1 Das sind wir

[Tim]

Willkommen zu unserer Präsentation über Punktgruppen und deren Anwendung in der Kristallographie. Ich bin Tim Tönz habe vor dem Studium die Lehre als Elektroinstallateur abgeschlossen und studiere jetzt Elektrotechnik im Vierten Semester mit Herrn Naoki Pross.

[Naoki]

Das bin ich ...Nun zum Inhalt

2 Ablauf

Wir möchten Euch zeigen, was eine Punktgruppe ausmacht, Konkret an Bespielen in 2D zeigen mit Gemainsamkeiten zu Algebraischen Symmetrien. Da wir Menschen jedoch 3 Räumliche Dimensionen Wahrnehmen möchten wir euch die 3D Symetrien natürlcih nicht vorenthalten. Um dem Thema des Mathematikseminars gerecht zu werden, Werden wir die einfache Verbindung zwischen Matrizen und Punktsymetrien zeigen. Dammit die Praxis nicht ganz vergessen geht, Kristalle Mathematisch beschreiben und dessen Limitationen in hinsicht Symmetrien. Als Abschluss Zeigen wir euch einen zusammenhan zwischen Piezoelektrizität und Symmetrien.

3 intro

Ich hoffe wir konnten schon mit der Einleitung ein wenig Neugirde wecken. fals dies noch nicht der Fall ist, sind hier noch die wichtigsten fragen, welche wir euch beantworten wollen, oder zumindest überzeugen, wieso dies spannende Fragen sind. Als erstes, was eine Symetrie ist oder in unserem Fall eine Punktsymetrie. Was macht ein Kristall aus, also wie kann man seine Wichtigsten eigenschaften mathematisch beschreiben. Als letztes noch zu der Piezoelektrizität, welche ein Effekt beschreibt, dass bestimmte Krisstalle eine elektrische Spannung erzeugen, wenn sie unter mechanischen Druck gesetzt werden. welche kristalle diese fähigkeit haben, hat ganz konkret mit ihrer Symmetrie zu tun.

4 Geometrie

We'll start with geometric symmetries as they are the simplest to grasp.

[Intro]

To mathematically formulate the concept, we will think of symmetries as actions to perform on an object, like this square. The simplest action, is to take this square, do nothing and put it back down. Another action could be to flip it along an axis, or to rotate it around its center by 90 degrees.

[Cyclic Groups]

Let's focus our attention on the simplest class of symmetries: those generated by a single rotation. We will gather the symmetries in a group G, and denote that it is generated by a rotation r with these angle brackets.

Take this pentagon as an example. By applying the rotation <u>action</u> 5 times, it is the same as if we had not done anything, furthermore, if we <u>act</u> a sixth time with r, it will be the same as if we had just acted with r once. Thus the group only contain the identity and the powers of r up to 4.

In general, groups with this structure are known as the "Cyclic Groups" of order n, where the action r can be applied $n-1$ times before wrapping around.

[Dihedral Groups]

Okay that was not difficult, now let's spice this up a bit. Consider this group for a square, generated by two actions: a rotation r and a reflection σ. Because we have two actions we have to write in the generator how they relate to each other.

Let's analyze this expression. Two reflections are the same as the identity. Four rotations are the same as the identity, and a rotation followed by a reflection, twice, is the same as the identity.

This forms a group with 8 possible unique actions. This too can be generalized to an n-gon, and is known as the "Dihedral Group" of order n.

5 ALGEBRA

[Produkt mit i]

Überlegen wir uns eine spezielle algebraische Operation: Multiplikation mit der imaginären Einheit. 1 mal i ist gleich i. Wieder mal i ist -1, dann $-i$ und schliesslich kommen wir züruck auf 1. Diese fassen wir in eine Gruppe G zusammen. Oder schöner geschrieben:. Sieht das bekannt aus?

[Morphismen]

Das Gefühl, dass es sich um dasselbe handelt, kann wie folgt formalisiert werden. Sei ϕ eine Funktion von C_4 zu G. Ordnen wir zu jeder Symmetrieoperation ein Element aus

G. Wenn man die Zuordnung richtig definiert, dann sieht man die folgende Eigenschaft: Eine Operation nach eine andere zu nutzen, und dann die Funktion des Resultats zu nehmen, ist gleich wie die Funktion der einzelnen Operazionen zu nehmen und das Resultat zu multiplizieren. Dieses Ergebnis ist so bemerkenswert, dass es in der Mathematik einen Namen bekommen hat: Homorphismus, von griechisch "homos" dasselbe und "morphe" Form. Manchmal wird es auch so geschrieben. Ausserdem, wenn ϕ eins zu eins ist, heisst es Isomorphismus: "iso" gleiche Form. Was man typischerweise mit diesem Symbol schreibt.

[Animation]

Sie haben wahrscheinlich schon gesehen, worauf das hinausläuft. Dass die zyklische Gruppe C_4 und G die gleiche Form haben, ist im wahrste Sinne des Wortes.

[Modulo]

Der Beispiel mit der komplexen Einheit, war wahrscheinlich nicht so überraschend. Aber was merkwürdig ist, ist das diese geometrische Struktur, kann man auch in anderen Sachen finden, die erst nicht geometrisch aussehen. Ein Beispiel für Neugierige: Summe in der Modulo-Arithmetik. Um die Geometrie zu finden denken Sie an einer Uhr.

6 Matrizen

[Titelseite]

Nun gehen wir kurz auf den Thema unseres Seminars ein: Matrizen. Das man mit Matrizen Dinge darstellen kann, ist keine Neuigkeit mehr, nach einem Semester MatheSeminar. Also überrascht es wohl auch keinen, das man alle punktsymmetrischen Operationen auch mit Matrizen Formulieren kann.

[Matrizen]

Sei dann G unsere Symmetrie Gruppe, die unsere abstrakte Drehungen und Spiegelungen enthählt. Die Matrix Darstellung dieser Gruppe, ist eine Funktion gross Φ, von G zur orthogonalen Gruppe $O(3)$, die zu jeder Symmetrie Operation klein g eine Matrix gross Φ_g zuordnet.

Zur Erinnerung, die Orthogonale Gruppe ist definiert als die Matrizen, deren transponierte auch die inverse ist. Da diese Volumen und Distanzen erhalten, natuerlich nur bis zu einer Vorzeichenumkehrung, macht es Sinn, dass diese Punksymmetrien genau beschreiben.

Nehmen wir die folgende Operationen als Beispiele. Die Matrix der trivialen Operation, dass heisst nichts zu machen, ist die Einheitsmatrix. Eine Spiegelung ist dasselbe aber mit einem Minus, und Drehungen sind uns schon dank Herrn Müller bekannt.

7 Krystalle

Jenen welchen die Kristalle bis jetzt ein wenig zu kurz gekommen sind, Freuen sich hoffentlich zurecht an dieser Folie. Es geht ab jetzt nähmlich um Kristalle. Bevor wir mit ihnen arbeiten könne sollten wir jedoch klähren, was ein Kristall ist. Per definition aus eienm Anerkanten Theoriebuch von XXXXXXXXXX Zitat:"YYYYYYYYYYYYYYY" Was so viel heist wie, ein Idealer Kristall ist der schlimmste Ort um sich zu verlaufen. Macht man nähmlich einen Schritt in genau in das nächste lattice feld hat siet der kristall wieser genau gleich aus. Als Orentierungshilfe ist diese eigenschaft ein grosser Nachteil nicht jedoch wenn man versucht alle möglichen Symmetrien in einem Kristall zu finden. Denn die Lattice Strucktur schränkt die unendlichen möglichen Punktsymmetrien im 3D Raum beträchtlich ein. Was im Englischen bekannt is unter dem Crystallographic Restrictiontheorem.

[Crystallographic restriction Theorem]

Die Punktsymmetrien von Kristallen sind auf grund verschiedensten geometrischen überlegungen eingeschränkt. Wir zeigen euch hier nur den beweis wieso die in einem Kristall nur Rotations symetrien um 360,180,120,90 und 60 grad haben kann. Für den Beweis beginnen wir mit einem Punkt A in dem Gitter wir wssen das in nach einer translation um eine gitterbasis wieder ein Punkt A' existieren muss. Wir suchen Rotationssymmetrien also drehen wir um den winkel α und müssen dank der drehsymmetrie α wieder einen punkt im Gitter finden hier B. Das selbe oder hier genau die die inverse drehung um α von A' aus muss uns daher den Punkt B' liefern. Zwischen zwei punkten im Gitter muss aber die Opertation Q angewendet werden können. Das heisst der Abstand zwischen B und B' mmuss ein ganzes vielfachen von dem Abstand B zu B' sein.

[Restriktion in Algebra]

Ausgeschrieben setzen wir klein auf die Länge der Translation, α auf $2\pi/n$ und n auf $\mathbb{N}$.