Laguerre-Polynome

Anwendung: Approximation der Gamma-Funktion

Patrik Müller

15. Juli 2022

Inhaltsverzeichnis

Laguerre-Differentialgleichung

- Benannt nach Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886)
- Aus Artikel von 1879, in dem er $\int_0^\infty \exp(-x)/x \, dx$ analysierte

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Lösen der Differentialgleichung

$$xy''(x) + (1 - x)y'(x) + ny(x) = 0$$

Lösen der Differentialgleichung

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0$$

$$\Big\downarrow \text{Potenzreihenansatz}$$

Lösen der Differentialgleichung

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0$$

$$\Big\downarrow \text{ Potenzreihenansatz}$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k$$

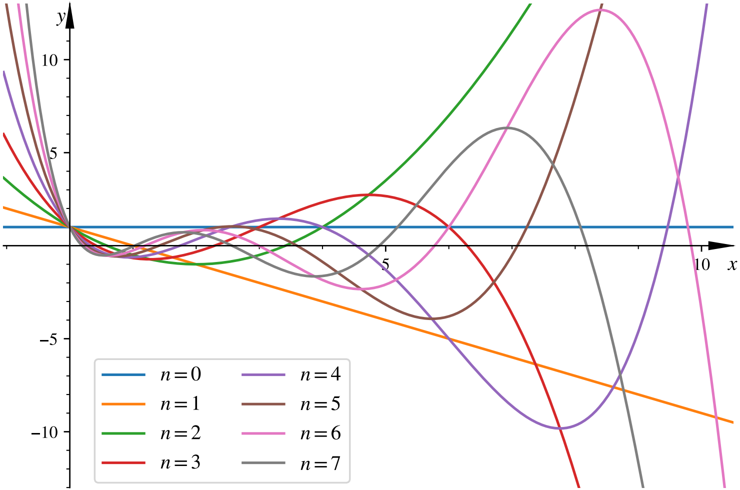
Lösen der Differentialgleichung

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0$$

$$\Big\downarrow \text{Potenzreihenansatz}$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k$$

- Die Lösungen der DGL sind die Laguerre-Polynome



Laguerre-Polynome vom Grad 0 bis 7

Orthogonalität

- Beweis: Umformen in Sturm-Liouville-Problem (siehe Paper)

$$((p(x)y'(x)))' + q(x)y(x) = \lambda w(x)y(x)$$
$$((xe^{-x}y'(x)))' + 0 \quad y(x) = n \ e^{-x}y(x)$$

Orthogonalität

- Beweis: Umformen in Sturm-Liouville-Problem (siehe Paper)

$$
\begin{aligned}
((p(x)y'(x)))' + q(x)y(x) &= \lambda w(x)y(x) \\
((xe^{-x}y'(x)))' + 0 \quad\ y(x) &= n \ \ e^{-x}y(x)
\end{aligned}
$$

- Definitionsbereich $(0, \infty)$

Orthogonalität

- Beweis: Umformen in Sturm-Liouville-Problem (siehe Paper)

$$
\begin{aligned}
((p(x)y'(x)))' + q(x)y(x) &= \lambda w(x)y(x) \\
((xe^{-x}y'(x)))' + 0 \quad y(x) &= n \;\; e^{-x}y(x)
\end{aligned}
$$

- Definitionsbereich $(0, \infty)$
- Gewichtsfunktion $w(x) = e^{-x}$

Orthogonalität

- Beweis: Umformen in Sturm-Liouville-Problem (siehe Paper)

$$
\begin{aligned}
((p(x)y'(x)))' + q(x)y(x) &= \lambda w(x)y(x) \\
((xe^{-x}y'(x)))' + 0 \quad y(x) &= n \;\; e^{-x}y(x)
\end{aligned}
$$

- Definitionsbereich $(0, \infty)$
- Gewichtsfunktion $w(x) = e^{-x}$

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Gauss-Quadratur

Idee

- Polynome können viele Funktionen approximieren

Gauss-Quadratur

Idee

- Polynome können viele Funktionen approximieren
- Wenn Verfahren gut für Polynome funktioniert, sollte es auch für andere Funktionen funktionieren

Gauss-Quadratur

Idee

- Polynome können viele Funktionen approximieren
- Wenn Verfahren gut für Polynome funktioniert, sollte es auch für andere Funktionen funktionieren
- Integrieren eines Interpolationspolynom

Gauss-Quadratur

Idee

- Polynome können viele Funktionen approximieren
- Wenn Verfahren gut für Polynome funktioniert, sollte es auch für andere Funktionen funktionieren
- Integrieren eines Interpolationspolynom
- Interpolationspolynom ist durch Funktionswerte $f(x_i)$ bestimmt $\Rightarrow$ Integral kann durch Funktionswerte berechnet werden

Gauss-Quadratur

Idee

- Polynome können viele Funktionen approximieren
- Wenn Verfahren gut für Polynome funktioniert, sollte es auch für andere Funktionen funktionieren
- Integrieren eines Interpolationspolynom
- Interpolationspolynom ist durch Funktionswerte $f(x_i)$ bestimmt $\Rightarrow$ Integral kann durch Funktionswerte berechnet werden
- Evaluation der Funktionswerte an geeigneten Stellen

Gauss-Quadratur

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)A_i$$

- Exakt für Polynome mit Grad $2n-1$

Gauss-Quadratur

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) A_i$$

- Exakt für Polynome mit Grad $2n-1$
- Interpolationspolynome müssen orthogonal sein

Gauss-Quadratur

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) A_i$$

- Exakt für Polynome mit Grad $2n - 1$
- Interpolationspolynome müssen orthogonal sein
- Stützstellen x_i sind Nullstellen des Polynoms

Gauss-Quadratur

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)A_i$$

- Exakt für Polynome mit Grad $2n-1$
- Interpolationspolynome müssen orthogonal sein
- Stützstellen x_i sind Nullstellen des Polynoms
- Fehler:

$$E = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{1} l(x)^2\,dx, \quad \text{wobei } l(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

Gauss-Laguerre-Quadratur

- Erweiterung des Integrationsintervall von $[-1, 1]$ auf (a, b)

Gauss-Laguerre-Quadratur

- Erweiterung des Integrationsintervall von $[-1, 1]$ auf (a, b)
- Hinzufügen einer Gewichtsfunktion

Gauss-Laguerre-Quadratur

- Erweiterung des Integrationsintervall von $[-1, 1]$ auf (a, b)
- Hinzufügen einer Gewichtsfunktion
- Bei uneigentlichen Integralen muss Gewichtsfunktion schneller als jedes Integrationspolynom gegen 0 gehen

Gauss-Laguerre-Quadratur

- Erweiterung des Integrationsintervall von $[-1, 1]$ auf (a, b)
- Hinzufügen einer Gewichtsfunktion
- Bei uneigentlichen Integralen muss Gewichtsfunktion schneller als jedes Integrationspolynom gegen 0 gehen

$\Rightarrow$ Für Laguerre-Polynome haben wir den Definitionsbereich $(0, \infty)$ und die Gewichtsfunktion $w(x) = e^{-x}$

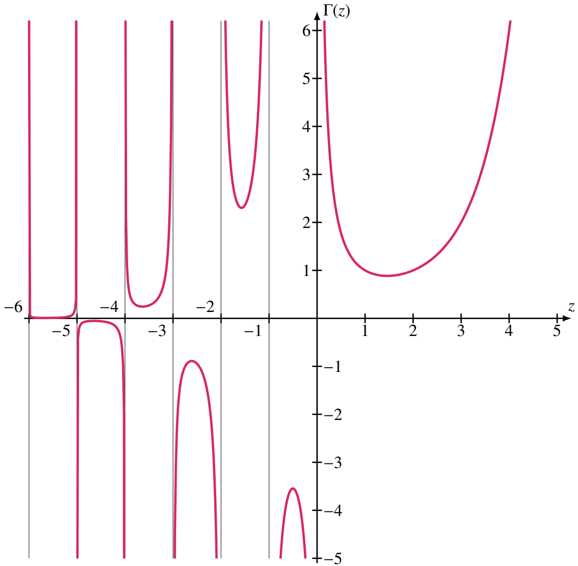
$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)A_i$$

wobei $A_i = \dfrac{x_i}{(n+1)^2\,[L_{n+1}(x_i)]^2}$ und x_i die Nullstellen von $L_n(x)$

Fehler der Gauss-Laguerre-Quadratur

$$R_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad 0 < \xi < \infty$$

Gamma-Funktion



Verallgemeinerung der Fakultät

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Integralformel

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

Funktionalgleichung

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

Reflektionsformel

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \text{für } z \notin \mathbb{Z}$$

Anwenden der Gauss-Laguerre-Quadratur auf $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} \, dx$$

Anwenden der Gauss-Laguerre-Quadratur auf $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} \, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) A_i$$

Anwenden der Gauss-Laguerre-Quadratur auf $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) A_i = \sum_{i=1}^{n} x^{z-1} A_i$$

Anwenden der Gauss-Laguerre-Quadratur auf $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) A_i = \sum_{i=1}^{n} x^{z-1} A_i$$

wobei $A_i = \dfrac{x_i}{(n+1)^2 \left[L_{n+1}(x_i)\right]^2}$ und x_i die Nullstellen von $L_n(x)$

Fehlerabschätzung

$$R_n(\xi) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi)$$
$$= (z-2n)_{2n} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \xi^{z-2n-1}, \quad 0 < \xi < \infty$$

- Funktion ist unbeschränkt
- Maximum von R_n gibt oberes Limit des Fehlers an

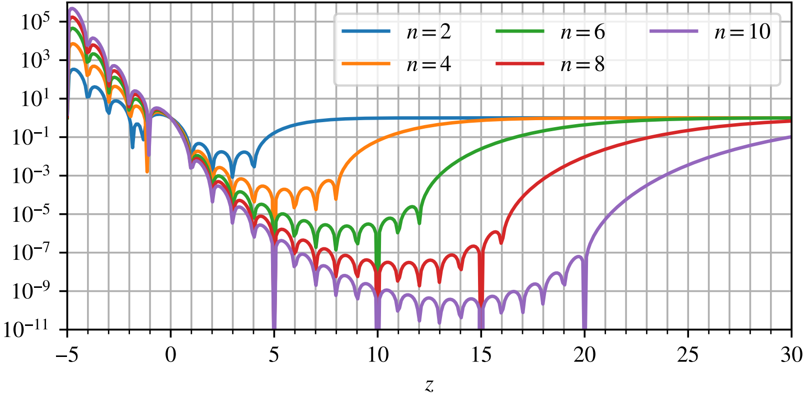
Fehlerabschätzung

$$R_n(\xi) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi)$$
$$= (z-2n)_{2n} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \xi^{z-2n-1}, \quad 0 < \xi < \infty$$

- Funktion ist unbeschränkt
- Maximum von R_n gibt oberes Limit des Fehlers an

$\Rightarrow$ Schwierig ein Maximum von $R_n(\xi)$ zu finden

Einfacher Ansatz



Relativer Fehler des einfachen Ansatzes für verschiedene reele Werte von z und Grade n der Laguerre-Polynome

Wieso sind die Resultate so schlecht?

Beobachtungen

- Wenn $z \in \mathbb{Z}$ relativer Fehler $\to 0$
- Gewisse Periodizität zu erkennen
- Für grosse und kleine z ergibt sich ein schlechter relativer Fehler
- Es gibt Intervalle $[a, a+1]$ mit minimalem relativem Fehler
- a ist abhängig von n

Wieso sind die Resultate so schlecht?

Beobachtungen

- Wenn $z \in \mathbb{Z}$ relativer Fehler $\to 0$
- Gewisse Periodizität zu erkennen
- Für grosse und kleine z ergibt sich ein schlechter relativer Fehler
- Es gibt Intervalle $[a, a+1]$ mit minimalem relativem Fehler
- a ist abhängig von n

Ursache?

- Vermutung: Integrand ist problematisch

Wieso sind die Resultate so schlecht?

Beobachtungen

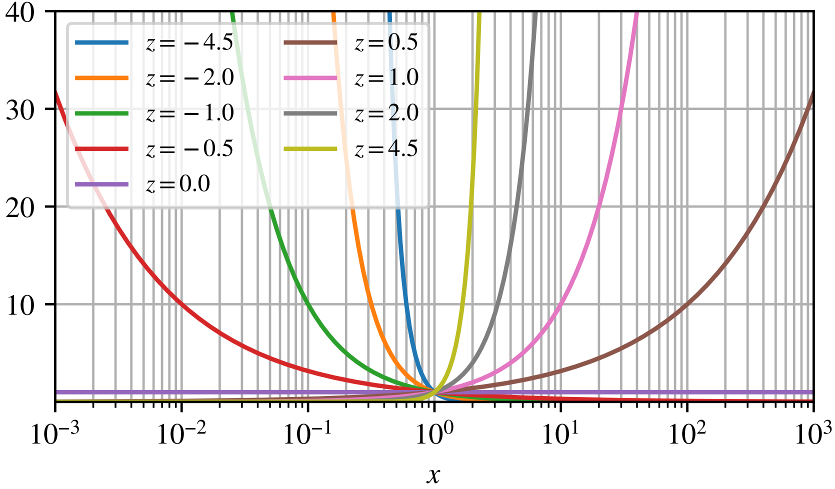
- Wenn $z \in \mathbb{Z}$ relativer Fehler $\to 0$
- Gewisse Periodizität zu erkennen
- Für grosse und kleine z ergibt sich ein schlechter relativer Fehler
- Es gibt Intervalle $[a, a+1]$ mit minimalem relativem Fehler
- a ist abhängig von n

Ursache?

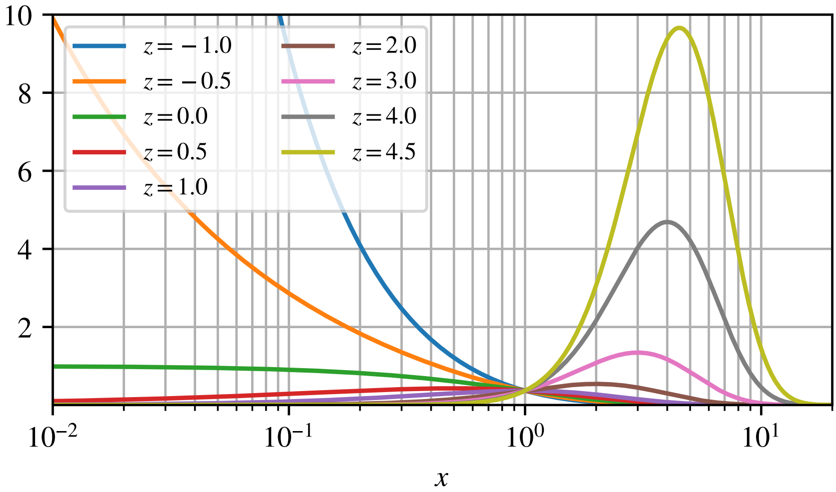
- Vermutung: Integrand ist problematisch

$\Rightarrow$ Analysieren von $f(x)$ und dem Integranden

$f(x) = x^z$


40
30
20
10
$z=-4.5$
$z=-2.0$
$z=-1.0$
$z=-0.5$
$z=0.0$
$z=0.5$
$z=1.0$
$z=2.0$
$z=4.5$
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
x

Integrand $x^z e^{-x}$



Neuer Ansatz?

Vermutung

- Es gibt Intervalle $[a(n), a(n) + 1]$ in denen der relative Fehler minimal ist
- $a(n) > 0$

Neuer Ansatz?

Vermutung

- Es gibt Intervalle $[a(n), a(n)+1]$ in denen der relative Fehler minimal ist
- $a(n) > 0$

Idee

$\Rightarrow$ Berechnen von $\Gamma(z)$ im geeigneten Intervall und dann mit Funktionalgleichung zurückverschieben

Neuer Ansatz?

Vermutung

- Es gibt Intervalle $[a(n), a(n)+1]$ in denen der relative Fehler minimal ist
- $a(n) > 0$

Idee

$\Rightarrow$ Berechnen von $\Gamma(z)$ im geeigneten Intervall und dann mit Funktionalgleichung zurückverschieben

Wie finden wir $a(n)$?

- Minimieren des Fehlerterms mit zusätzlichem Verschiebungsterm

Neuer Ansatz?

Vermutung

- Es gibt Intervalle $[a(n), a(n)+1]$ in denen der relative Fehler minimal ist
- $a(n) > 0$

Idee

$\Rightarrow$ Berechnen von $\Gamma(z)$ im geeigneten Intervall und dann mit Funktionalgleichung zurückverschieben

Wie finden wir $a(n)$?

- Minimieren des Fehlerterms mit zusätzlichem Verschiebungsterm $\Rightarrow$ Schwierig das Maximum des Fehlerterms zu bestimmen

Neuer Ansatz?

Vermutung

- Es gibt Intervalle $[a(n), a(n)+1]$ in denen der relative Fehler minimal ist
- $a(n) > 0$

Idee

$\Rightarrow$ Berechnen von $\Gamma(z)$ im geeigneten Intervall und dann mit Funktionalgleichung zurückverschieben

Wie finden wir $a(n)$?

- Minimieren des Fehlerterms mit zusätzlichem Verschiebungsterm $\Rightarrow$ Schwierig das Maximum des Fehlerterms zu bestimmen
- Empirisch $a(n)$ bestimmen

Neuer Ansatz?

Vermutung

- Es gibt Intervalle $[a(n), a(n)+1]$ in denen der relative Fehler minimal ist
- $a(n) > 0$

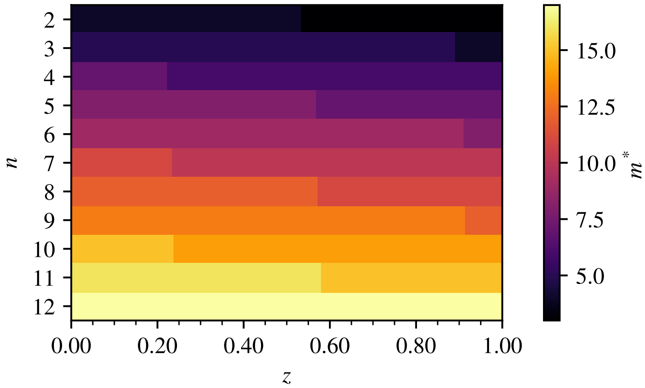
Idee

$\Rightarrow$ Berechnen von $\Gamma(z)$ im geeigneten Intervall und dann mit Funktionalgleichung zurückverschieben

Wie finden wir $a(n)$?

- Minimieren des Fehlerterms mit zusätzlichem Verschiebungsterm $\Rightarrow$ Schwierig das Maximum des Fehlerterms zu bestimmen
- Empirisch $a(n)$ bestimmen $\Rightarrow$ Sinnvoll, da Gauss-Quadratur nur für kleine n praktischen Nutzen hat

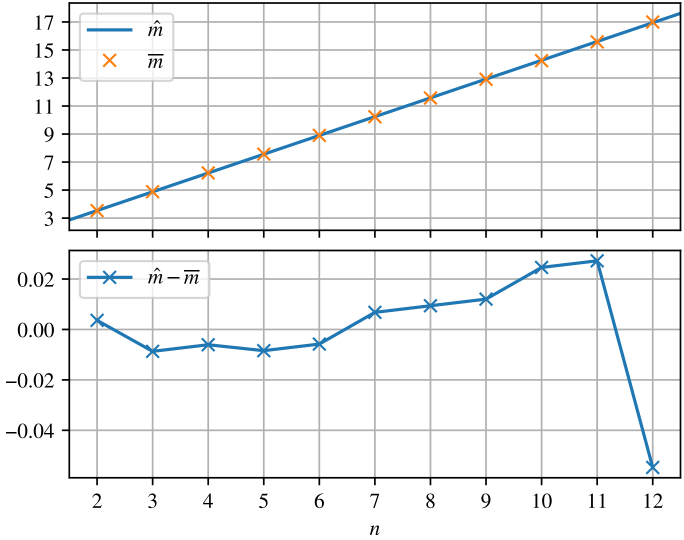
Verschiebungsterm



$$\Gamma(z) \approx \frac{1}{(z-m)_m} \sum_{i=1}^{n} x_i^{z+m-1} A_i$$

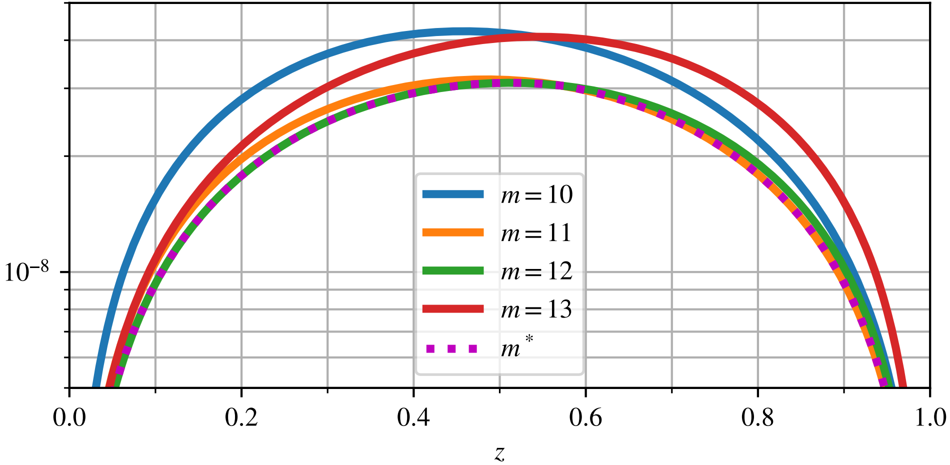
Optimaler Verschiebungsterm m^* in Abhängigkeit von z und n

Schätzen von m^*

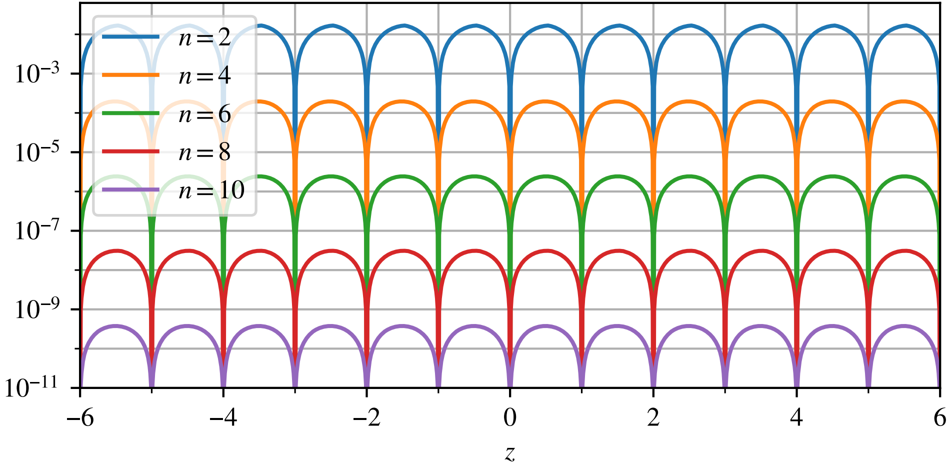


$$\begin{aligned}\hat{m} &= \alpha n + \beta \\ &\approx 1.34093n + 0.854093\end{aligned}$$

$$m^* = \lceil \hat{m} - \operatorname{Re} z \rceil$$



Relativer Fehler mit $n = 8$, unterschiedlichen Verschiebungstermen m und $z \in (0, 1)$



Relativer Fehler mit $n = 8$, Verschiebungsterm m^* und $z \in (-5, 5)$

Vergleich mit Lanczos-Methode

Maximaler relativer Fehler für $n = 6$

- Lanczos-Methode $< 10^{-12}$
- Unsere Methode $\approx 10^{-6}$