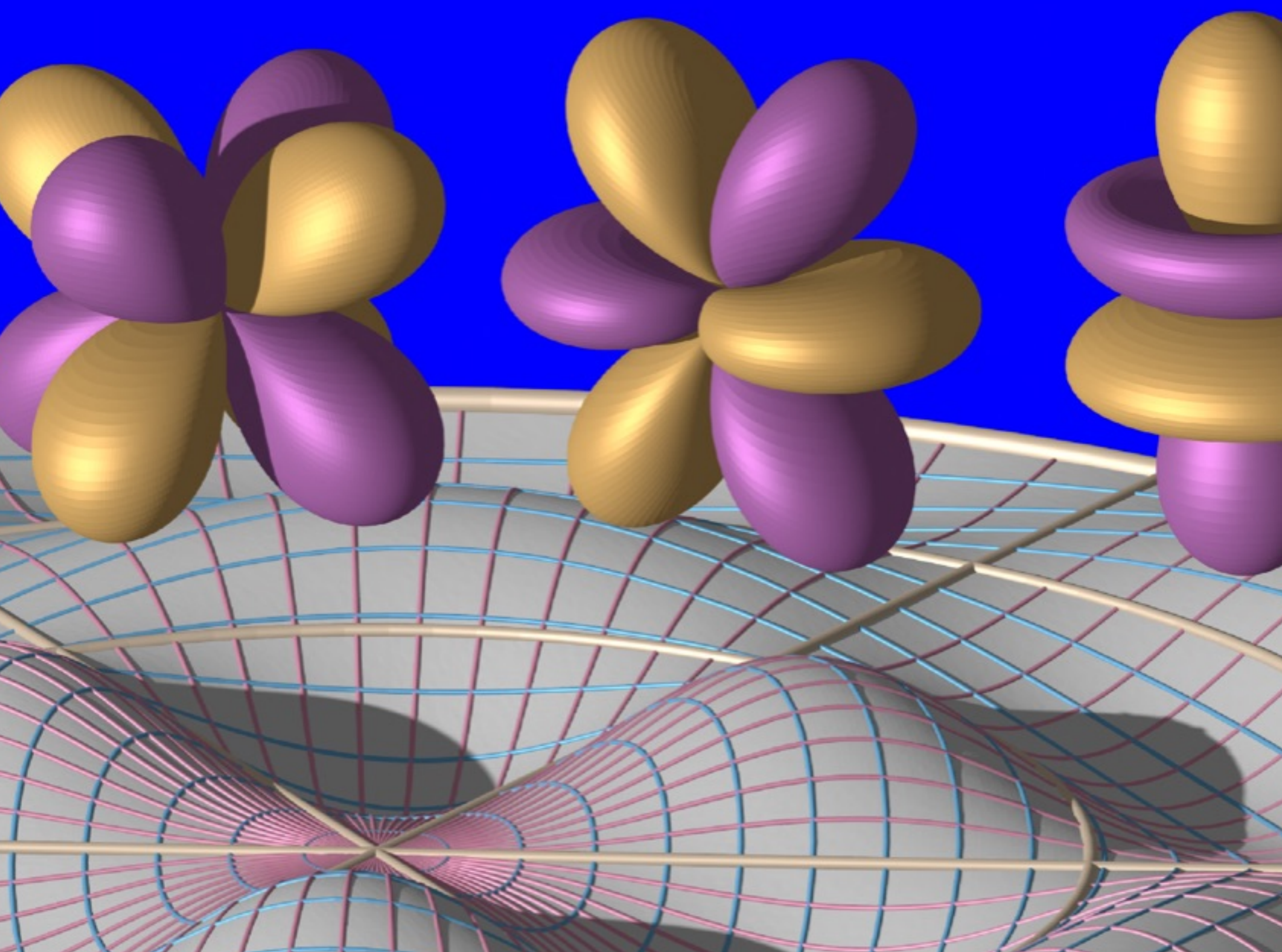
Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

1. Gamma- und Beta-Funktionen



1. Gamma- und Beta-Funktion

Definition: die Fakultäts-Funktion

$$\cdot ! : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto n!$$

ist rekursiv definiert durch

$$n! = n \cdot (n-1)! \qquad n > 0$$
$$0! = 1$$

Es folgt:

$$1! = 1 \cdot 0! = 1$$
$$2! = 2 \cdot 1! = 2$$
$$3! = 3 \cdot 2! = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3! = 24$$

exponentielles Wachstum

Näherungsformel von Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ für grosse n, i.e. $n!$ wächst wie n^n.

Anwendungen:

a) Kombinatorik: Anzahl von Permutationen von n Objekten: $|S_n| = n!$

$\uparrow$ symmetrische Gruppe
Permutationsgruppe

b) Taylor-Reihen:

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

c) Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\ \cdots\ k}$$

Anzahl Auswahlen von k Elementen aus n

(Matlab: nchoosek(n,k))

d) Binomialreihe:

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{8!}x^3+\ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}}_{=:\binom{\alpha}{k}} x^k$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig!

verallgemeinerte Binomialkoeffizienten

z.B.: $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\ldots$

Fragen:

1. Verallgemeinerung $n! \longrightarrow x!,\ x\in\mathbb{R}$
   Rekursionsformel soll erhalten bleiben
   $\longrightarrow$ Gamma-Funktion

2. Verallgemeinerung der Binomialreihe
   $\longrightarrow$ Pochhammer-Symbole
   $\longrightarrow$ Beta-Funktion

1. Pochhammer-Symbole

$n!$ ist ein aufsteigendes Produkt:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)+\ldots+(n-k+k)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

aufsteigende Produkte

Definition: $\boxed{\text{Pochhammer-Symbol:}}$

$$(a)_n = \underbrace{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+n-1)}_{n \text{ Faktoren}}$$

$$(a)_0 = 1$$

Beispiele:

1. $$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) \cdot \ldots \cdot (1+n-1) = (1)_n$$

2. $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{(n-k+1)_k}{(1)_k}$$

k Faktoren in Zähler und Nenner

3. $\left(\frac{1}{2}\right)_k$

k	0	1	2	3	
$\left(\frac{1}{2}\right)_k$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{8}$	…

Rekursionsformel für Pochhammer-Symbole:

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$$
$$(a)_{n+1} = a(a+1)\cdots(a+n-1)(a+n)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n}$$

Idee: sieht ähnlich aus wie die Rekursionsformel für die Fakultät!

Frage: Kann man mit einem aufsteigenden Produkt eine Verallgemeinerung der Fakultät konstruieren?

2. Gamma-Funktion als Grenzwert

Aufgabe: finde eine Funktion $\Gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad (n+1)! = (n+1)\,n!$$

$$\Gamma(1) = 1 \qquad 0! = 1$$

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Heuristische Beobachtungen:

1. Es werden viele Faktoren nötig sein
2. Endliche Anzahl wird nicht reichen, beim Sprung zur nächsten Anzahl würde sich die Funktion auf unstetige oder nicht diff'bare Art ändern
3. Ohne einen Grenzprozess geht es nicht!

Strategie:

- "grosse" Fakultät $n!$, $n \to \infty$ bauen
- überzählige Faktoren $> x$ mit Pochhammer-Symbolen wieder wegkürzen.
- $n \to \infty$
- $x \in \mathbb{R}$ zulassen

Durchführung dieser Strategie:

$$x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x \cdot (x+1) \cdots (x+n)}{(x+1) \cdots (x+n)}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdots (n+x)}{(x+1) \cdots (x+n)}$$

$$= \frac{n! \, (n+1)_x}{(x+1)_n}$$

nur für ganzzahliges x definiert

"Trick"

$$= \boxed{\frac{n! \, n^x}{(x+1)_n}} \; \underbrace{\frac{(n+1)_x}{n^x}}_{\to 1} \qquad (*)$$

auch für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ definiert!

$\to 1$ (Hoffnung) für $x \in \mathbb{N}$

Definition

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \, n^{x-1}}{(x)_n}$$

Grenzwert-Definition der Γ-Funktion

Zu überprüfen:

1. Rekursionsformel $\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. Startwert $\quad \Gamma(1) = 1$
3. Konvergenz

Lemma: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)_x}{n^x} = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{N}$

Beweis:

$$\frac{(n+1)_x}{n^x} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+x)}{n\cdot n \cdots n}$$

$$= \Big(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Big)\Big(1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}\Big)\cdots\Big(1+\underbrace{\frac{x}{n}}_{\to}\Big)$$

$$\to 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

Grenzübergang zulässig, da nur endlich viele ($x = \text{const}$) Faktoren vorhanden $\square$

Satz: Für $x \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(x) = (x-1)!$

Beweis: unmittelbar aus der Definition und dem "Trick" $(*)$ $\square$

Ist damit die Aufgabe gelöst?

Anfangsbedingung:

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{1-1}}{(1)_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot 1}{n!} = 1 \checkmark$$

$$\Gamma(2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{2-1}}{(2)_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot \cancel{2}\cdots \cancel{n}\cdot n}{\cancel{2}\cdots \cancel{n}\cdot(n+1)} = 1 \checkmark$$

Funktionalgleichung?

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{x+1-1}}{(x+1)_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x \cdot n! \cdot n^{x}}{x \cdot (x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$= x \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{x-1}}{(x)_n}}_{=\Gamma(x)} \cdot \underbrace{\frac{n}{(x+n)}}_{\to 1} = x\, \Gamma(x)$$

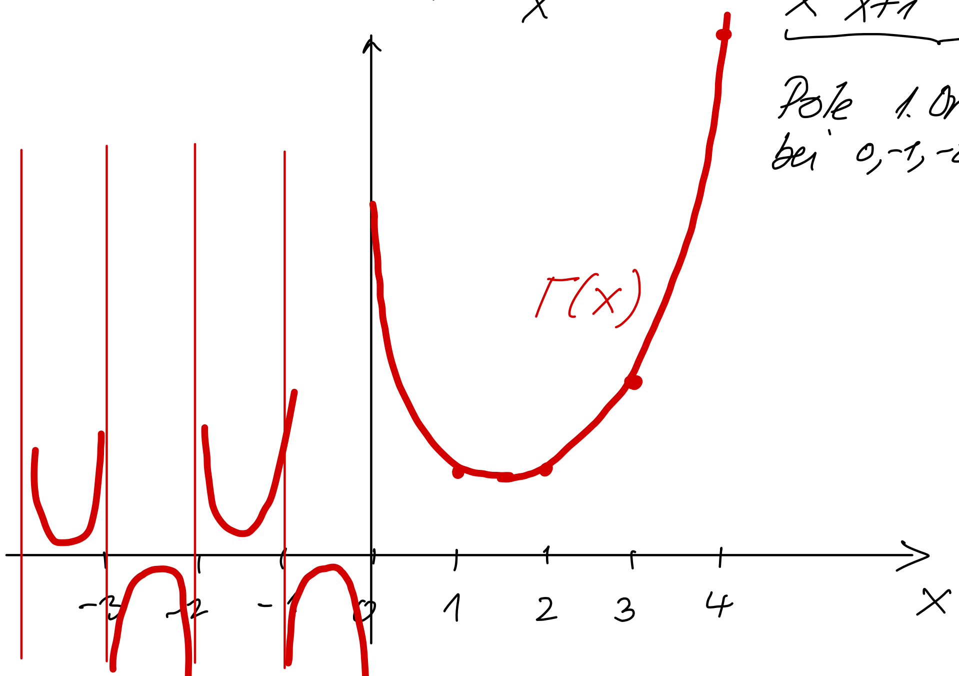
□

Die Grenzwertdefinition liefert also eine Lösung der gegebenen Funktionalgleichung.

Einige Werte:

- $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n>0$
- $\lim_{x\to n} \Gamma(x) = \pm\infty \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ n \leq 0$

Warum? $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) = \underbrace{\frac{1}{x}\,\frac{1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+k}}_{\text{Pole 1. Ordnung bei } 0,-1,-2,\dots}\ \underbrace{\Gamma(x+k)}_{\text{stetig für } k>|x|}$



3. Γ - Funktion als unendliches Produkt

Satz:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \underset{\uparrow}{x}\, e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(1+\frac{x}{k}\right)}\, e^{-\frac{x}{k}}$$

einfache Nullstelle bei $x=0$ einfache Nullstelle bei $-k$

mit

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)$$

Euler-Mascheroni-Konstante

$\Rightarrow$ Pole 1. Ordnung bei $0, -1, -2, -3, \dots$

Beweis:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x)_n}{n!\, n^{x-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x\,(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}{1\cdot 2 \cdots (n-1)\cdot n\; n^{x-1}}$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)\cdot \underbrace{\frac{1}{n^x}}_{=n^{-x}}$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \left[\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{x}{k}\right)\right]\cdot e^{-x\log n}$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \left[\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{x}{k}\right) \underbrace{e^{-\frac{x}{k}}\; e^{\frac{x}{k}}}_{=1}\right] e^{-x\log n}$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \left[\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right] e^{x\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \log n\right)}_{\to\gamma}}$$

$\square$

4. Integralformel für die Γ-Funktion

<u>Definition:</u> (Euler)

$$\Gamma : \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, dt$$

Nachprüfen:

- Startwert: $\Gamma(1) = \int_0^\infty \underbrace{t^{1-1}}_{=1} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^\infty = 1$ ✓

- Funktionalgleichung.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

part. Integration

Minus von der Ableitung $\frac{d}{dt} e^{-t}$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{x} t^x e^{-t} \right]_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{x} \int_0^\infty t^x e^{-t} dt}_{\Gamma(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

Aber: damit ist nur gezeigt, dass die Integralformel für $1, 2, 3, \ldots$ gilt!

$\Longrightarrow$ mehr Arbeit nötig!

5. Beta-Integral und Beta-Funktion

Motivation: Binomialverteilung

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad p \in [0,1]$$

Verallgemeinerung:

$$B(x,y)(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1} \qquad (*)$$

Damit daraus eine Wahrscheinlichkeitsdichte wird, muss man teilen durch die

Definition: $\boxed{\text{Beta-Funktion}}$ (auch Beta-Integral)

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Bemerkungen:

- $\frac{1}{B(x,y)} B(x,y)(t)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte (Ordnungsstatistik von auf $[0,1]$ gleichverteilte ZV)
- Das Integral $B(x,y)$ ist meist nicht elementar auswertbar (daher haben Sie es nie im Analysis-Unterricht angetroffen ☺)
  $\rightsquigarrow$ $B(x,y)$ ist eine "sinnvolle spezielle Fkt" genau wie die Fehlerfunktion.
- Damit man mit $B(x,y)$ arbeiten kann, braucht man Rechenregeln, Rekursionsformeln, einzelne Werte ...

Spezieller Wert $B(x,1) = \frac{1}{x}$

Beweis: $B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1} \underbrace{(1-t)^{1-1}}_{=1} dt = \left[\frac{1}{x} t^x\right]_0^1 = \frac{1}{x}$ $\square$

Speziell: $B(1,1) = 1$

Rekursionsformel 1: $B(x+1,y) + B(x,y+1) = B(x,y)$

Beweis:

$$B(x,y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y+1-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt - \int_0^1 t^{x}(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$= B(x,y) - B(x+1,y) \qquad \square$$

Rekursionsformel 2: $B(x+1,y) = \frac{y}{x} B(x,y+1)$

Beweis: $B(x,y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,dt$

part. Integration

Minus von der inneren Ableitung $\frac{d}{dt}(1-t)^y$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{x} t^x (1-t)^y\right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{x}\int_0^1 t^x \; y(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$= \frac{y}{x} B(x+1,y) \qquad \square$$

Kombinierte Rekursionsformel:

$$B(x,y) = B(x+1,y) + B(x,y+1)$$
$$= \frac{x}{y} B(x,y+1) + B(x,y+1) = \frac{x+y}{y} B(x,y+1)$$

$$B(x,y+1) = \frac{y}{x+y} \; B(x,y) \qquad (*)$$

Rekursionsformel 3: $B(x,y+n) = \dfrac{(y)_n}{(x+y)_n} \; B(x,y)$

Beweis: Jedesmal, wenn man y um 1 erhöhen will, muss man nach $(*)$ mit $\frac{y}{x+y}$ multiplizieren. Jedesmal ist aber y um 1 grösser. In n Iterationen entstehen so im Zähler und Nenner die Pochhammer-Symbole mit n Faktoren $\square$

Beobachtung: In der Rekursionsformel 3 kommt wie in der Konstruktion der Γ-Funktion ein Quotient von Pochhammer-Symbolen vor
$\longrightarrow$ Gibt es einen Zusammenhang $B(\cdot,\cdot) \leftrightarrow \Gamma(\cdot)$?

6. Beta und Gamma

$$B(x,y) = \frac{(x+y)_n}{(y)_n} B(x, y+n)$$

$$= \underbrace{\frac{(x+y)_n}{n!\, n^{x+y-1}}}_{\downarrow} \; \underbrace{\frac{n!\, n^{y-1}}{(y)_n}}_{\downarrow} \int_0^1 n^x t^{x-1} (1-t)^{y+n-1} dt$$

$$s/n = t$$

$$\to \Gamma(x+y)^{-1} \cdot \Gamma(y) \cdot \int_0^n \cancel{n^x} \left(\frac{s}{\cancel{n}}\right)^{x-1} \left(1-\frac{s}{n}\right)^{y+n-1} \frac{ds}{\cancel{n}}$$

$$\to \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \lim_{n\to\infty} \int_0^n s^{x-1} \underbrace{\left(1-\frac{s}{n}\right)^n}_{\to e^{-s}} \underbrace{\left(1-\frac{s}{n}\right)^{y-1}}_{\to 1} ds$$

$$= \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \underbrace{\int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds}_{=\Gamma(x)}$$

$$= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

d.h. $B(x,y)$ kann durch Γ ausgedrückt werden!

Man beachte die Ähnlichkeit zu den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\underbrace{k+1}_{x})\,\Gamma(\underbrace{n-k+1}_{y})} = \frac{\Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}$$

$$= \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \frac{1}{x+y-1} = \frac{1}{B(k+1, n-k+1)} \cdot \frac{1}{n+1}$$

7. Binomialreihe

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{B(k+1, \alpha-k+1)}$$

In dieser Form berechnet das CAS Maxima die Potenzreihe von x^α an der Stelle $x=1$:

```
(%i1) powerseries(x^alpha,x,1);
                 inf
                 ====                    i1
                 \               (x - 1)
                  >     --------------------------------
                 /      beta((- i1) + alpha + 1, i1 + 1)
                 ====
                 i1 = 1
(%o1)            ------------------------------------ + 1
                              alpha + 1
```