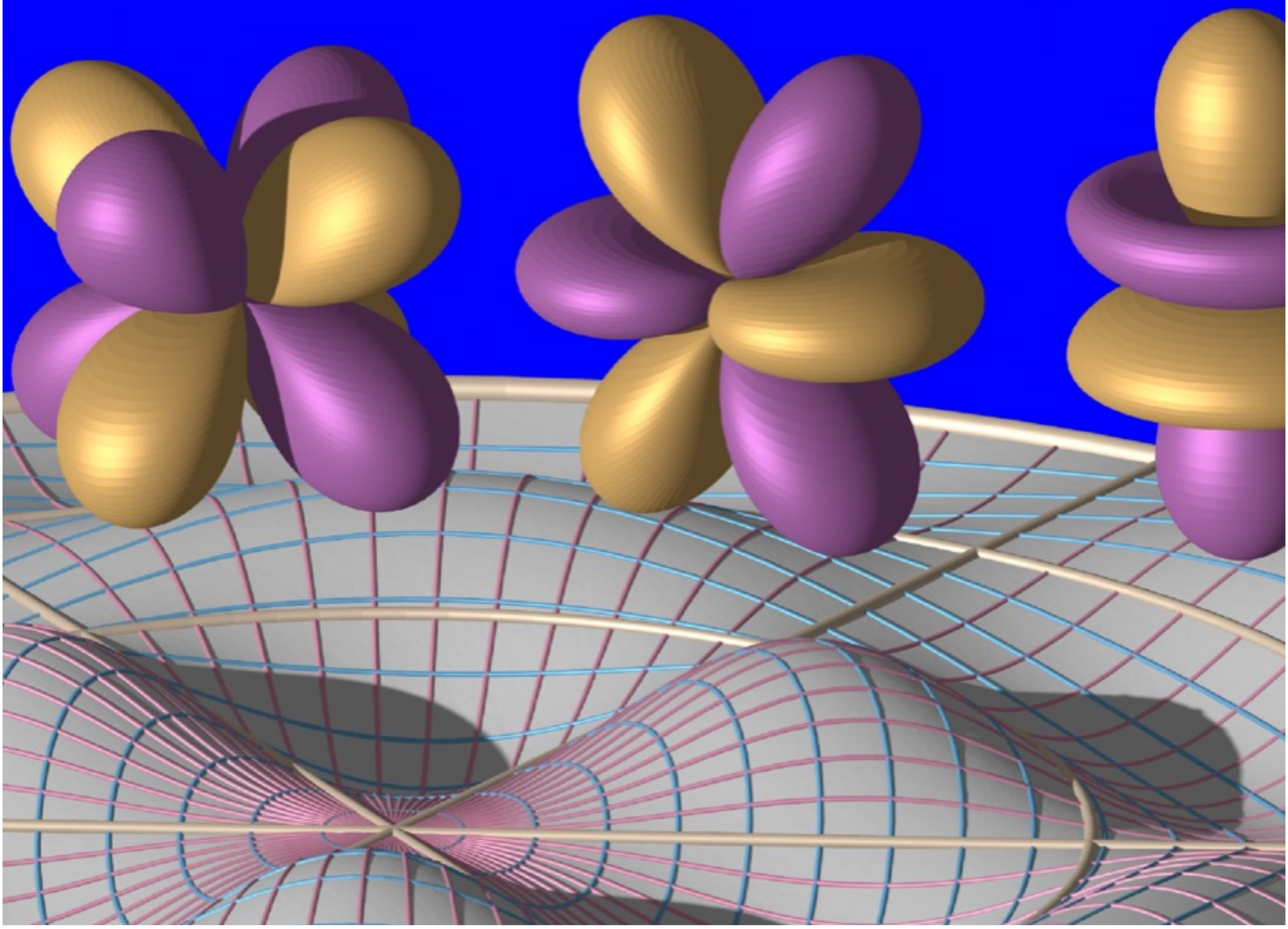
Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

3. Verallgemeinerte Potenzreihen



1. Die Besselsche Differentialgleichung

Die Besselsche Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^+$ ist die homogene DGl 2. Ordnung.

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

Achtung: für $x = 0$ wird dies zu $-\nu^2 y = 0$, d.h. wenn $\nu \neq 0$ ist, muss $y(0) = 0$ sein.

Masseinheiten: $[x]$ = Masseinheit von x, $[y]$ ...

$$[y'] = \frac{[y]}{[x]}, \quad [y''] = \frac{[y]}{[x]^2}$$

$$\underbrace{[x]^2 \frac{[y]}{[x]^2}}_{= [y]} + \underbrace{[x] \frac{[y]}{[x]}}_{= [y]} + \boxed{[x]^2 [y]} + \underbrace{[\nu^2][y]}_{= [y]}$$

Problem

$\longrightarrow$ Bessel DGl muss "dimensionslos" sein!

Schwierigkeit: man kann an der Stelle $x = 0$ nicht nach y'' auflösen:

$$y'' = -\frac{y'}{x} - \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y$$

Die DGl legt an der Stelle $x = 0$ den weiteren Kurvenverlauf nicht fest! Man sagt: die DGl hat eine Singularität bei $x = 0$.

2. Potenzreihenmethode funktioniert nicht

Die Besselsche DGl ist ein Spezialfall der allgemeineren DGl

$$x^2 y'' + p(x)\, x y' + q(x)\, y = 0 \qquad (*)$$

Bessel-DGl ist der Fall

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= 1 \\ q(x) &= x^2 - \nu^2 \end{aligned}\right\} \text{ sehr einfache Potenzreihen}$$

$\Rightarrow$ Annahme: $p(x), q(x)$ haben konvergente Potenzreihenentwicklungen:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots$$

Lösungsansatz mit Potenzreihe:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Ableitungen:

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$x\, y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k x^k$$

Analog für die 2. Ableitung

$$x^2 y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

Betrachte den Spezialfall $p(x) = p_0 = \text{const}$ und $q(x) = q_0 = \text{const}$. Dann wird die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 y'' + p(x) x y' + q(x) y \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} p_0 k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} q_0 a_k x^k \\
&= q_0 a_0 && \color{red}{k=0} \\
&\quad + p_0 a_1 x + q_0 a_1 x && \color{red}{k=1} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \left(k(k-1) + p_0 k + q_0 \right) a_k x^k && \color{red}{k \geq 2}
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$q_0 a_0 = 0 \implies a_0 = 0$$

$$(p_0 + q_0) a_1 = 0 \implies a_1 = 0$$

$$\left(k^2 + (p_0 - 1) k + q_0\right) a_k = 0 \implies a_k = 0 \qquad k \geq 2$$

Ausnahmen: $q_0 = 0$, $p_0 + q_0 = 0$, k eine Nullstelle von $k^2 + (p_0 - 1) k + q_0$

Folgerung: für allgemeine Koeffizienten liefert die Potenzreihenmethode nur die Lösung $y(x) = 0$!

Für die Differentialgleichung (*) funktioniert die Potenzreihenmethode im allgemeinen nicht!

<u>Ursache:</u> Potenzreihe kann eine mögliche Singularität der Lösung bei $x=0$ nicht wiedergeben → verallgemeinerter Ansatz nötig

Die Rechnung auf der vorangegangenen Seite hätte auch so funktioniert:

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k(k-1) + p_0 k + q_0 \right) x^k = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{k^2 + (p_0 - 1)k + q_0 = 0} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{nur wenn} \quad \frac{p_0 - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(p_0-1)^2}{4} - q_0} \in \mathbb{N}$$

kann die Potenzreihenmethode eine Lösung $\neq 0$ liefern. Die quadratische Gleichung hat also eine zentrale Bedeutung.

3. Verallgemeinerte Potenzreihe

Idee: x^{ϱ} mit $\varrho \notin \mathbb{N}$ könnte eine Singularität wiedergeben

Verallgemeinerter Potenzreihenansatz:

$$y(x) = x^{\varrho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\varrho}$$

mit $a_0 \neq 0$.

Wäre $a_0 = 0$ und k_0 der kleinste Index derart, dass $a_k \neq 0$ ist, könnte man ϱ durch $\varrho' = \varrho + k_0$ ersetzen und a_k durch $a_k' = a_{k-k_0}$, dann ist

$$y(x) = x^{\varrho} \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k x^k = x^{\varrho} \sum_{k'=0}^{\infty} a_{k'+k_0} x^{k'+k_0}$$

$$= x^{\varrho + k_0} \sum_{k'=0}^{\infty} a'_{k'} x^{k'} \quad \text{mit } a'_0 = a_{k_0} \neq 0$$

Neues Problem: Wie muss ϱ gewählt werden?

4. Die Indexgleichung

Differentialgleichung: $x^2y'' + p(x)xy' + q(x)y = 0$

Ansatz: $$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho}$$

$$xy'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) a_k x^{k+\rho}$$

$$x^2y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) a_k x^{k+\rho}$$

Einsetzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) a_k x^{k+\rho}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (k+\rho)\, a_k p_l\, x^{\boxed{l+k}+\rho}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_k q_l\, x^{\boxed{l+k}+\rho}$$

$k = l+k$

$k = k-l$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) a_k x^{k+\rho}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} (k-l+\rho)\, a_{k-l} p_l\, x^{k+\rho}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} q_l\, x^{k+\rho}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} \left((k+\rho)(k+\rho-1) a_0 + \sum_{l=0}^{k} (k+\rho) a_l p_{k-l} + \sum_{l=0}^{k} a_l q_{k-l} \right)$$

Koeffizientenvergleich: für alle k gilt

$$(k+\varrho)(k+\varrho-1)a_k + \sum_{l=0}^{k} a_l\big((k+\varrho)p_{k-l} + q_{k-l}\big) = 0$$

Fall $k=0$:

$$\big(\varrho(\varrho-1) + \varrho p_0 + q_0\big)\underbrace{a_0}_{\neq 0 \text{ nach Ansatz}} = 0$$

$\Rightarrow$ ϱ muss Nullstelle sein der Indexgl.:

Definition: Die Indexgleichung der DGl (*) ist

$$\varrho(\varrho-1) + \varrho p_0 + q_0 = 0$$

$$F(\varrho) = \varrho^2 + (p_0-1)\varrho + q_0 = 0$$

Nullstellen der Indexgleichung:

$$\varrho_\pm = \frac{p_0-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_0-1}{2}\right)^2 - q_0}$$

Bestimmung der Koeffizienten

Fall $k=1$:

$$(\varrho+1)\varrho a_0 + a_0\big((1+\varrho)p_1 + q_1\big) + a_1\big((1+\varrho)p_0 + q_0\big) = 0$$

auflösen nach a_1

$$a_1 = -\frac{\varrho(\varrho+1) + (1+\varrho)p_1 + q_1}{(1+\varrho)p_0 + q_0}\, a_0$$

Allgemeiner Fall:

$$\left((k+\rho)(k+\rho-1) + (k+\rho)p_0 + q_0\right)a_k$$
$$+ \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell\left((k+\rho)p_{k-\ell} + q_{k-\ell}\right) = 0$$

auflösen nach a_k $\rightarrow$ Rekursionsformel

$$a_k = -\frac{\sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell\left((k+\rho)p_{k-\ell} + q_{k-\ell}\right)}{(k+\rho)(k+\rho-1) + (k+\rho)p_0 + q_0}$$

Nenner:

$$(k+\rho)(k+\rho+p_0-1) + q_0$$
$$= (k+\rho)^2 + (p_0+1)(k+\rho) + q_0 = F(\rho+k)$$

d.h. der Nenner ist der Wert des Index-Polynoms an der Stelle $\rho+k$. Wenn $\rho_+ - \rho_- \notin \mathbb{Z}$, dann ist der Nenner immer $\neq 0$ und die verallgemeinerte Potenzreihe kann konstruiert werden.

Problem: wenn $\rho_+ - \rho_- \in \mathbb{Z}$ kann man mit dieser Technik nur eine Lösung finden, eine DGl 2. Ordnung hat aber 2 lin. unabh. Lösungen!

5. Bessel-Funktionen

Die Bessel'sche Differentialgleichung ist der Fall $p(x)=1$, $q(x)=x^2-\nu^2$; die Index-gleichung wird daher

$$\varrho(\varrho-\cancel{1})+\underbrace{p_0}_{=\cancel{1}}\varrho+\underbrace{q_0}_{-\nu^2}=\varrho^2-\nu^2=(\varrho+\nu)(\varrho-\nu)$$

mit Nullstellen $\pm\nu$.

$\Longrightarrow$ Die verallgemeinerte Potenzreihenmethode kann Lösungen für beliebige $\nu\in\mathbb{R}$ liefern!

$\nu<1$ führt auf Lösungen, die bei $x=0$ nicht differenzierbar sind.

Bestimmung der Koeffizienten der verallg. Potenzreihe mit der Rekursionsformel für a_k mit $p_0=1$, $q_0=-\nu^2$; $q_2=1$, alle anderen Koeffizienten $=0$.

Anfangswerte:

$$a_0=1$$

$$\boxed{a_1}=-\frac{a_0\left((1+\varrho)\cancel{p_1}^{=0}+\cancel{q_1}^{=0}\right)}{\varrho(\varrho+1)+(\varrho+1)p_0+q_0}=-\frac{0}{(\varrho+1)^2-\nu^2}$$

$$=-\frac{0}{\nu^2\pm2\nu+1-\nu^2}=-\frac{0}{\pm2\nu+1}\boxed{=0}$$

ausser evtl. für $\nu=\pm\frac{1}{2}$

Der allgemeine Fall: Rekursionsformel für a_k

$$a_k = -\frac{a_{k-2}\, q_2}{(k+\rho)(k+\rho-1) + (k+\rho)p_0 + q_0}$$

$$= -\frac{1}{(k+\rho)^2 - \nu^2}\, a_{k-2}$$

Unter Verwendung von $\rho = \pm\nu$

$$a_k = \frac{-a_{k-2}}{(k\pm\nu)^2 - \nu^2} = \frac{-1}{k^2 \pm 2k\nu}\, a_{k-2}$$

$$\boxed{a_k = -\frac{1}{k(k\pm 2\nu)}\, a_{k-2}}$$

Damit kann man jetzt die Potenzreihe der Lösung hinschreiben:

$$y(x) = x^\nu \left(1 - \frac{1}{2(2+2\nu)} x^2 + \frac{1}{2(2+2\nu)4(4+2\nu)} x^4 - \frac{1}{2(2+2\nu)4(4+2\nu)6(6+2\nu)} x^6 + \dots\right)$$

$$= x^\nu \left(1 + \frac{1}{1\cdot(1+\nu)}\left(-\frac{x^2}{4}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\,(1+\nu)(2+\nu)}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\,(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^3 + \dots\right)$$

$$= x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(\nu+1)_k}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k$$

$$\boxed{y_{\pm\nu}(x) = x^{\pm\nu}\, {}_0F_1\left(;\pm\nu+1; -\frac{x^2}{4}\right)}$$

hypergeom. Funktion!

Pochhammer-Symbol durch Gamma-Funktion ersetzen:

$$(\nu+1)_k = (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)$$

$$\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\nu+1)_k = \Gamma(\nu+k+1)/\Gamma(\nu+1)$$

Pochammer-Symbol $(\nu+1)_k$ und $\Gamma(\nu+k+1)$ unterscheiden sich um einen Faktor, der von k unabhängig ist.

<u>Definition</u>: Bessel-Funktion erster Art der Ordnung ν:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Weitere Eigenschaften der Bessel-Funktionen:

① $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

② Erzeugende Funktion

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x) z^n = \exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

③ Additionstheorem:

$$J_\ell(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{\ell-m}(y)$$