1 Das sind wir

[Camera]

2 Ablauf

Zuerst werden wir Symmetrien in 2 Dimensionen anschauen, dann überlegen wir kurz was es heisst für eine Symmetrie "algebraisch" zu sein. Von da aus kommt die dritte Dimension hinzu, die man besser mit Matrizen verstehen kann. Mit der aufgebauten Theorie werden wir versuchen Kristalle zu klassifizieren. Und zum Schluss kommen wir zu Anwendungen, welche für Ingenieure von Interesse sind.

3 intro

[Spontan]

4 2D Geometrie

[Intro]

Wir fangen mit den 2 dimensionalen Symmetrien an, da man sie sich am einfachsten vorstellen kann. Eine Symmetrie eines Objektes beschreibt eine Aktion, welche nachdem sie auf das Objekt wirkt, das Objekt wieder gleich aussehen lässt.

[Viereck]

Die einfachste Aktion, ist das Viereck zu nehmen, und wieder hinzulegen. Eine andere Aktion könnte sein, das Objekt um eine Achse zu spiegeln, oder eine Rotation um 90 Grad.

[Zyklische Gruppe]

Fokussieren wir uns auf die einfachste Klassen von Symmetrien: diejenigen die von einer reinen Drehung generiert werden. Wir sammeln diese in einer Gruppe G, und notieren das sie von eine Rotation r generiert worden sind, mit diesen spitzen Klammern.

Nehmen wir als Beispiel dieses Pentagon. Wenn wir r 5-mal anwenden, ist es dasselbe als wenn wir nichts gemacht hätten. Wenn wir es noch ein 6. mal drehen, entspricht dies dasselbe wie r nur 1 mal zu nutzen.

[Notation]

So, die Gruppe setzt sich zusammen aus dem neutralen Element, und den Potenzen 1 bis 4 von r. Oder im allgemein Gruppen mit dieser Struktur, in welcher die Aktion $n-1$ mal angewendet werden kann, heissen “Zyklische Gruppe”.

[Diedergruppe]

Nehmen wir nun auch noch die Spiegeloperation σ dazu. Weil wir jetzt 2 Operationen haben, müssen wir auch im Generator schreiben wie sie zusammenhängen. Schauen wir dann uns genauer diesen Ausdrück an. Zweimal Spielegeln ist äquivalent zum neutralen Element, sowie 4 mal um 90 Grad drehen und 2 Drehspiegelungen, welche man auch Inversion nennt.

[Notation]

Daraus können wir wieder die ganze Gruppe erzeugen, die im allgemeinen den Symmetrien eines n-gons entsprechen.

[Kreisgruppe]

Bis jetzt hatten wir nur diskrete Symmetrien, was nicht zwingend der Fall sein muss. Ein Ring kann man kontinuierlich drehen, und sieht dabei immer gleich aus.

Diese Symmetrie ist auch als Kreisgruppe bekannt, die man schön mit dem komplexen Einheitskreis definieren kann.

5 Algebra

[Produkt mit i]

Überlegen wir uns eine spezielle algebraische Operation: Multiplikation mit der imaginären Einheit. 1 mal i ist gleich i. Wieder mal i ist -1, dann $-i$ und schliesslich kommen wir züruck auf 1. Diese fassen wir in eine Gruppe G zusammen. Oder schöner geschrieben:. Sieht das bekannt aus?

[Morphismen]

Das Gefühl, dass es sich um dasselbe handelt, kann wie folgt formalisiert werden. Sei ϕ eine Funktion von C_4 zu G und ordnen wir zu jeder Symmetrieoperation ein Element aus G. Wenn man die Zuordnung richtig definiert, dann sieht man die folgende Eigenschaft: Eine Operation nach eine andere zu nutzen, und dann die Funktion des Resultats zu nehmen, ist gleich wie die Funktion der einzelnen Operazionen zu nehmen und die Resultate zu multiplizieren. Dieses Ergebnis ist so bemerkenswert, dass es in der Mathematik einen Namen bekommen hat: Homorphismus, von griechisch "homos" dasselbe und "morphe" Form. Manchmal auch so geschrieben. Ausserdem, wenn ϕ eins zu eins ist, heisst es Isomorphismus: "iso" gleiche Form. Was man typischerweise mit diesem Symbol schreibt.

[Animation]

Sie haben wahrscheinlich schon gesehen, worauf das hinausläuft. Dass die zyklische

Gruppe C_4 und G isomorph sind ist nicht nur Fachjargon der mathematik, sondern sie haben wirklich die selbe Struktur.

[Modulo]

Das Beispiel mit der komplexen Einheit, war wahrscheinlich nicht so überraschend. Aber was merkwürdig ist, ist das Beziehungen zwischen Symmetrien und Algebra auch in Bereichen gefunden werden, welche auf den ersten Blick, nicht geomerisch erscheinen. Ein Rätsel für die Neugierigen: die Summe in der Modulo-Arithmetik. Als Hinweis: Um die Geometrie zu finden denken Sie an einer Uhr.

6 3D Geometrie

2 Dimensionen sind einfacher zu zeichnen, aber leider leben wir im 3 dimensionalen Raum.

[Zyklische Gruppe]

Wenn wir unser bekanntes Viereck mit seiner zyklischer Symmetrie in 3 Dimensionen betrachten, können wir seine Drehachse sehen.

[Diedergruppe]

Um auch noch die andere Symmetrie des Rechteckes zu sehen, benötigen wir eine Spiegelachse σ, die hier eine Spiegelebene ist.

[Transition]

Um die Punktsymmetrien zu klassifizieren orientiert man sich an einer Achse, um welche sich die meisten Symmetrien drehen. Das geht aber nicht immer, wie beim Tetraeder.

[Tetraedergruppe]

Diese Geometrie hat 4 gleichwertige Symmetrieachsen, die eben eine Symmetriegruppe aufbauen, welche kreativer weise Tetraedergruppe genannt wird. Vielleicht fallen Ihnnen weitere Polygone ein mit dieser Eigenschaft, bevor wir zum nächsten Thema weitergehen.

7 Matrizen

[Titelseite]

Nun gehen wir kurz auf den Thema unseres Seminars ein: Matrizen. Das man mit Matrizen Dinge darstellen kann, ist keine Neuigkeit mehr, nach einem Semester MatheSeminar. Also überrascht es wohl auch keinen, das man alle punktsymmetrischen Operationen auch mit Matrizen Formulieren kann.

[Matrizen]

Sei dann G unsere Symmetrie Gruppe, die unsere abstrakte Drehungen und Spiegelungen enthählt. Die Matrix Darstellung dieser Gruppe, ist eine Funktion gross Φ, von G zur orthogonalen Gruppe $O(3)$, die zu jeder Symmetrie Operation klein g eine Matrix gross Φ_g zuordnet.

Zur Erinnerung, die Orthogonale Gruppe ist definiert als die Matrizen, deren transponierte auch die inverse ist. Da diese Volumen und Distanzen erhalten, natuerlich nur bis zu einer Vorzeichenumkehrung, macht es Sinn, dass diese Punksymmetrien genau beschreiben.

Nehmen wir die folgende Operationen als Beispiele. Die Matrix der trivialen Operation, dass heisst nichts zu machen, ist die Einheitsmatrix. Eine Spiegelung ist dasselbe aber mit einem Minus, und Drehungen sind uns schon dank Herrn Müller bekannt.

8 Kristalle

[Spontan]

9 Piezo

[Spontan]

10 Licht

Als Finale, haben wir ein schwieriges Problem aus der Physik. Das Ziel dieser Folie ist nicht jedes Zeichen zu versehen, sondern zu zeigen wie man von hier weiter gehen kann. Wir mochten sehen wie sich Licht in einem Kristall verhaltet. Genauer, wir möchten die Amplitude einer elektromagnetischer Welle in einem Kristall beschreiben.

Das Beispiel richtet sich mehr an Elektrotechnik Studenten, aber die Theorie ist die gleiche bei mechanischen Wellen in Materialien mit einer Spannungstensor wie dem, den wir letzte Woche gesehen haben.

Um eine Welle zu beschreiben, verwenden wir die Helmholtz-Gleichung, die einige von uns bereits in anderen Kursen gelöst haben. Schwierig wird aber dieses Problem, wenn der Term vor der Zeitableitung ein Tensor ist (für uns eine Matrix).

Zur Vereinfachung werden wir eine ebene Welle verwenden. Setzt man dieses E in die Helmholtz-Gleichung ein, erhält man folgendes zurück: ein Eigenwertproblem.

Physikalisch bedeutet dies, dass die Welle in diesem Material ihre Amplitude in

Abhängigkeit von der Ausbreitungsrichtung ändert. Und die Eigenwerte sagen aus, wie stark die Amplitude der Welle in jeder Richtung skaliert wird.

Ich sagte, in jede Richtung skaliert, aber welche Richtungen genau? Physikalisch hängt das von der kristallinen Struktur des Materials ab, aber mathematisch können wir sagen: in Richtung der Eigenvektoren! Aber diesen Eigenraum zu finden, in dem die Eigenvektoren wohnen, ist beliebig schwierig.

Hier kommt unsere Gruppentheorie zu Hilfe. Wir können die Symmetrien unseres Kristalls zur Hilfe nehmen. Zu jeder dieser Symmetrien lässt sich bekanntlich eine einfache Matrix finden, deren Eigenraum ebenfalls relativ leicht zu finden ist. Zum Beispiel ist der Eigenraum der Rotation r, die Rotationsachse, für die Reflexion σ eine Ebene, und so weiter.

Nun ist die Frage, ob man diese Eingenraume der Symmetrienoperationen kombinieren kann um den Eigenraum des physikalisches Problems zu finden.

Aber leider ist meine Zeit abgelaufen in der Recherche, also müssen Sie mir 2 Dingen einfach glauben, erstens dass es einen Weg gibt, und zweitens dass eher nicht so schlimm ist, wenn man die Notation einmal gelernt hat.

Nachdem wir an, wir haben den Eigenraum U gefunden, dann können wir einen (Eigen)Vektor E daraus nehmen und in ihm direkt lambda ablesen. Das sagt uns, wie die Amplitude der Welle, in diese Richtung gedämpft wurde.

Diese Methode ist nicht spezifisch für dieses Problem, im Gegenteil, ich habe gesehen, dass sie in vielen Bereichen eingesetzt wird, wie z.B.: Kristallographie, Festkörperphysik, Molekülschwingungen in der Quantenchemie und numerische Simulationen von Membranen.

11 Outro

[Camera]