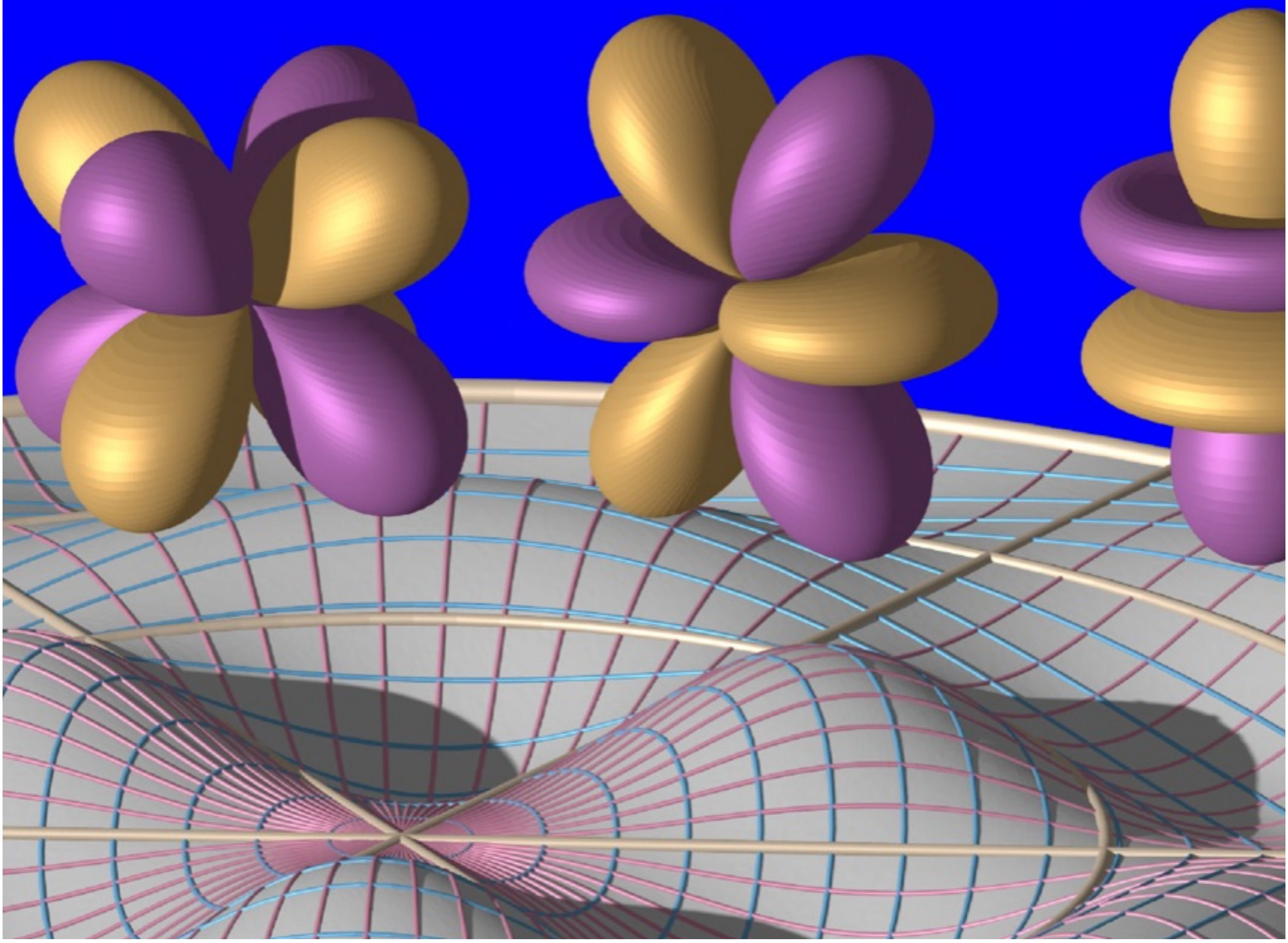
Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

2. Potenzreihenmethode



0. Aufgabe

Finde die Lösungen einer linearen Differentialgleichung

$$a_n(x)\,y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0$$

mit Anfangsbedingungen

$$y(0) = y_0\,, \quad y'(0) = y_1, \ldots, \quad y^{n-1}(0) = y_{n-1}$$

Schwierigkeiten:

① "Standardverfahren" nur für konstante Koeffizienten $a_k(x) = \text{const}$

② Nullstellen von $a_n(x)$ sind besonders problematisch, weil sich die Gleichung dort nicht nach $y^{(n)}$ auflösen lässt.

Frage: gibt es ein allgemeines Lösungsverfahren, welches immer eine "vernünftig berechenbare" Lösung liefert?

könnte heissen: – Fourierreihe ?

– $\boxed{\text{Potenzreihe}}$

Ziel: allg. Lösung als Potenzreihe.

1. Potenzreihen

<u>Zur Erinnerung:</u> Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \text{im Punkt } 0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k \qquad \text{im Punkt } x_0$$

Konvergenzradius ϱ: Potenzreihe konvergiert für alle x mit $|x-x_0| < \varrho$

$$\frac{1}{\varrho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{Wurzelkriterium}$$

Falls $a_k \neq 0$ ab einem genügend grossen Index und falls der Grenzwert existiert

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{Quotientenkriterium}$$

Taylorreihe im Punkt x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Beispiele:

(1) $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

ist Lösung der Differentialgleichung

$$y' = y$$

(2) $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

sind Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' = -y$$

(3) $\tan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$

ist Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 1 + y^2$$ (nicht linear!)

Aufgabe: Gegeben eine DGl, finde die Potenzreihenentwicklung der Lösung

2. Die Potenzreihenmethode

Beispiel: $y' = y$

① Ansatz: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

② Einsetzen: $y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

③ Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = a_1 \\ a_1 = 2a_2 \\ a_2 = 3a_3 \\ \vdots \end{array}\right\}$$

allgemein: $a_{k-1} = k\, a_k$

④ Rekursionsformel für Koeffizienten der Potenzreihe

Anfangsbedingung: $y(0) = y_0 = a_0$

$\longrightarrow$ ⑤ Anfangswert für die Koeffizienten-Rekursion.

a_0	$a_1 = \frac{1}{1} a_0$	$a_2 = \frac{1}{2} a_1$	$a_3 = \frac{1}{3} a_2$	$\dots$	$a_k = \frac{1}{k} a_{k-1}$
y_0	$\frac{1}{1} y_0$	$\frac{1}{1 \cdot 2} y_0$	$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} y_0$		$\frac{1}{k!} y_0$

⑥ Lösung:

$$y(x) = y_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = y_0 e^x$$

<u>Beispiel:</u> Wurzelfunktionen:

$$(1+x)y' = \alpha y \qquad y(0)=1$$

Mit Standardtechniken kann man die Lösung

$$y(x) = (1+x)^\alpha$$

finden. Kontrolle:

$$(1+x)y'(x) = (1+x)\,\alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$= \alpha \underbrace{(1+x)^\alpha}_{y} = \alpha y \qquad \checkmark$$

Lösung mit der Potenzreihenmethode:

① Ansatz: $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

② Einsetzen: $y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

$$(1+x)y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$
$$+ \qquad a_1 x + 2a_2 x^2 + \dots$$
$$= a_1 + (2a_2 + a_1)x + (3a_3 + 2a_2)x^2 + \dots$$
$$\|$$
$$\alpha y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

③ Koeffizientenvergleich:

$$\alpha a_0 = a_1, \; \alpha a_1 = 2a_2 + a_1, \; \alpha a_2 = 3a_3 + 2a_2 \; \dots$$

allgemein $\alpha a_n = (n+1)a_{n+1} + n a_n$

④ Rekursionsformel für die Koeffizienten

$$\boxed{a_{k+1} = \frac{\alpha - k}{k+1} a_k}$$

⑤ Startwert für die Rekursion:

$$y(0) = 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 1}$$

⑥ Lösung:

$$a_1 = \frac{\alpha}{1}$$

$$a_2 = \frac{\alpha - 1}{2} \cdot a_1 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}$$

$$a_3 = \frac{\alpha - 2}{3} \cdot a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Also: $\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k}$

Kurztest: Differentialgleichung $y'' + y = 0$
($\sin(x)$ und $\cos(x)$)

3. Konvergenz

Quotientenkriterium: $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ untersuchen

Beispiel: $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$

d.h. $\binom{\alpha}{k} \Big/ \binom{\alpha}{k+1}$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}$$

$$= \frac{k+1}{\alpha-k} \quad \forall k$$

rationale Funktion von k

Grenzwert: $\lim_{k\to\infty} \left|\dfrac{k+1}{\alpha-k}\right| = 1$, d.h. der Konvergenzradius der Reihe ist 1.

Achtung: den Quotienten hatten wir schon in der Rekursionsformel für a_k (vorangegangene Seite)

Folgerung: Die Potenzreihenmethode führt sehr oft auf Potenzreihen, in denen a_k/a_{k+1} eine rationale Funktion von k ist.

3. Hypergeometrische Funktionen

Definition: Eine holomorphe Funktion mit Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

heisst $\boxed{\text{hypergeometrisch}}$, wenn a_k / a_{k+1} eine rationale Funktion von k ist.

Beispiele:

① Geometrische Reihe:

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z}$$

$$a_k = a_{k+1} = 1 \Rightarrow \frac{a_k}{a_{k+1}} = 1 \quad ✓$$

② Exponentialfunktion:

$$f(z) = \exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

$$a_k = k! \Rightarrow \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$$

rat. Fkt von k

③ Kosinus:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \ldots$$

$\Rightarrow$ ungerade $a_k = 0 \Rightarrow a_{2k}/a_{2k+1}$ undef $\lightning$

Aber: $\cos(z) = f(z^2)$

mit $f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^k}{(2k)!}$, und die

Funktion $f(u)$ ist hypergeometrisch:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \Rightarrow \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{(2k+2)!}{(-1)^{k+1}}$$

$$= -(2k+2)(2k+1)$$

$$= -4k^2 - 7k - 3$$

Polynom in k, d.h. eine rationale Funktion.

$\Rightarrow$ $\cos(z)$ nicht hypergeometrisch

$\cos(z) = f(z^2)$, f hypergeometrisch

④ $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$

$$= z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots\right)$$

$$= z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (z^2)^k = z f(z^2)$$

mit $f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} u^2$

Quotient: $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{(2k+3)!}{(-1)^{k+1}}$

$$= -(2k+3)(2k+2)$$

$$= -4k^2 - 10k - 6 \quad \text{rational}$$

d.h. $\sin(z)$ nicht hypergeometrisch

aber $\sin(z) = z\, f(z^2)$ $\quad f$ hypergeometrisch

<u>Beobachtungen:</u> "alle" gebräuchlichen speziellen Funktionen sind hypergeometrisch

<u>Plan:</u>

- Gemeinsame Formel für $a_k = a(k)$?
- Gemeinsame Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktionen?
- Gemeinsame Eigenschaften?

4. Die hypergeometrische Reihe

Nochmals die Newtonsche Reihe

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

absteigendes Produkt

→ als Pochhammer-Symbol schreiben?

$$= -\alpha(-\alpha+1)(-\alpha+2)\cdots(-\alpha+k-1)\cdot(-1)^k$$

aufsteigendes Produkt mit k Faktoren

$$= (-\alpha)_k \, (-1)^k$$

$$\Longrightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_k}{k!}(-x)^k$$

$$(1-x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_k}{k!} x^k = {}_1F_0(-\alpha; x)$$

<u>Definition:</u> Hypergeometrische Reihe ${}_pF_q$

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, a_2 \ldots a_p \\ b_1, b_2 \ldots b_q \end{matrix}; x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!}$$

<u>Beispiel:</u> ① ${}_0F_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Von https://specialfunctionswiki.org :

$$\sin(z) = z \cdot {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \frac{3}{2} \end{matrix} ; -\frac{z^2}{4}\right) = z \cdot {}_0F_1\left(;\tfrac{3}{2};-\tfrac{z^2}{4}\right)$$

$$\cos(z) = {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2} \end{matrix} ; -\frac{z^2}{4}\right) = {}_0F_1\left(;\tfrac{1}{2};-\tfrac{z^2}{4}\right)$$

$$\sinh(z) = z \cdot {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \frac{3}{2} \end{matrix} ; \frac{z^2}{4}\right) = z \cdot {}_0F_1\left(;\tfrac{3}{2};\tfrac{z^2}{4}\right)$$

$$\cosh(z) = {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2} \end{matrix} ; \frac{z^2}{4}\right) = {}_0F_1\left(;\tfrac{1}{2};\tfrac{z^2}{4}\right)$$

$\Longrightarrow$ hypergeometrische Funktionen vereinheitlichen bekannte spezielle Funktionen

Bessel-Funktion:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \cdot {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \nu+1 \end{matrix} ; -\frac{z^2}{4}\right)$$

$\Longrightarrow$ Bessel-Funktionen gehören in die gleiche "hypergeometrische Familie" wie $\sin(z)$ und $\cos(z)$

<u>Allgemein</u>: "Fast jede" Potenzreihe kann als hypergeometrische Reihe geschrieben (und berechnet) werden.