Spiegelachsen zur Zusammenfassung von drei Spiegelungen

Auch hier ergibt sich durch Umformen eine Spiegelung, die das Hintereinanderausführen von drei Achsenspiegelungen ersetzt.
Die Lage der Ersatzspiegelachse können wir so erklären, dass sie mit der dritten Spiegelachse c einen Winkel einschließen muss, der genauso groß ist wie der von den Geraden a und b eingeschlossene Winkel. Bei der Drehung von zwei Spiegelachsen um den gemeinsamen Schnittpunkt erhalten wir, wie oben beschrieben, eine Spiegelachse, an der wir ersatzweise spiegeln können, die mit b' bzw. c den gleichen Winkel einschließt wie a mit b.
Um die Ersatzspiegelgerade zu konstruieren müssen wir also lediglich eine Gerade durch den Schnittpunkt M zeichnen, so dass gilt:
$|\measuredangle a',c| = |\measuredangle a,b|$ (siehe Abb. 2.17).

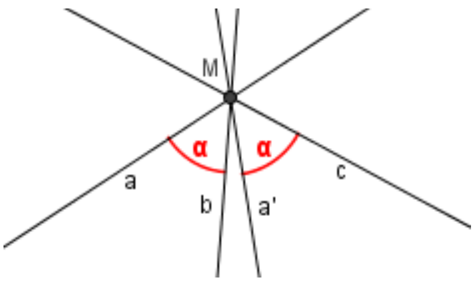
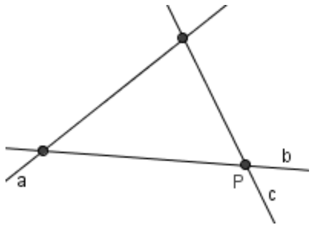


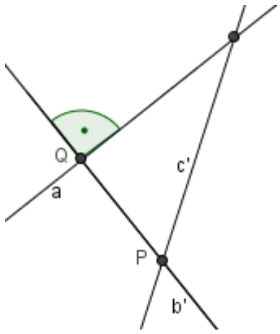
Abb. 2.17: Konstruierte Ersatzspiegelachse a'

Betrachten wir nun den dritten, allgemeinen Fall, dass die drei Spiegelachsen beliebig zueinander liegen, dass insbesondere die beiden oben betrachteten Sonderfälle nicht zutreffen:



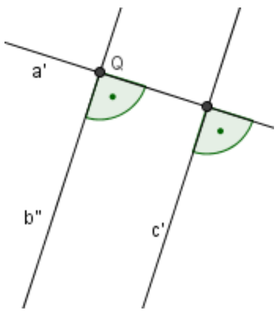
$S_c \circ S_b \circ S_a$

Wir können nun jeweils die Verkettung von zwei Achsenspiegelungen entsprechend der Sätze 2.3 a und b durch Verkettung entsprechender anderer Achsenspiegelungen ersetzen.
Drehung der Geraden b und c um P liefert das neue Geradenpaar b', c', wobei $a \perp b'$:



$$= (S_c' \circ S_b') \circ S_a \qquad a \perp b'$$
$$= S_{c'} \circ (S_{b'} \circ S_a)$$

Drehung der Geraden a und b' um Q liefert das neue Geradenpaar a', b'', wobei $b'' \parallel c'$:



$$= S_{c'} \circ \left(S_{b''} \circ S_{a'}\right) \qquad (b'' \parallel c')$$
$$= \left(S_{c'} \circ S_{b''}\right) \circ S_{a'}$$

Durch Umformen erhalten wir drei Spiegelachsen, von denen zwei Achsen parallel zueinander liegen und die dritte Achse senkrecht zu diesen beiden verläuft. Das Hintereinanderausführen von zwei

Geradenspiegelungen mit zwei zueinander parallelen Geraden, kann durch eine Verschiebung ersetzt werden (siehe Satz 2.2 b)).
Insgesamt lässt sich dieser Fall also durch das Hintereinanderausführen einer Verschiebung und einer Achsenspiegelung darstellen. Die Spiegelachse verläuft parallel zur Verschiebungsrichtung.

Definition 2.8 (Schubspiegelung bzw. Gleitspiegelung)
Das Hintereinanderausführen einer Verschiebung und einer Achsenspiegelung, wobei die Verschiebung parallel zur Spiegelachse verläuft, heißt Schub- bzw. Gleitspiegelung.

Beispiel

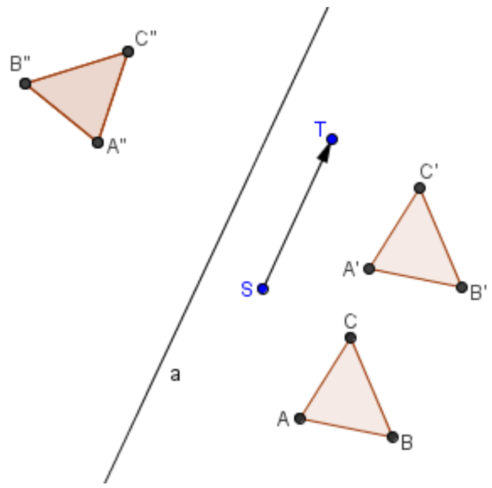


Abb. 2.18: Schubspiegelung des Dreiecks ΔABC

Satz 2.4
Bei einer Schubspiegelung sind die Verschiebung V und die Spiegelung S kommutativ.
Formal: $V \circ S = S \circ V$

Satz 2.5 (Dreispiegelungssatz)
Die Verkettung von drei Geradenspiegelungen ergibt eine Schubspiegelung. Sind die drei Geraden parallel zueinander oder schneiden sie sich in einem Punkt, so ist der Verschiebungsvektor der Nullvektor, d.h. die Gleitspiegelung vereinfacht sich zu einer reinen Achsenspiegelung.

2.4 Verkettung von mehr als drei Spiegelungen

2.4.1 Vier Spiegelungen

Wir können nun weitergehen und uns überlegen, welche Fälle es bei dem Hintereinanderausführen von vier Geradenspiegelungen gibt, um später auf allgemeine Regelmäßigkeiten zu schließen.

Die ersten beiden Fälle sind schnell abzuhandeln:
Schneiden sich alle vier Spiegelachsen in einem Punkt, so lassen sich drei der Spiegelungen durch eine ersetzen (siehe Satz 2.5), und wir haben die Situation des Satzes 2.2 a gegeben.
Bei der Parallelität aller vier Spiegelachsen, können wir drei Spiegelungen durch eine ersetzen (siehe Satz 2.5) und erhalten die Situation aus Satz 2.2 b.

Fall 3:
Die vier Spiegelachsen a, b, c, d liegen entsprechend Abbildung 2.19 a), so dass keine der Geraden parallel zueinander liegen und sie sich nicht alle in dem gleichen Punkt schneiden. Wir markieren die Schnittpunkte der Geraden a und b (Punkt A) und der Geraden c und d (Punkt B). Die Drehung der beiden Spiegelachsen c und d um den Punkt B, so dass der Winkel $\measuredangle c,d$ gleich bleibt, zeigt Abbildung 2.19 b).

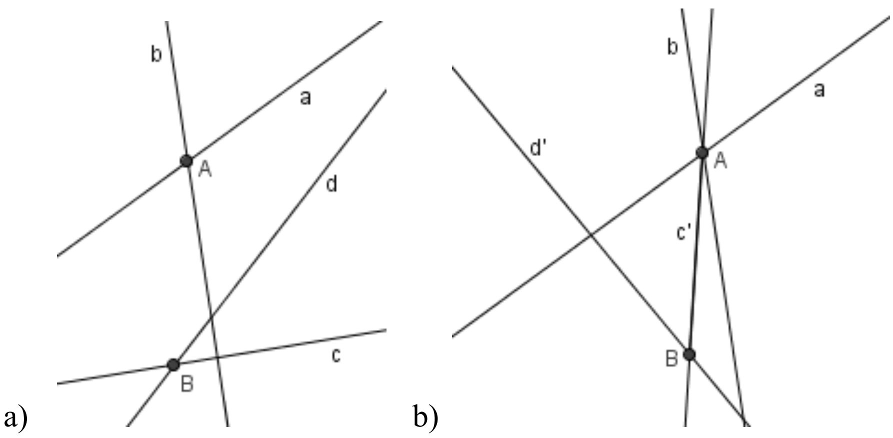


Abb. 2.19: Verknüpfung von vier Achsenspiegelungen, beliebig

Nun können wir das Hintereinanderausführen der drei Achsenspiegelungen an a, b und c’ durch eine Spiegelung an einer Ersatzgeraden a’ ersetzen, da a, b und c’ durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen (siehe Satz 2.5), und erhalten die Verknüpfung von zwei Spiegelungen an den Geraden a’ und d’.

Fall 4:
Zwei der vier Spiegelachsen (a und b) liegen parallel zueinander (siehe Abb. 2.20 a)), die anderen beiden schneiden sich. Wir markieren den Schnittpunkt der beiden Achsen c und d (Punkt A). Nun können wir c und d so um A drehen, dass die Größe des Winkels, den c und d einschließen, erhalten bleibt und c' parallel zu a bzw. b liegt (siehe Abb. 2.20 b)).

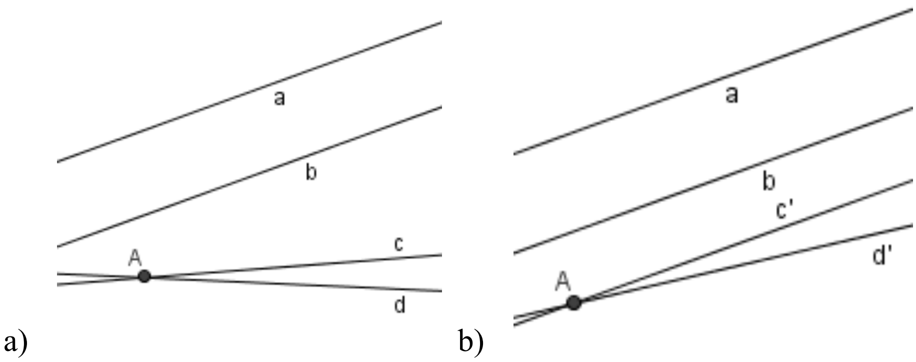


Abb. 2.20: Verknüpfung von vier Achsenspiegelungen, zwei parallel

Die Spiegelungen an drei zueinander parallelen Geraden können wir wieder durch eine Spiegelung an einer Ersatzgeraden a' ($a' \parallel a \parallel b \parallel c'$) ersetzen und erhalten die Verknüpfung von zwei Spiegelungen an den a' und d'.

Fall 5:
Liegen jeweils zwei der vier Spiegelachsen parallel zueinander (siehe Abb. 2.21 a)), so können wir zwei sich schneidende Geraden (hier b und c) so um ihren Schnittpunkt drehen, dass Schnittpunkte mit den Geraden entstehen, die vorher parallel zu ihnen lagen (siehe Abb. 2.21 b)).

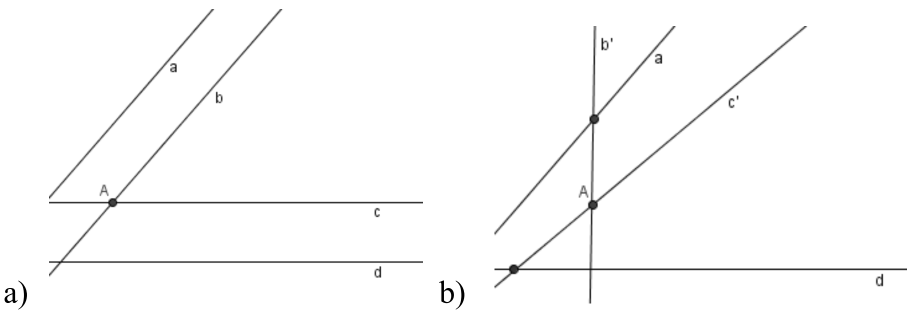


Abb. 2.21: Verknüpfung von vier Achsenspiegelungen, jeweils zwei parallel

Wir erhalten somit die Situation des Falles 3 (vgl. Abb. 2.19) und können dementsprechend fortfahren, um zwei sich schneidende Spiegelachsen zu erhalten.

In allen Fällen ist es uns also gelungen, die Verknüpfung von vier Spiegelungen auf die Verknüpfung von zwei Spiegelungen zu reduzieren.

Fassen wir die gesamten Betrachtungen zusammen:
Die Verkettung von **zwei** Achsenspiegelungen ist eine Verschiebung, wenn die Geraden parallel zueinander liegen, oder eine Drehung, wenn sich die Spiegelachsen schneiden.
Die Verkettung von **drei** Achsenspiegelungen ist eine Geradenspiegelung, wenn sich die drei Spiegelgeraden in genau einem Punkt schneiden oder parallel zueinander liegen, anderenfalls eine Schubspiegelung.
Wie wir zuletzt gesehen haben, lassen sich **vier** Geradenspiegelungen durch zwei Geradenspiegelungen ersetzen.
Bei fünf Geradenspiegelungen kann man die ersten vier angewendeten durch zwei ersetzen, so dass am Ende die Verknüpfung von fünf Geradenspiegelungen auf drei reduziert werden kann. Bei sechs Spiegelungen lassen sich vier Spiegelungen durch zwei ersetzen und die vier Spiegelungen dann wieder durch zwei.

2.4.2 Der allgemeine Fall

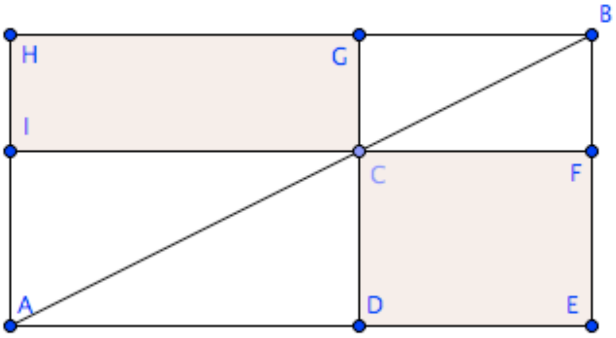
Zusammengefasst können wir eine gerade Anzahl von Achsenspiegelungen durch zwei Achsenspiegelungen (bzw. eine Drehung oder eine Verschiebung) ersetzen. Eine ungerade Anzahl von Achsenspiegelungen lässt sich durch drei Achsenspiegelungen (bzw. durch eine Achsen- oder Schubspiegelung) ersetzen.

Das Hintereinanderausführen von beliebig vielen verschiedenen Kongruenzabbildungen ist also stets durch eine der Kongruenzabbildungen ersetzbar.

Hat man umgekehrt zwei kongruente Figuren, so genügen zwei Spiegelungen, wenn diese gleichsinnig sind, bei gegensinnigen Figuren drei Spiegelungen, um die eine in die andere Figur aufeinander abzubilden.
Jede Kongruenzabbildung ist also durch zwei oder drei Spiegelungen erzeugbar. Dabei ist durch die vorgegebenen Figuren die Lage der Achsen nicht eindeutig bestimmt.

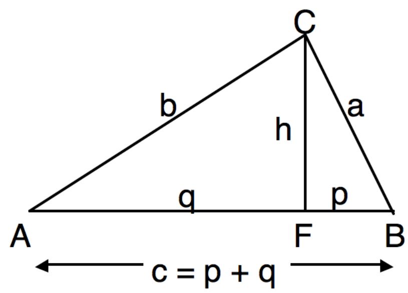
2.5 Übungen

1. Begründen Sie, warum das Rechteck CDEF flächengleich ist zum Rechteck CGHI.



   a. Gegeben ist ein Rechteck mit den Kantenlängen 4 cm und 5 cm. Verwandeln Sie es in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite 7 cm ist. Verwenden Sie dabei die hier vorgestellte Konstruktion. Beschreiben Sie die Schritte Ihrer Konstruktion.

2. Zeichnet man in ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C die Höhe von C auf die Hypotenuse $\overline{AB}$, so erhält man den Fußpunkt F und zwei Teildreiecke AFC und FBC.



   a. Zeigen Sie, dass die Dreiecke ABC, AFC und FBC zueinander ähnlich sind. Verwenden Sie die in der Zeichnung angegebenen Bezeichnungen für die Seitenlängen.
   b. Leiten Sie aus der Ähnlichkeit den Satz von Pythagoras her, also $a^2 + b^2 = c^2$.

3. Kombinatorik im Lehreralltag
   Im vollständigen, rechtwinkligen Dreieck geht es um die sechs Streckenlängen *a*, *b*, *c*, *h*, *p* und *q* (zu den Bezeichnungen der Streckenlängen siehe oben). Gibt man zwei Größen vor, kann man die übrigen vier ausrechnen.
   a. Wie viele Aufgaben mit verschiedenen Vorgaben (nicht verschieden großen) kann man stellen?
   b. $p = 2$ cm und $q = 8$ cm sind gegeben. Berechnen Sie die übrigen vier Seitenlängen.
   c. Konstruieren Sie das Dreieck und prüfen Sie in der Zeichnung die Ergebnisse aus b.

4. Konstruktionsbeschreibung
   (Wiederholung zum Workshop „Platonische Körper“)
   Das Achteck ABCDEFGH soll ein reguläres Achteck sein. Die Kante $\overline{AB}$ ist vorgegeben, $\left|AB\right| = 4cm$. Beschreiben Sie die weitere Konstruktion. Dabei sind nur folgende Konstruktionsschritte zulässig, Sie müssen die Konstruktion aber auch nicht genauer beschreiben als mit diesen Schritten.
   - Ein neuer Punkt als Schnitt von zwei Linien.
   - Einen Kreis zeichnen um einen Punkt mit einem bestimmten Radius.
   - Senkrechte zu einer Geraden durch eine Punkt.
   - Parallele zu einer Geraden durch eine Punkt.
   - Mittelpunkt einer Strecke
   - Winkelhalbierende eines Winkels

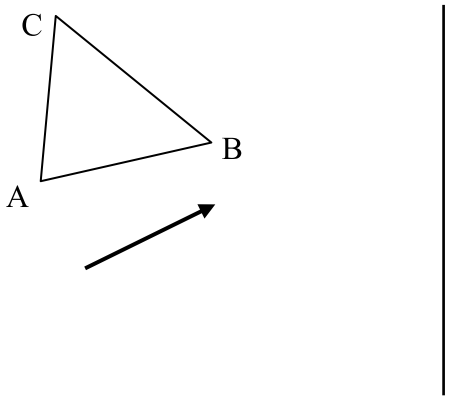
   a. Führen Sie Ihre Konstruktionsbeschreibung mit dem Geodreieck aus. *(Mittelpunkte und Winkelhalbierende dürfen also mit Abmessen bestimmt werden und müssen nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.)*
   b. Führen Sie Ihre Konstruktionsbeschreibung mit Geogebra aus. Testen Sie durch Ziehen an A oder B, ob Ihre Konstruktion erfolgreich war.

5. „geometrische“ Dreiecke
   Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit |AB| = 4 cm, |BC| = 6 cm und |AC| = 9 cm und ein zweites Dreieck DEF mit |DE| = 6 cm, |EF| = 9 cm und |DF| = 13,5 cm. Messen Sie in beiden Dreiecken die Winkel und überzeugen Sie sich, dass es zu jedem Winkel im Dreieck ABC einen gleich großen im Dreieck DEF gibt. Sie haben somit zwei Dreiecke, die in allen drei Winkeln und zwei Seiten, also fünf Größen, paarweise übereinstimmen. Dennoch sind sie nicht kongruent! Erläutern Sie.
   (Können Sie die seltsame Überschrift „geometrische“ Dreiecke erklären?)

6. Umkreise von Vierecken
   Im Allgemeinen hat ein Viereck keinen Umkreis.
   a. Zeichnen Sie ein Viereck, dessen vier Ecken **nicht** auf einem Kreis liegen.
   b. In einem Viereck ABCD gilt $\left|\sphericalangle CBA\right| = \left|\sphericalangle ADC\right| = 90°$.

      Begründen Sie möglichst genau, warum dann die vier Punkte immer auf einem Kreis liegen müssen, solch ein Viereck also immer einen Umkreis hat.

7.

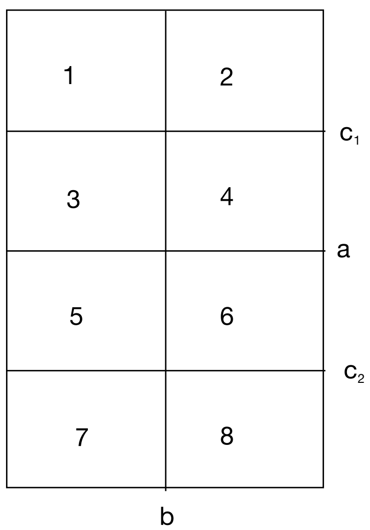


Zeichnen Sie diese Figur im Prinzip (es kommt nicht auf die exakten Maße an) auf eine Seite (am besten ohne Linien oder Karos). Unterscheiden Sie a) und b) durch Farben.
Konstruieren Sie

a. die Spiegelung des Dreiecks an der eingezeichneten Achse und dann die Verschiebung mit dem eingezeichneten Verschiebungspfeil.
b. die Verschiebung des Dreiecks mit dem eingezeichneten Verschiebungspfeil und dann die Spiegelung an der eingezeichneten Achse
   Sind die Abbildungen in der Reihenfolge vertauschbar?

c. Zeichnen Sie noch einmal die Ausgangsfigur, nun allerdings mit einem Verschiebungspfeil, der **parallel** zur Spiegelachse verläuft. Konstruieren Sie hier auch das Bild des Dreiecks, wobei Sie
   i. erst spiegeln, danach die Verschiebung ausführen
   ii. erst die Verschiebung ausführen, danach spiegeln

8. Knicken Sie ein DIN A 4 Blatt drei Mal jeweils mittig entlang der aktuellen, langen Seite. In das zusammengefaltete Papier wird ein unsymmetrisches Loch (Figur) geschnitten. Das Blatt wird dann aufgefaltet und es entstehen 8 kongruente Figuren.



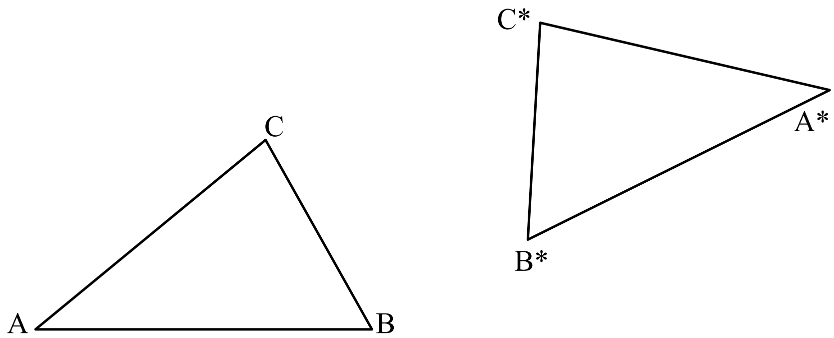
a. In welcher Reihenfolge entstehen die Knicke (Spiegelachsen)?
b. Wir definieren die Figur 1 zur Ausgangsfigur. Beschreiben Sie, durch welche <u>Spiegelungen</u> die Bildfiguren 2 bis 8 entstehen. Achten Sie auf die Reihenfolge, in der gefaltet wurde.

c. Für welche Bildfiguren können Sie eine Verschiebung oder Drehung als Ersatzabbildung angeben?
Beispiel: Figur 4 entsteht durch Spiegeln an b und dann an c_1. (Die Reihenfolge erst c_1 dann b wäre falsch) Sie entsteht auch durch eine Drehung um den Schnittpunkt von b und c_1 um 180°.

9. Beweisen Sie (auf der Basis der Abbildungseigenschaften und der Kongruenzsätze)
   a. Verschiebungen sind längentreu.
   b. Drehungen sind längentreu.

(*Hinweis: Beginnen Sie jede der beiden Aufgaben mit einer Strecke* $\overline{AB}$*, die sie passend abbilden. Zu zeigen ist dann, dass* $|AB| = |A'B'|$)

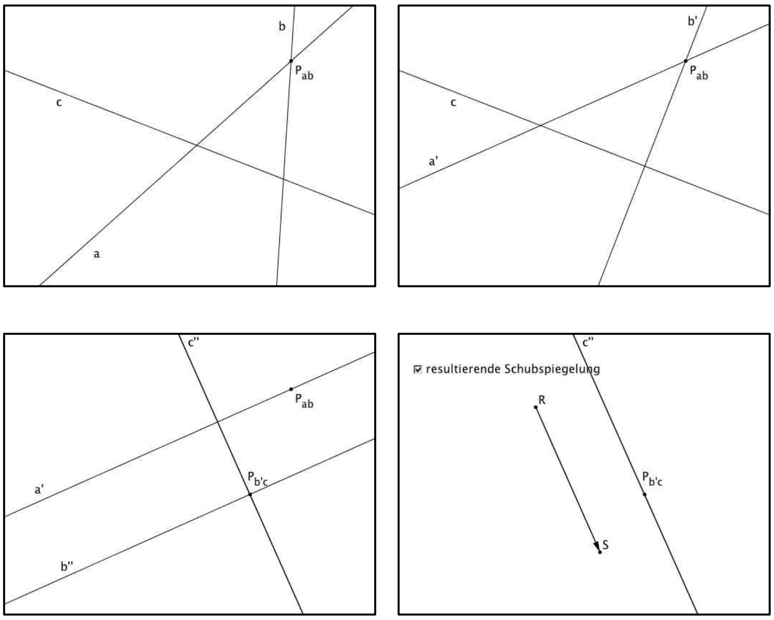
10. Gegeben ist ein Dreieck ABC und ein dazu kongruentes, gegensinniges Dreieck A*B*C*. Bestimmen Sie drei Spiegelungen deren Verknüpfung das $\triangle ABC$ abbildet auf das $\triangle A^*B^*C^*$. Beschreiben Sie, wie Sie die Spiegelungsachsen festlegen.
Ist die von Ihnen angegebene Lösung die einzig mögliche? Wie viele andere Lösungen könnte es noch geben?



11. Konstruktionsaufgabe für GeoGebra
Zeichnen Sie drei Geraden a, b und c, die einander in einem Punkt Z schneiden.
Setzen Sie einen freien Punkt P in die Ebene und spiegeln Sie ihn an a, Bildpunkt P'. Spiegeln Sie P' an b, Bildpunkt P''. Spiegeln Sie P'' an c, Bildpunkt P'''. Konstruieren Sie die Mittelsenkrechte m zur Strecke $\overline{PP'''}$.
Bewegen Sie den Punkt P und achten Sie auf die Mittelsenkrechte m. Was fällt Ihnen auf? Erläutern und begründen Sie das.

12. Schubspiegelung
Eine Schubspiegelung ist die Verknüpfung einer Verschiebung (als erste Abbildung) mit einer Spiegelung (als zweite Abbildung), wobei Verschiebungsvektor und Spiegelachse zueinander parallel sind.
Satz: Jede gegensinnige Kongruenzabbildung kann durch eine Schubspiegelung ersetzt werden.

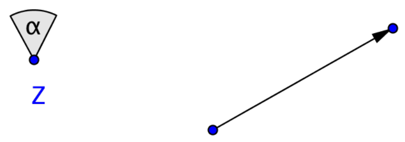
a. Die nachfolgende Bildergeschichte erläutert Ihnen, wie Sie die Schubspiegelung finden können. Schneiden Sie die Bilder aus, kleben Sie sie auf und schreiben Sie dazu einen erläuternden Text.



b. Die Bildergeschichte in a. führt auf eine Lösung, bei der erst die Verschiebung und dann die Spiegelung (an c') ausgeführt wird. Verändern Sie das Vorgehen so, dass am Ende zuerst gespiegelt wird (an a') und dann erst verschoben wird.
Nehmen Sie wieder das erste Bild aus Start und zeichnen Sie dann alle weiteren Veränderungen mit verschiednen Farben übereinander.
Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem aus a. Was fällt auf?

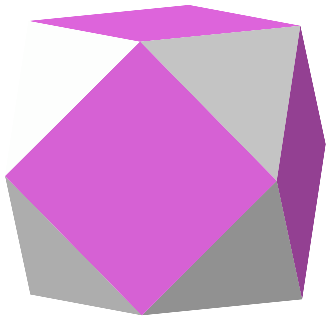
c. Konstruieren Sie in der nachfolgenden Abbildung zu den drei Spiegelachsen a, b und c die Schubspiegelung (erst Spiegelung an a, dann b, dann c).
Machen Sie anschließend eine Probe, indem Sie einen Punkt P erst an a, dann an b und dann an c spiegeln. Wenden Sie dann die Schubspiegelung an. Ist das Ergebnis wirklich gleich?
(*Sie können die Konstruktion auch mit GeoGebra machen und dann ausdrucken. Das ist allerdings etwas aufwändig. Dazu reicht es, die Anfangslage der Geraden a, b und c ungefähr nachzubilden*)

13. Im Bild unten sehen Sie einen Punkt Z und einen Winkel α . Beides soll eine Drehung um den Punkt Z und den Winkel α definieren. Der Pfeil soll eine Verschiebung definieren. Die Verknüpfung beider Abbildungen (erst Drehung, dann Verschiebung) ist wieder eine Drehung um α, aber ein anderes Zentrum Z'. Wie findet man mit Z, α und dem Verschiebungsvektor das neue Drehzentrum? Beschreiben und begründen Sie den Lösungsweg. Geben Sie anschließend eine möglichst knappe, zielgerichtete Konstruktionsbeschreibung.

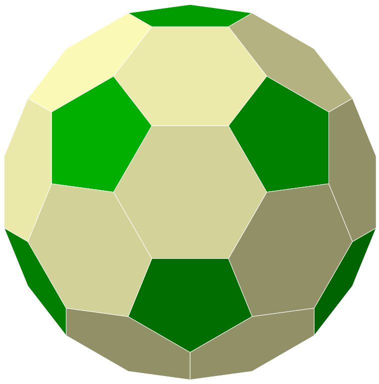


Aufgaben zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren

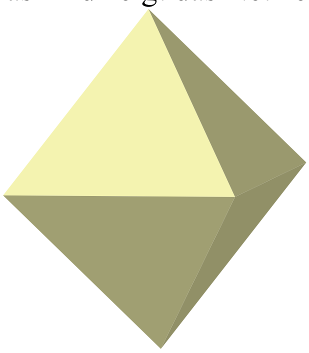


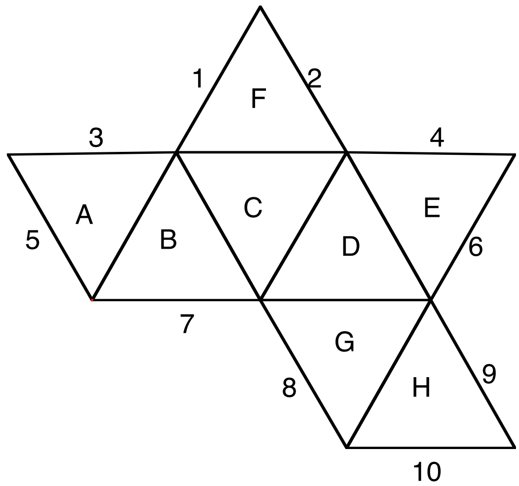
14. Das Bild zeigt einen Würfel, bei dem die Ecken abgeschnitten wurden.
    Wie viele
    a. Dreiecke
    b. Quadrate
    c. Kanten
    d. Ecken
    hat dieser Körper?



15. Ein klassischer Fußball besteht aus regelmäßigen Fünf- und Sechsecken. Es sind 12 Fünfecke.
    Wie viele Ecken und Kanten hat der (mathematische) Fußball? Erläutern Sie Ihre Überlegungen/ Ihre Zählweise.

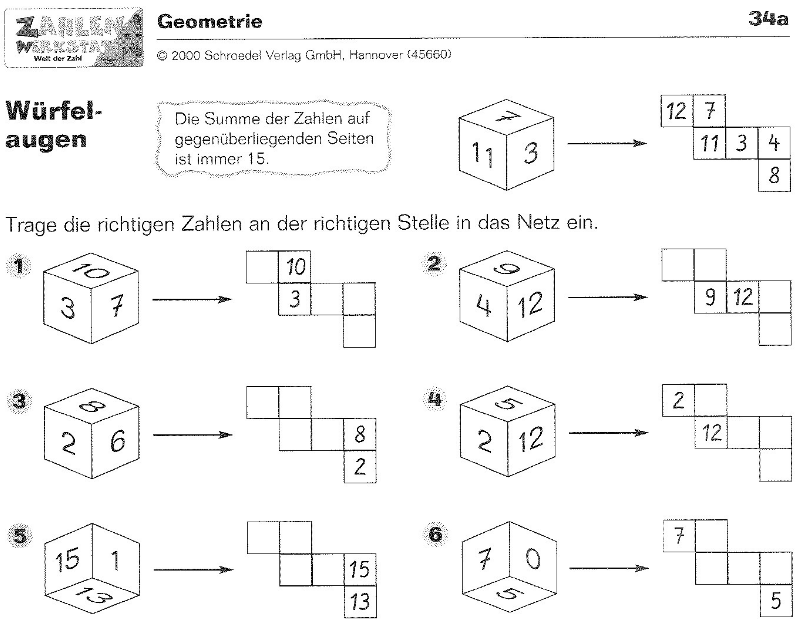
16. Das Bild zeigt das Netz eines Oktaeders (Doppelpyramide).





   a. Welche Kanten stoßen beim Zusammenbauen zusammen?
   b. Welche Flächen liegen sich nach dem Zusammenbauen gegenüber?

17. Aus einem Förder-Arbeitsheft für die 4. Klasse



Zahlen Werkstatt Welt der Zahl

Geometrie **34a**

© 2000 Schroedel Verlag GmbH, Hannover (45660)

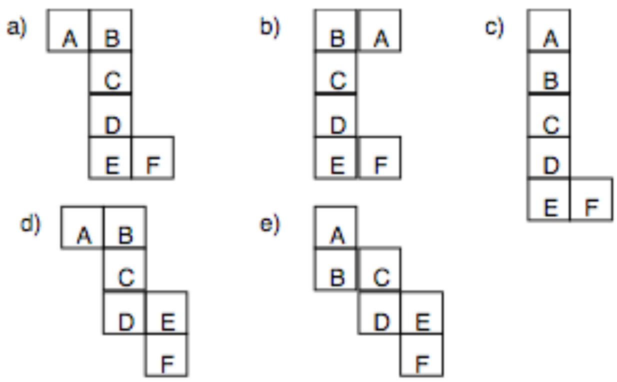
Würfel-augen

Die Summe der Zahlen auf gegenüberliegenden Seiten ist immer 15.

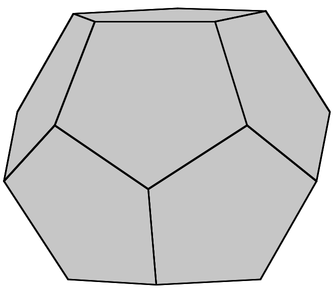
Trage die richtigen Zahlen an der richtigen Stelle in das Netz ein.

1 2 3 4 5 6

18. Aus welchen Würfelnetzen lässt sich ein Würfel bauen? Wenn es geht, schreiben Sie die Paare von Flächen auf, die sich gegenüber liegen. Wenn es nicht geht, geben Sie die Flächen an, die übereinander liegen.



19. Die Bilder zeigen das Netz eines Dodekaeders und einen Dodekaeder selbst.

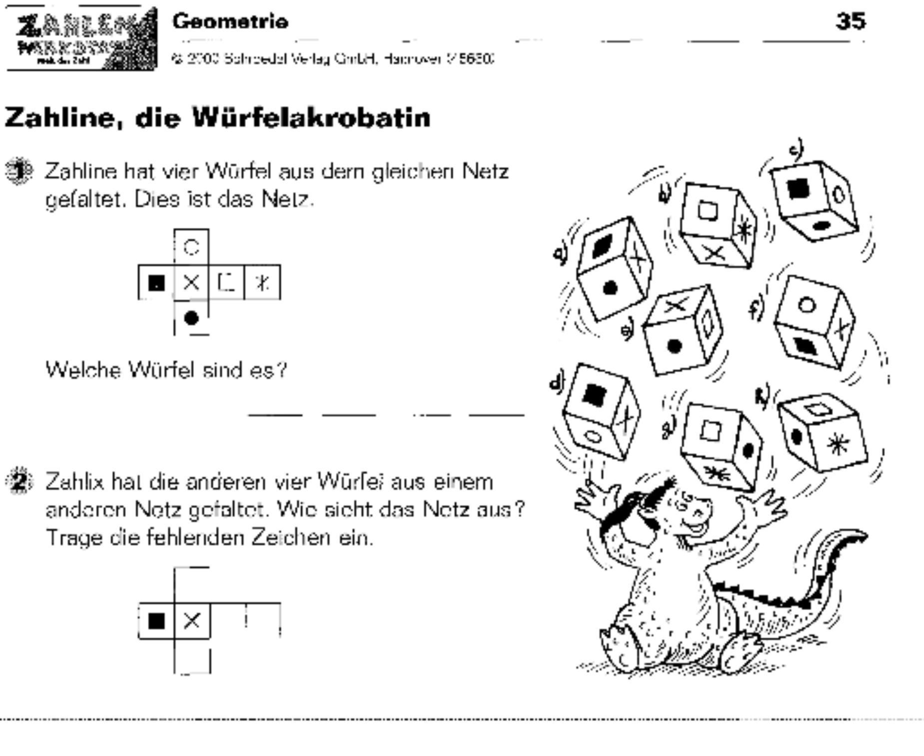


Im Netz sind fünf Kanten mit A, B, C, D und E gekennzeichnet und eine Fläche mit 1.

a. Markieren Sie im Netz die Kante mit A, die an die mit A markierte Kante stößt. Verfahren Sie entsprechend mit B, C und D.

b. Markieren Sie im Netz die Fläche mit 1, die der mit 1 markierten Fläche gegenüber liegt.

20. Übungen für die 4. Klasse:



Geometrie 35

© 2000 Schroedel Verlag GmbH, Hannover

Zahline, die Würfelakrobatin

1 Zahline hat vier Würfel aus dem gleichen Netz gefaltet. Dies ist das Netz.

Welche Würfel sind es?

2 Zahlix hat die anderen vier Würfel aus einem anderen Netz gefaltet. Wie sieht das Netz aus? Trage die fehlenden Zeichen ein.