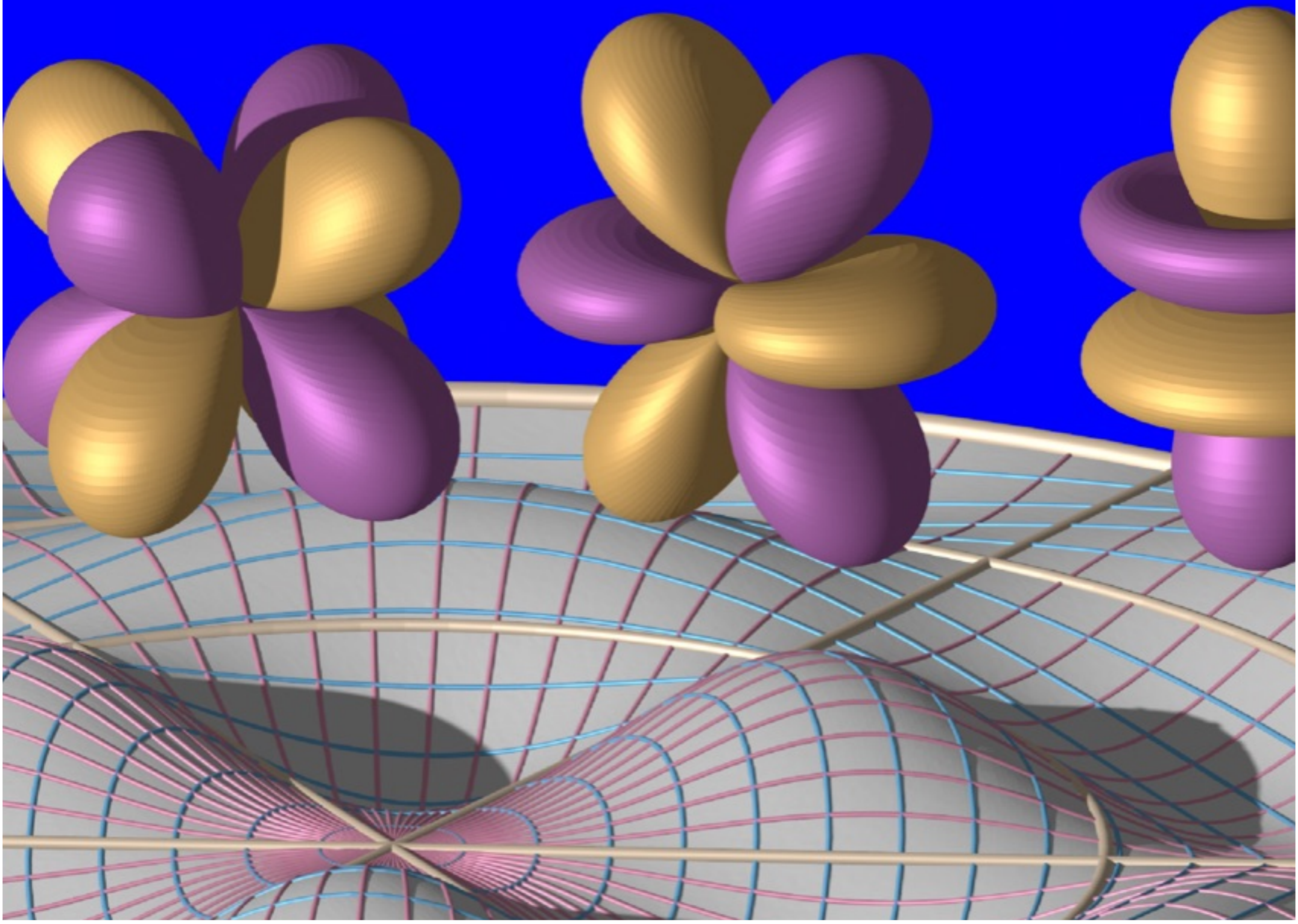
Mathematatisches Seminar

Spezielle Funktionen

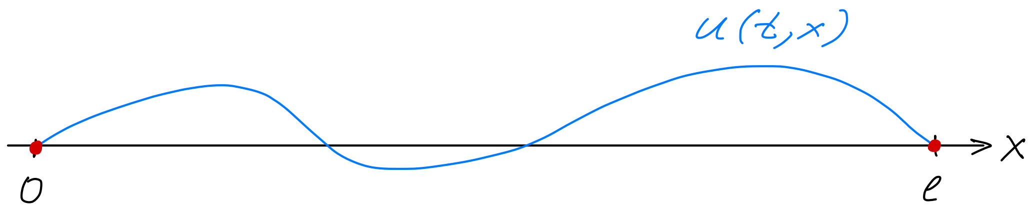
4. Partielle Differentialgleichungen



Inhalt

1. Was sind partielle Differentialgleichungen?

<u>Beispiel:</u> Auslenkung einer schwingenden Saite:



- Differentialgleichung: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
  (Wellengleichung)

  c: Schallgeschwindigkeit

- Randbedingungen: für $t > 0$

① links eingespannt: $u(t, 0) = 0 \quad \forall t$

② rechts eingespannt: $u(t, \ell) = 0 \quad \forall t$

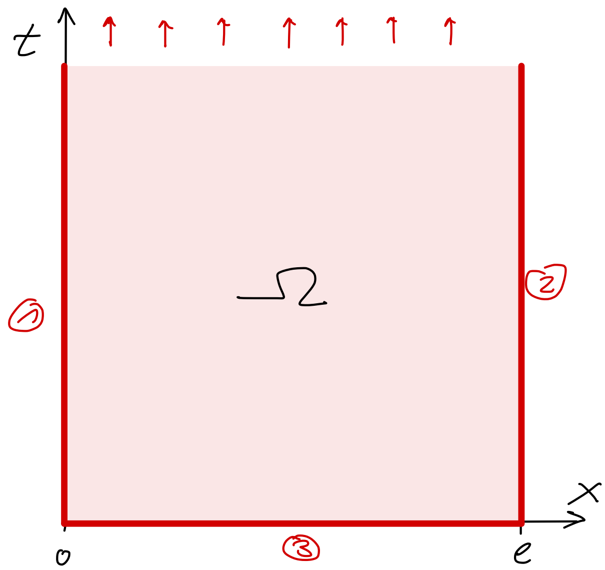
③ zur Zeit $t = 0$

Anfangsauslenkung: $u(0,x) = f(x)$

Anfangsgeschwindigkeit: $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$

- Definitionsgebiet

$$\Omega = \underbrace{(0,\infty)}_{t} \times \underbrace{(0,\ell)}_{x}$$



Allgemein: Ein partielles Differentialgleichungs-problem besteht aus

1. Definitionsgebiet: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

2. Differentialgleichung: Gleichung enthaltend die Funktionswerte und partiellen Ableitungen einer auf Ω definierten Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$

3. Randbedingungen:

homogen:

Rand von Ω

Dirichlet: $u(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega$

Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega$

Ableitung $\perp$ auf den Rand

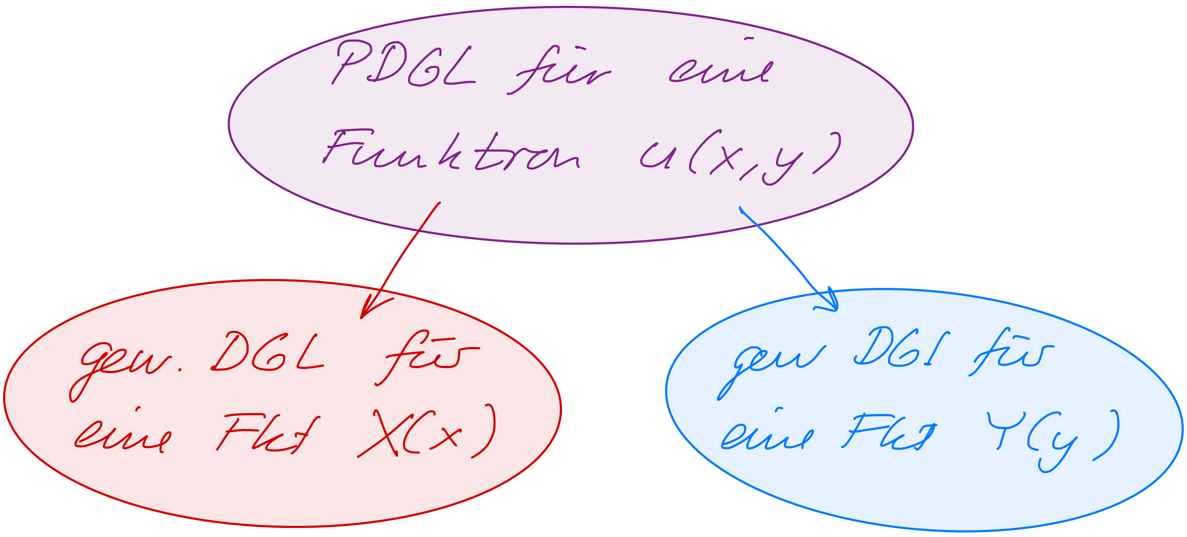
inhomogen

Dirichlet: $u(x) = f(x) \quad x \in \partial\Omega$

Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x) \quad x \in \partial\Omega$

2. Separationsmethode

<u>Plan:</u> aus einer partiellen Differentialgleichung ein System von nicht gekoppelten gewöhnlichen DGL machen, die unabh. voneinander gelöst werden können.



<u>Beispiel:</u> PDGL $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u$

<u>Ansatz:</u> $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\,Y(y), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)\,Y''(y)$$

$\Rightarrow$ neue Differentialgleichung

$$X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = \lambda X(x)\,Y(y)$$

Problem: x, y immer noch gemischt.

Division durch $X(x)\,Y(y)$:

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{nur } X(x),\,x} + \underbrace{\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{\text{nur } Y(y),\,y} = \lambda$$

$\Rightarrow$ Variablen können getrennt werden:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda - \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

linke Seite hängt nur von x ab

rechte Seite hängt nur von y ab

x festhalten: rechte Seite kann sich nicht ändern, selbst wenn man y verändert $\longrightarrow$ konstant

y festhalten: linke Seite kann sich nicht ändern, selbst wenn man y verändert $\longrightarrow$ konstant

Folgerung: es gibt eine Konstante μ derart, dass

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \overset{\text{Koppelung}}{\mu} = \lambda - \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

DGl nur für $X(x)$

DGl nur für $Y(y)$

Die Differentialgleichungen für $X(x)$ und $Y(y)$ sind "einfach":

$$X''(x) = \mu X(x) \implies \begin{cases} \sin(\sqrt{-\mu}\, x) \\ \cos(\sqrt{-\mu}\, x) \end{cases}$$

$$Y''(y) = (\lambda - \mu) Y(y) \quad \begin{cases} \sin(\sqrt{\mu-\lambda}\; y) \\ \cos(\sqrt{\mu-\lambda}\; y) \end{cases}$$

Resultat: Für jedes μ gibt es eine Lösung $X_\mu(x)$ und $Y_\mu(y)$ und damit

$$u_\mu(x,y) = X_\mu(x)\, Y_\mu(y)$$

Offene Fragen:

- Welche μ kommen überhaupt in Frage? (Einschränkung durch Randbedingungen)
- Wie können <u>alle</u> Randbedingungen erfüllt werden? $\longrightarrow$ Linearkombinationen

$$u(x,y) = \sum_\mu a_\mu X_\mu(x)\, Y_\mu(y)$$

"Fourier"-Koeffizienten a_μ müssen noch bestimmt werden

$\implies$ Verfahren meist nur für lineare partielle DGl. erfolgreich.

3. Schwingung einer rechteckigen Membran

Problemstellung: $u(t,x,y)$ = Auslenkung der Membran

① Gebiet

$$\Omega = \{(x,y,t) \mid 0<x<a,\ 0<y<b,\ t>0\}$$

② Differentialgleichung: Wellengleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} \quad \text{in } \Omega$$

③ Randbedingungen:

homogen: $u(t,0,y) = u(t,a,y) = 0$

linker und rechter Rand

$u(t,x,0) = u(t,x,b) = 0$

unterer und oberer Rand

Inhomogen: $u(0,x,y) = f(x,y)$

Anfangsauslenkung

$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = g(x,y)$

Anfangsgeschwindigkeit

Aufgabe: finde $u(t,x,y)$

Schritt 1: Zeit separieren:

$$U(t,x,y) = T(t)\, u(x,y)$$

Ableitungen:
$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T''(t)\, u(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = T(t)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = T(t)\, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Einsetzen:

$$T''(t)\, u(x,y) = T(t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Division durch $T(t)\,u(x,y)$:

$$\underbrace{\frac{T''(t)}{T(t)}}_{\text{nur } t} = -\lambda^2 = \underbrace{\frac{1}{u(x,y)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}_{\text{nur } x,y}$$

$$T''(t) = -\lambda^2 T(t)$$

$$T(t) = \begin{cases} \sin \lambda t \\ \cos \lambda t \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\lambda^2 u$$

Randbedingungen:

$$u(0,y) = u(a,y) = 0$$
$$u(x,0) = u(x,b) = 0$$

Schritt 2: x und y separieren

Ansatz: $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$
(bereits durchgeführt)

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2 = -\lambda^2 - \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Differentialgleichung für $X(x)$:

$$X''(x) = -\mu^2 X(x) \implies X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$$

mit Randbedingungen: $X(0) = X(a) = 0$

$$X(0)=0 \Downarrow A=0 \Downarrow X(x) = \sin\mu x \implies \sin\mu a = 0$$

$$\implies \mu a = k\pi,\; k\in\mathbb{Z} \implies \mu = \frac{k\pi}{a},\; k\in\mathbb{Z}$$

zulässige Werte für μ

Differentialgleichung für $Y(y)$:

$$Y''(y) = (\mu^2 - \lambda^2)\,Y(y)$$

mit Randbedingungen $Y(0) = Y(b) = 0$

$$Y(y) = \sin\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\,y \implies \sqrt{\lambda^2-\mu^2} = \frac{\ell\pi}{b}$$

Schritt 3: Zulässige Werte für λ:

$$\lambda^2 - \mu^2 = \lambda^2 - \frac{k^2\pi^2}{a^2} = \frac{\ell^2\pi^2}{b^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\lambda = \pi\sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2}}} = \lambda_{k\ell}$$

mögliche Schwingungsfrequenzen der Membran

Schritt 4: Lösung zusammensetzen

$$u(t,x,y) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} A_{k\ell} \cos \lambda_{k\ell} t \, \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b}$$
$$+ \sum_{k,\ell=1}^{\infty} B_{k\ell} \sin \lambda_{k\ell} t \, \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b}$$

Schritt 5: inhomogene Randbedingungen

$$f(x,y) = u(0,x,y) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} A_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi x}{b}$$

2D-Fourier-Koeffizienten von $f(x,y)$

$$g(x,y) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \underbrace{B_{k\ell}\lambda_{k\ell}} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi x}{b}$$

2D-Fourier-Koeffizienten von $g(x,y)$

Damit ist das Problem vollständig gelöst.

4. Koordinatensysteme, Laplace-Operator und spezielle Funktionen

- Welches Koordinatensystem?

Lösung hat funktioniert, weil das Rechteck in x-y-Koordinaten einfach zu beschreiben war $\Longrightarrow$ Koordinatensystem muss passend zum Gebiet gewählt werden!

- Welche Differentialgleichung?

Wellengleichung: $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

Laplace-Operator

Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplace-Operator in Polarkoordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

(Sturm-Liouville-Operator)

$\rightarrow$ führt auf Bessel-Differentialgleichung

Allgemein:

Eigenwertproblem $\Delta u = \lambda u$

$\downarrow$

Separation im Koordinatensystem (ξ, η)

"interessante" gewöhnliche DGl für $\Xi(\xi)$

$\downarrow$

Spezielle Funktionen für $\Xi(\xi)$

"interessante" gewöhnliche DGl für $H(\eta)$

$\downarrow$

Spezielle Funktionen für $H(\eta)$

z.B.

- Kugelkoordinaten $\longrightarrow$ Kugelfunktionen
- parabolische Koord $\longrightarrow$ parabolische Zylinderfkt.