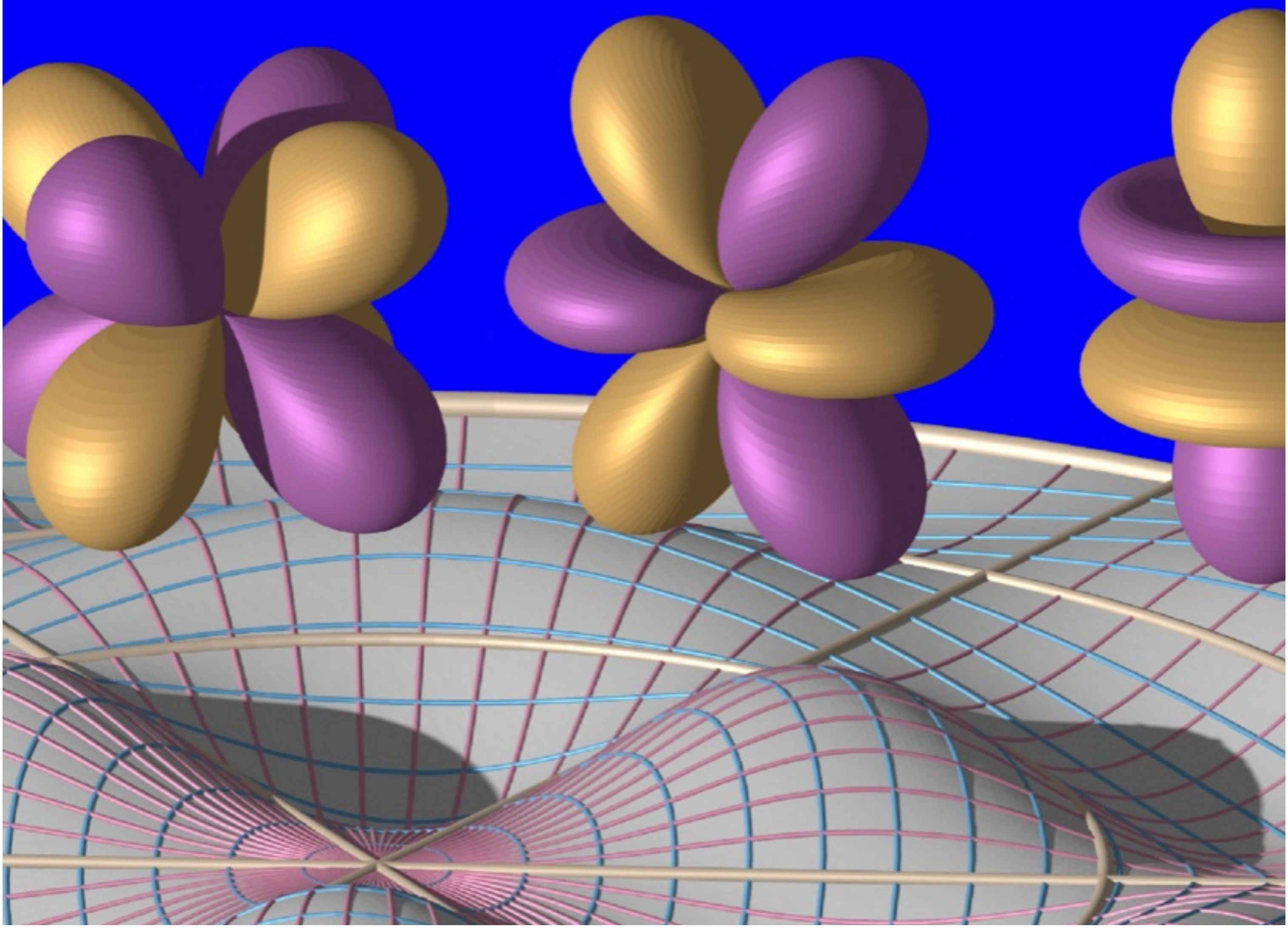
Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

5. Orthogonale Polynome



Inhalt

1. Warum orthogonal?

Lineare Algebra: Basis

$$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subset V$$

des Vektorraumes V mit einem Skalarprodukt $\langle u, v \rangle$, $u, v \in V$.

Darstellung eines Vektors v in der Basis $\mathcal{B}$ ist

$$v = \xi_1 b_1 + \dots + \xi_n b_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k \qquad (*)$$

Koordinaten ξ_i ermitteln: Gleichungssystem $(*)$ lösen.

Viel einfacher: Basis $\mathcal{B}$ orthonormiert:

Definition: Die Vektoren $b_1, \dots, b_n$ sind **orthonormiert**, wenn

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Koordinaten von v bestimmen:

$$\langle v, b_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k, b_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overbrace{\langle b_k, b_i \rangle}^{\delta_{ki}}$$

$$= \boxed{\xi_i = \langle v, b_i \rangle}$$

• Länge eines Vektors berechnen:

$$v = \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k$$

$$\Rightarrow \langle v, v\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k , \sum_{j=1}^{n} \xi_j b_j \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_k \xi_j \underbrace{\langle b_k , b_j \rangle}_{= \delta_{kj}}$$

$\Rightarrow$ nur Terme $k=j$ bleiben!

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2$$

Plancherel-Formel

• Approximation eines Vektors

$$v = \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k \approx \sum_{k=1}^{n_0} \xi_k b_k = v_0$$

mit $n_0 < n$.

Approximationsfehler:

$$\| v - v_0 \|^2 = \sum_{k=n_0+1}^{n} \xi_k^2$$

d.h. man kann die Approximation abbrechen, sobald die ξ_k "klein" geworden sind.

<u>Beispiel:</u> diskrete Fourier-Transformation

Approximation von 2π-periodischen Funktionen durch die Funktionen

$$c_k(x) = \cos(kx)$$
$$s_k(x) = \sin(kx)$$

aber nur in den $2n$ Punkten

$$x = 0, \pm \frac{l}{n}\pi \ (0<l<n), \ \pi$$

d.h. Basisvektoren sind die Vektoren (für $n=3$)

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \cos(-\frac{2}{3}\pi k) \\ \cos(-\frac{1}{3}\pi k) \\ \cos(0) \\ \cos(\frac{1}{3}\pi k) \\ \cos(\frac{2}{3}\pi k) \\ \cos(\pi k) \end{pmatrix}, \quad s_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sin(-\frac{2}{3}\pi k) \\ \sin(-\frac{1}{3}\pi k) \\ \sin(0) \\ \sin(\frac{1}{3}\pi k) \\ \sin(\frac{2}{3}\pi k) \\ \sin(\pi k) \end{pmatrix}$$

$$k = 0, 1, 2, 3 \qquad\qquad k = 1, 2$$

- orthogonal, können außerdem normiert werden (dazu müssen c_0 und c_n durch $\sqrt{2}$ geteilt werden)
- $2n$ Vektoren, bilden eine Basis

Plan:

- Begriff des Skalarproduktes auf Funktionen verallgemeinern

  $\Longrightarrow$ Integral, Cauchy-Schwarz-Ungleichung

- Orthogonale Funktionensysteme konstruieren

  $\Longrightarrow$ Fourier-Theorie
  Orthogonale Polynome

- Beliebige Funktionen durch orthogonale Funktionen darstellen

  $\Longrightarrow$ Fourier-Reihe
  Interpolation

- Anwendungen

  $\longrightarrow$ Gauss-Quadratur
  Approximation der Ableitung: 3-Term Rekursion

2. Skalarprodukt für Funktionen

Skalarprodukt in der diskreten Fourier-Analysis:

$$\langle f,g\rangle = \sum_{x\in\{0\}\cup\{\frac{\ell}{n}\pi \mid 0<\ell<n\}\cup\{\pi\}} f(x)g(x)$$

Verallgemeinerung:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Norm:

$$\|f\|^2 = \langle f,f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2\,dx$$

stimmt nur für reelle Funktionen

<u>Definition:</u> $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ komplexe Funktionen haben das Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}\,g(x)\,dx$$

und die Norm

$$\|f\|^2 = \langle f,f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2\,dx$$

Nur für Funktionen in

$$L^2([a,b]) = \left\{f:[a,b]\to\mathbb{C} \;\middle|\; \int_a^b |f(x)|^2\,dx<\infty\right\}$$

(Lebesgue-Integral)

Beispiel: Fourier-Theorie für Funktionen $[-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

Skalarprodukte der Funktionen

$$e_k : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto e^{ikx}$$

sind

$$\langle e_k, e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{ikx}}\, e^{ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} e^{ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1$$

$$\langle e_k, e_l\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} e^{ilx}\, dx \qquad k \neq l$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)x}\, dx = \left[\frac{e^{i(l-k)x}}{i(l-k)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

da e_k 2π-periodisch ist. Zusammen:

$$\langle e_k, e_l\rangle = \left\{\begin{matrix} 1 & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{matrix}\right\} = \delta_{kl}$$

$\Rightarrow$ e_k sind orthonormiert

3. Allgemeine Eigenschaften eines Skalarproduktes

<u>Satz</u> (Cauchy-Schwarz): $f, g \in L^2$

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

mit Gleichheit genau für f, g linear abhängig

Gilt für jedes reelle Skalarprodukt:

<u>Definition</u>: $\langle\, ,\, \rangle$ heisst Skalarprodukt, wenn

1. $\langle\, ,\, \rangle$ ist bilinear (d.h. "ausmultiplizieren")
2. symmetrisch: $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$
3. pos. definit: $\langle f,f\rangle \geq 0$ und $\langle f,f\rangle = 0 \Longleftrightarrow f=0$.

Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$0 \leq \|f+tg\|^2 = \langle f+tg, f+tg\rangle = \|f\|^2 + 2t\langle f,g\rangle + t^2 \underbrace{\|g\|^2}_{>0}$$

quadratische Funktion:

- Maximum für $t \to \infty$
- Minimum beim Scheitel: $t = -\dfrac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2}$

Minimaler Wert:

$$0 \leq \|f\|^2 - \cancel{2}\frac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2}\langle f,g\rangle + \frac{\langle f,g\rangle^2}{\|g\|^{\cancel{4}\,2}} \cancel{\|g\|^2}$$

Multiplikation mit $\|g\|^2$: $\langle f,g\rangle^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2$

Gleichheit: $\|f+tg\|^2 = 0 \Rightarrow f + tg = 0$ lin. abh.! $\square$

Satz: Dreiecksungleichung für die Norm

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$$

Beweis:

Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\langle f,g\rangle + \|g\|^2 \\ &\le \|f\|^2 + 2\,\|f\|\cdot\|g\| + \|g\|^2 \\ &= \left(\|f\| + \|g\|\right)^2\end{aligned}$$

Wurzel ziehen: $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ $\square$

Konsequenz: geometrische Intuition "funktioniert" bei der Approximation einer Funktion f durch f_n derart, dass $\|f_n - f\|^2 \to 0$

4. Orthogonale Funktionensysteme (OFS)

<u>Definition:</u> $f_k \in L^2, k \in \mathbb{N}$ heisst orthogonales Funktionensystem, wenn $\langle f_k, f_l \rangle = \delta_{kl}$

<u>Beispiele</u>

① $e_k(x) = e^{ikx}$ ist ein orthogonales Fkt-system in $L^2([-\pi, \pi])$

② $1, x, x^2, x^3, \ldots$ ist kein orthogonales Fkt-system in $L^2([-1,1])$, weil

$$\langle 1, x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = 0$$

③ Eigenfunktionen eines Sturm-Liouville-Operators sind ein orthogonales Fkt-System bezüglich eines Skalarproduktes, welches vom Operator abhängt.

④ Eigenfunktionen von $\Delta u = \lambda u$ sind ein orthogonales Funktionensystem

Endlichdimensionales Analogon für ③ und ④

Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix bilden eine o.n. Basis.

Approximation durch OFS:

$$f \approx \sum_{k=0}^{n} \langle f_k , f \rangle f_k$$

<u>Frage:</u> $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \langle f_k, f\rangle f_k \overset{?}{=} f$

<u>Definition:</u> Ein OFS heisst vollständig, wenn

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f_k ,f\rangle f_k$$

für jede Funktion $f \in L^2$.

<u>Beispiel:</u> $e_k(x) = e^{ikx}$ ist vollständig, d.h. jede 2π-periodische Funktion kann durch eine konvergente Fourier-Reihe approximiert werden:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx$$

<u>Satz:</u> Für ein vollständiges OFS $f_0, f_1, f_2, \dots$ und

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f_k,f\rangle f_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k$$

Fourier-Koef.

gilt die Plancherel-Formel

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|^2$$

5. Orthogonale Polynome

Monome $1, x, x^2, x^3, x^4, \dots$ bilden ein vollständiges Funktionensystem:

Satz (Weierstrass): Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kann beliebig genau durch Polynome approximiert werden

Aber: Monome sind nicht orthogonal

$\Longrightarrow$ Polynomkoeffizienten sind nicht so einfach zu bestimmen.

Aufgabe: Finde Polynome $p_0(x), p_1(x), \dots, p_k(x)$ vom Grad $\deg p_k(x) = k$, die orthogonal sind.

Lösung: Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

(funktioniert für beliebige Vektoren mit $\langle\, ,\rangle$)

$$a_1 \longmapsto b_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$$ ← normiert

$$a_2 \longmapsto b_2 = \frac{a_2 - \langle b_1, a_2\rangle b_1}{\|a_2 - \langle b_1, a_2\rangle b_1\|}$$ ← normiert

$$a_3 \longmapsto b_3 = \frac{a_3 - \langle b_1, a_3\rangle b_1 - \langle b_2, a_3\rangle b_2}{\|a_3 - \langle b_1, a_3\rangle b_1 - \langle b_2, a_3\rangle b_2\|}$$ ← normiert

$$a_k \longmapsto b_k = \frac{a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle b_i, a_k \rangle b_i}{\left\| a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle b_i, a_k \rangle b_i \right\|}$$ normiert

orthogonale Projektion von a_k auf die bereits gefundenen Vektoren $b_1, \ldots, b_{k-1}$ subtrahieren.

Beispiel: Legendre-Polynome, $\langle f,g \rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$

$$a_0(x) = 1 \longmapsto \|1\| = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1^2\,dx = 1 \Rightarrow b_0(x) = 1$$

$$a_1(x) = x: \quad \langle b_0, a_1 \rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{1 \cdot x}_{\text{ungerade}}\,dx = 0$$

$$\|a_1 - \langle b_0, a_1 \rangle b_0\|^2 = \|a_1\|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \Longrightarrow b_1(x) = \sqrt{3}\,x$$

$$a_2(x) = x^2: \quad \langle b_0, a_2 \rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$\langle b_1, a_2 \rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{x \cdot x^3}_{\text{ungerade}}\,dx = 0$$

$$a_2 - \langle b_0, a_2 \rangle b_0 - \langle b_1, a_2 \rangle b_1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \ldots = \frac{4}{45} \Rightarrow b_2(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2 - 1)$$

Oft wird eine alternative Normierung für die Polynome verwendet:

<u>Definition:</u> Legendre-Polynome $P_n(x)$ sind bezüglich

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

orthogonale Polynome vom Grad $\deg P_n(x) = n$ mit $P_n(1) = 1$

Lösung:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{8}(5x^3-3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$
$$\vdots$$

Alternative Skalarprodukte:

<u>Definition:</u> $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $w(x) \geq 0$ definiert ein Skalarprodukt:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\underbrace{w(x)}_{\text{Gewichtsfunktion}}\,dx$$

Je nach Wahl von $w(x)$ entsteht eine andere Familie von orthogonalen Polynomen.

6. Anwendung: Gauss-Quadratur

Idee: ① Funktion $f(x)$ auf $[-1,1]$ durch Polynom $p(x)$ approximieren

② Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \int_{-1}^{1} p(x)\,dx$$

Problem: Welche Approximation soll man wählen?

Antwort: Interpolationspolynom mit Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$, d.h.

$$p(x_i) = f(x_i)$$

Problem: Integralberechnung?

Antwort:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i$$

Bestimme A_i als Integral eines Polynoms q_i mit $q_i(x_j) = \delta_{ij}$

Problem: Welche Stützstellen wählen?

Antwort: Nullstellen der Legendre Polynome

Warum: Satz von Gauss im Skript ...