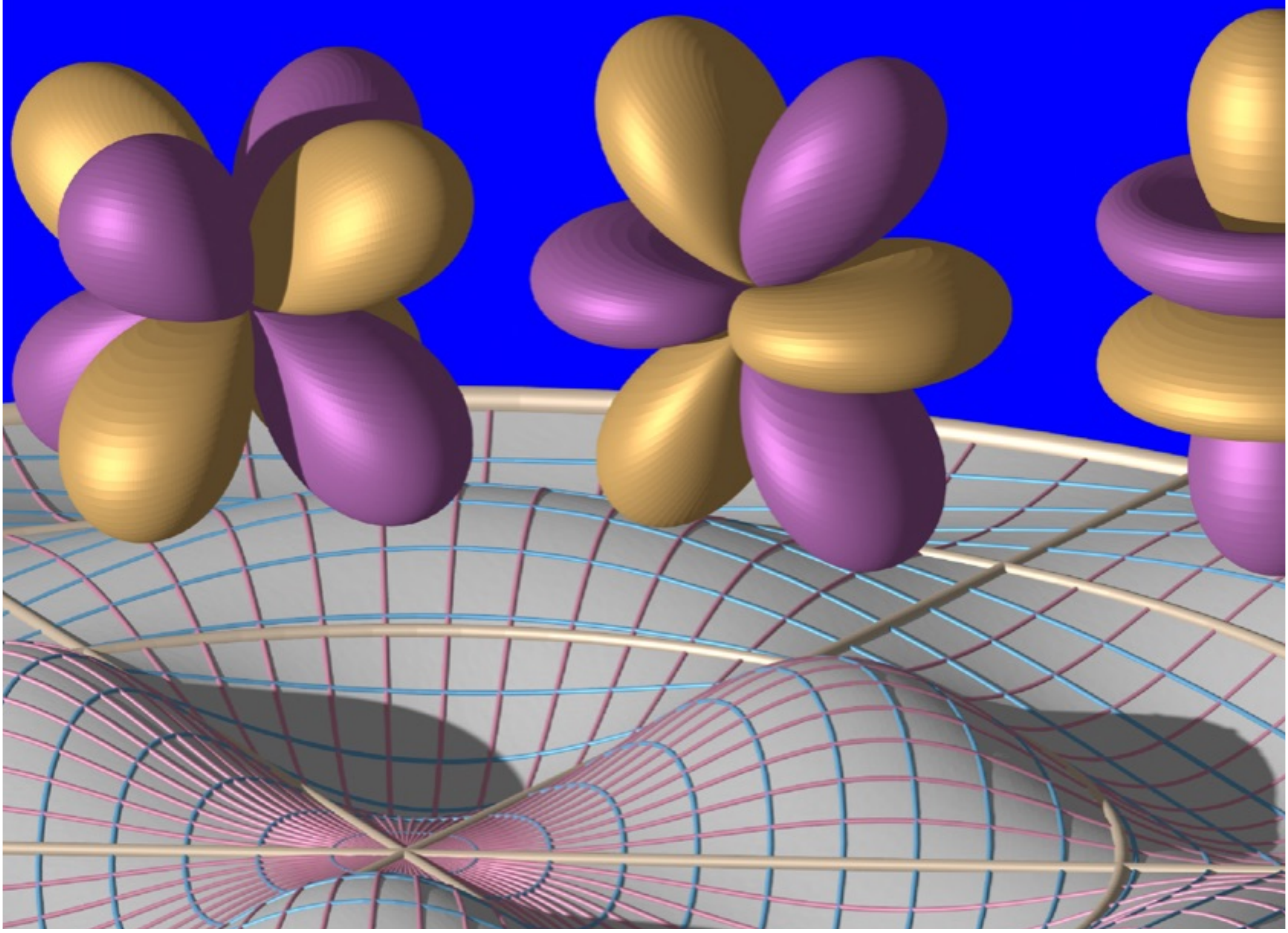
Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

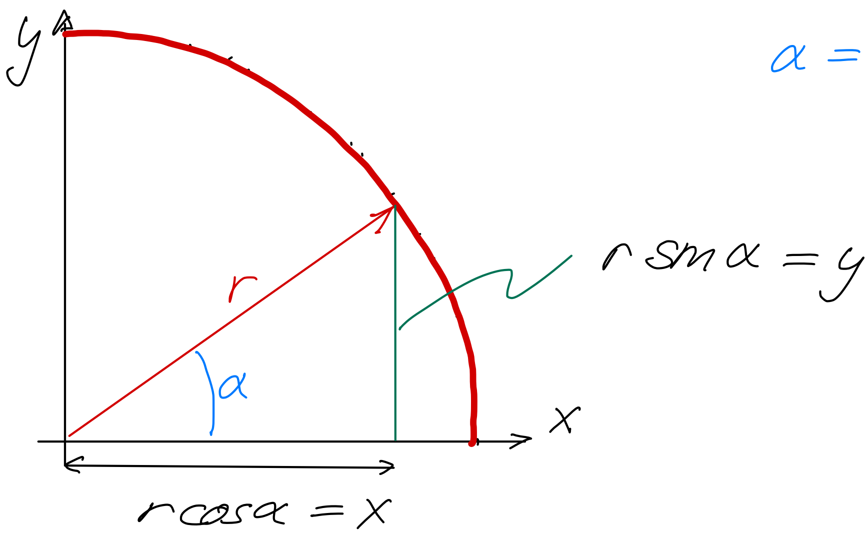
6. Elliptische Funktionen



Inhalt

1. Wozu sind trigonometrische Funktionen gut?

a) Dreiecksberechnung



α = Bogenlänge auf dem Einheitskreis

b) Bogenlänge auf einem Kreis

Aus $y = r\sin\alpha$ folgt $\sin\alpha = \frac{y}{r}$

$$\alpha = \arcsin\frac{y}{r}$$

Parametrisierung des Bogens

$$x(t) = \sqrt{1-t^2} \qquad \dot{x}(t) = -t/\sqrt{1-t^2}$$
$$y(t) = t \qquad \dot{y}(t) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = t^2/(1-t^2) + 1 = 1/\,1-t^2$$

$$\alpha = \int_0^{y/r} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin\frac{y}{r} \qquad (*)$$

c) Integrale von $R(t, \sqrt{at^2+bt+c})$

$R(t,q)$ eine rationale Funktion in t und q, d.h. ein Bruch von Polynomen in t und q.
Es gilt

$$q(t) = \sqrt{at^2+bt+c} \implies q(t)^2 \in \mathbb{R}[t]$$

d.h. $R(t,q)$ kann immer in die Form

$$R(t,q) = \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} + \frac{\omega_3(t)}{\omega_4(t)\,q}$$

gebracht werden. Mit der Partialbruchzerlegung kann das Integral von ω_1/ω_2 berechnet werden und jedes von $\omega_3/\omega_4 q$ kann zurückgeführt werden auf Integrale

$$\int \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{at^2+bt+c}}$$

wovon (*) ein Spezialfall ist. Beispiel:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+bx+c}} = \arcsin \frac{x-b/2}{m} + C$$

mit $m^2 = c + \frac{b^2}{4}$.

d) Differentialgleichungen der Form

$$(y')^2 = ay^2 + by + c$$

Substitutionen:

① $x \to \sqrt{a}\,x = X$, $(y')^2 = y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}$

② quadratisches ergänzen

$$y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a} = \left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

$$= \underbrace{\left(y + \frac{b}{2a}\right)}_{Y}{}^2 - \underbrace{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}_{A^2}$$

$$\Longrightarrow Y' = \sqrt{Y^2 - A^2}$$

Separation:

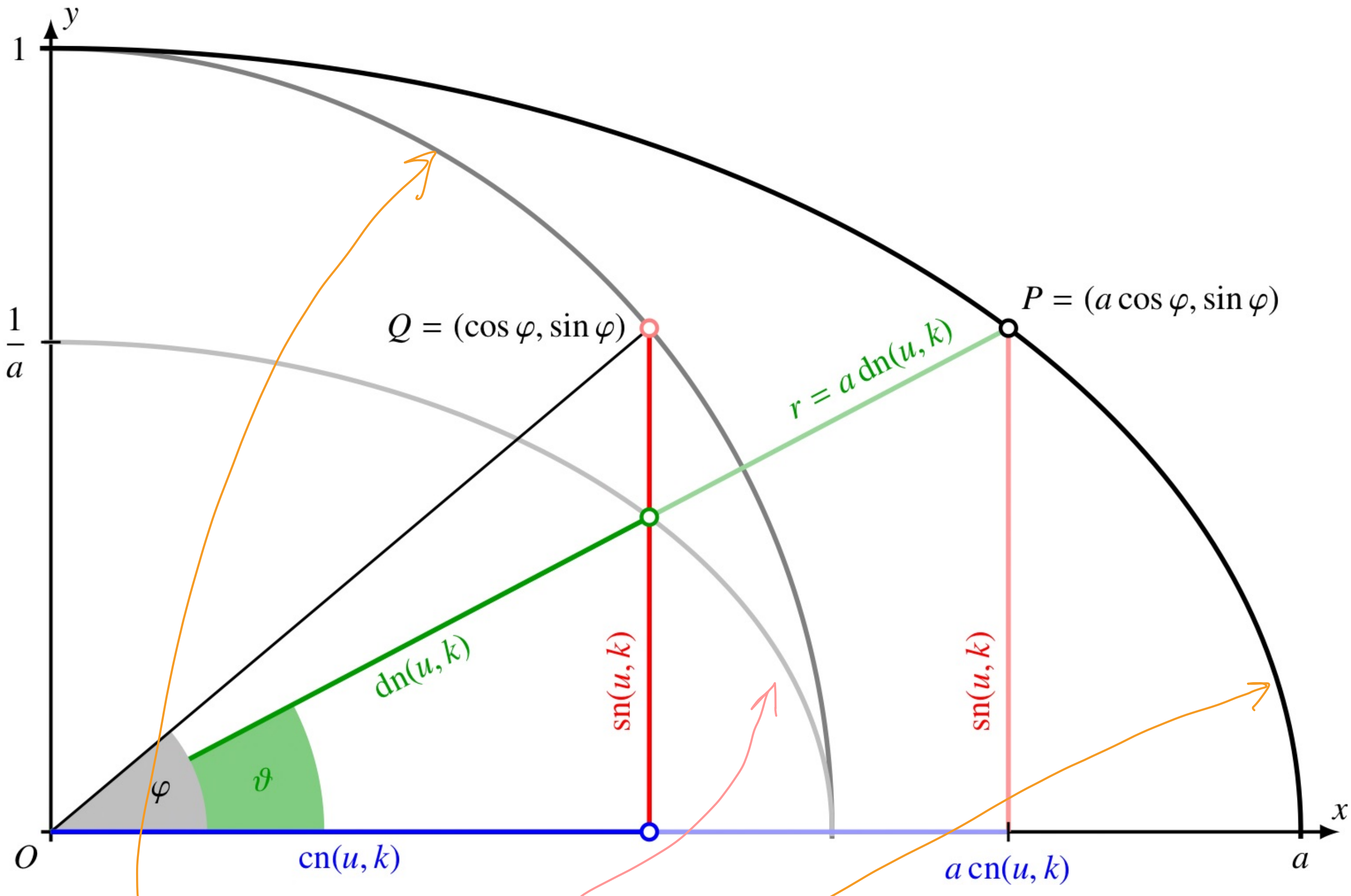
$$\int \frac{dY}{\sqrt{Y^2 - A^2}} = X + C$$

Verallgemeinerungen?

- Kreis $\longrightarrow$ Ellipse?
- Integrale von $R(t, \sqrt{at^3 + bt^2 + ct + d})$ und $R(t, \sqrt{at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e})$?
- Differentialgleichungen der Form

$$y'' = \sqrt{p(y)} \quad p \in \mathbb{R}[r] \text{ Grad } 3/4$$

2. Jacobische elliptische Fkt als Trigonometrie



Einheitskreis ⟶ Ellipse mit Halbachse $a, 1$

oder Ellipse mit Halbachse $1, \frac{1}{a}$

Punkt $Q = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ Punkt $Q = (a\cos\varphi, \sin\varphi)$

→ Punkte der Ellipse werden weiterhin mit sin und cos beschrieben!

Aber: wir wählen einen anderen Parameter u als φ als Argument, dies ergibt "bessere" Ableitungen

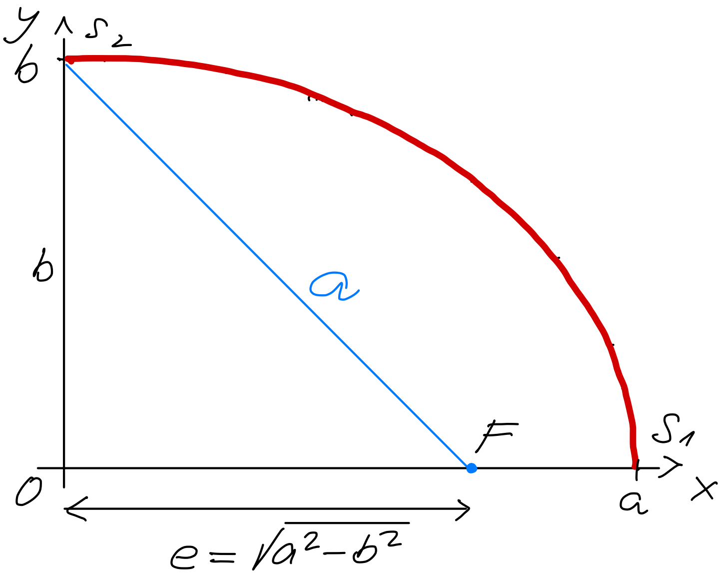
Definition: Die lineare Exzentrizität einer Ellipse mit Halbachsen a, b ist

$$e^2 = a^2 - b^2$$

Die numerische Exzentrizität ist $\varepsilon = \frac{e}{a}$

Grenzfälle:

- $e = 0, \varepsilon = 0$: $a = b \Longrightarrow$ Kreis
- $e = a, \varepsilon = 1$: $b = 0 \Longrightarrow$ "Strecke"



ε = "Anteil der Strecke OF an der Strecke OS zum Scheitel"

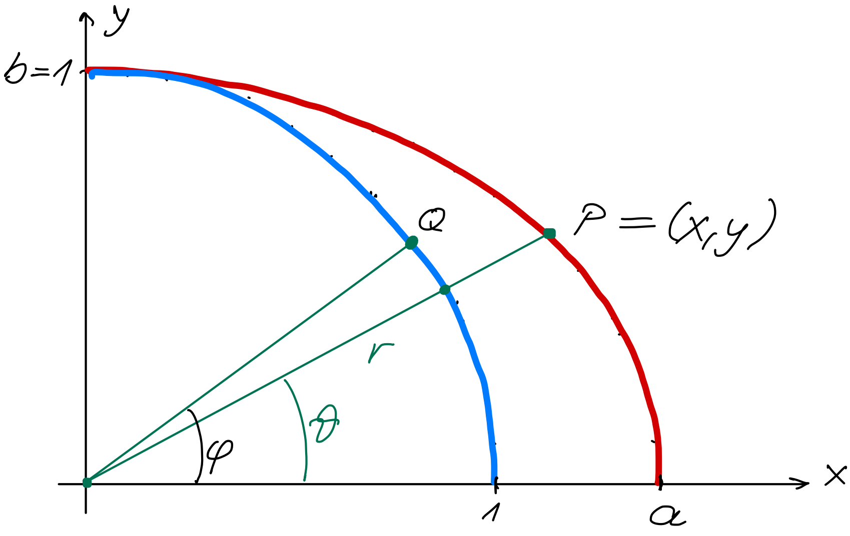
= "Formparameter"

Elliptische Funktionen brauchen einen Formparameter.

Definition: Formparameter k der elliptischen Funktionen: $k = \varepsilon = \sqrt{a^2-1}/a$.

Zusätzlich: $k' = \sqrt{1-k^2} \iff k^2 + k'^2 = 1$.

$$k^2 = \frac{a^2-1}{a^2} = 1 - \frac{1}{a^2}$$



Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 \quad (*)$

Radius: $x^2 + y^2 = r^2 \quad (*)$

$Q = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ $\qquad$ $P = (x = a\cos\varphi,\ y = \sin\varphi)$

<u>Definition</u>: Jacobische elliptische Funktionen:

$$\mathrm{sn}(u,k) = y, \quad \mathrm{cn}(u,k) = \frac{x}{a}, \quad \mathrm{dn}(u,k) = \frac{r}{a}$$

(u wird später definiert)

Grundlegende Identitäten:

$$\mathrm{cn}(u,k)^2 + \mathrm{sn}(u,k)^2 = 1 \quad \text{aus } (*)$$

$$\mathrm{dn}(u,k)^2 + k^2\,\mathrm{sn}(u,k)^2 = 1$$

Beweis: $x^2 + y^2 = r^2 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \underbrace{\frac{r^2}{a^2}}$

$$\mathrm{cn}(u,k)^2 + \frac{\mathrm{sn}(u,k)^2}{a^2} = \mathrm{dn}(u,k)^2$$

$$\Longrightarrow 1 - \mathrm{sn}(u,k)^2 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}_{k^2} = \mathrm{dn}(u,k)^2$$

$$\Longrightarrow 1 = \mathrm{dn}(u,k)^2 + k^2\,\mathrm{sn}(u,k)^2 \qquad \square$$

$$dn(u,k)^2 - k^2 cn(u,k)^2 = k'^2$$

Beweis: $dn(u,k)^2 - k^2(1-sn(u,k))^2$

$= dn(u,k)^2 - k^2 + k^2 sn(u,k)^2$

$= 1 - k^2 = k'^2$ $\square$

Diese Relationen können dazu verwendet werden, jede Jacobische elliptische Funktion durch jede andere auszudrücken:

	$sn(u,k)$	$cn(u,k)$	$dn(u,k)$
$sn(u,k)$	$sn(u,k)$	$\sqrt{1-cn(u,k)^2}$	$\frac{1}{k}\sqrt{1-dn(u,k)^2}$
$cn(u,k)$	$\sqrt{1-sn(u,k)^2}$	$cn(u,k)$	$\frac{1}{k}\sqrt{dn(u,k)^2-k'^2}$
$dn(u,k)$	$\sqrt{1-k'^2 sn(u,k)^2}$	$\sqrt{k'^2+k^2 cn(u,k)^2}$	$dn(u,k)$

(analog zu trigonometrischen Funktionen)

3. Parameter u und Ableitung

Ziel: Parameter u (statt φ) so wählen, dass "einfache" Ableitungsformeln entstehen, damit $sn(u,k)$, $cn(u,k)$ und $dn(u,k)$ Lösungsfunktionen "interessanter" DGl werden

$$\tan\vartheta = \frac{y}{x} \qquad \vartheta = \arctan\frac{y}{x}$$

Ableitungen nach φ:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \cos\varphi = \frac{x}{a} = cn(u,k)$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}a\cos\varphi = -a\sin\varphi = -a\,sn(u,k)$$

Ableitungen der Jacobischen elliptischen Funktionen nach φ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi}sn(u,k) &= cn(u,k)\\ \frac{d}{d\varphi}cn(u,k) &= -sn(u,k)\end{aligned}\right\}$$ wie bei sin/cos!

$$\frac{d}{d\varphi}dn(u,k) = \frac{1}{a}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{a}\frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{d\varphi} = \ldots \left(\text{längere Rechnung}\right)\ldots$$

$$= -k^2\,\frac{cn(u,k)\,sn(u,k)}{dn(u,k)}$$ nicht einfach!

Man muss u so wählen, dass der "hässliche" Nenner verschwindet, dazu sind möglicherweise Kompromisse bei sn und dn nötig!

Kettenregel: $\frac{d}{du} zn = \frac{d}{d\varphi} zn \cdot \frac{d\varphi}{du}$

$$\frac{d}{du} sn(u,k) = cn(u,k) \cdot \frac{d\varphi}{du}$$

$$\frac{d}{du} cn(u,k) = -sn(u,k) \frac{d\varphi}{du}$$

$$\frac{d}{du} dn(u,k) = -k^2 \frac{cn(u,k)\, sn(u,k)}{dn(u,k)} \frac{d\varphi}{du}$$

Man kann den Nenner los werden, wenn man u so wählt, dass

$$\frac{d\varphi}{du} = dn(u,k),$$

dann werden die Ableitungsformeln:

$$\frac{d}{du} sn(u,k) = cn(u,k)\, dn(u,k)$$

Kompromiss

$$\frac{d}{du} cn(u,k) = -sn(u,k)\, dn(u,k)$$

$$\frac{d}{du} dn(u,k) = -k^2\, cn(u,k)\, sn(u,k)$$

kein Nenner mehr!

Berechnung von u: P der Punkt auf der Ellipse:

$$u(P) = \int_0^P r \, d\vartheta$$

(Beweis im Buch)

4. Nichtlineare Differentialgleichungen

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{sn}(u,k) = \mathrm{cn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k)$$

$$\left(\frac{d}{du}\,\mathrm{sn}(u,k)\right)^2 = \left(1-\mathrm{sn}(u,k)^2\right)\left(1-k'^2\,\mathrm{sn}(u,k)^2\right)$$

d.h. $y(u) = \mathrm{sn}(u,k)$ ist Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung

$$(y')^2 = (1-y^2)(1-k'^2y^2) \qquad (*)$$

<u>Separation:</u>

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}} = u + C$$

<u>Folgerung:</u> die Umkehrfunktion von $u \longmapsto \mathrm{sn}(u,k)$ ist ein sog. elliptisches Integral.

Die anderen Jacobischen elliptischen Funktionen ergeben ähnliche DGl:

$$\mathrm{cn}: \quad y'^2 = (1-y^2)(k'^2+k^2y^2)$$

$$\mathrm{dn}: \quad y'^2 = (1-y^2)(y^2-k'^2)$$

5. Rationale Jacobische elliptische Funktionen

Trigonometrische Funktionen:

2 grundlegende Funktionen: $\sin\varphi$, $\cos\varphi$

4 rationale Funktionen:

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \qquad \cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi} \qquad \csc\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}$$

total
$2+4=6$
Funktionen

Jacobische elliptische Funktionen:

3 grundlegende Funktionen:

$$\mathrm{sn}(u,k), \quad \mathrm{cn}(u,k), \quad \mathrm{dn}(u,k)$$

9 rationale Funktionen:

3 Reziproke:

$$\mathrm{ns}(u,k) = \frac{1}{\mathrm{sn}(u,k)}, \quad \mathrm{nc}(u,k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(u,k)}, \quad \mathrm{nd}(u,k) = \frac{1}{\mathrm{dn}(u,k)}$$

6 Quotienten:

$$\mathrm{sc}(u,k) = \frac{\mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{cn}(u,k)} \qquad \mathrm{sd}(u,k) = \frac{\mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{dn}(u,k)}$$

$$\mathrm{cs}(u,k) = \frac{\mathrm{cn}(u,k)}{\mathrm{sn}(u,k)} \qquad \mathrm{cd}(u,k) = \frac{\mathrm{cn}(u,k)}{\mathrm{dn}(u,k)}$$

$$\mathrm{ds}(u,k) = \frac{\mathrm{dn}(u,k)}{\mathrm{sn}(u,k)} \qquad \mathrm{dc}(u,k) = \frac{d(u,k)}{c(u,k)}$$

$\Longrightarrow$ total $3+9=12$ elliptische Funktionen

Algebraische Relationen

Eine elliptische Fkt kann durch jede andere elliptische Fkt ausgedrückt werden, z.B.

$$sc(u,k) = \frac{\sqrt{1 - cd(u,k)^2}}{k' \, cd(u,k)}$$

Ableitungsformeln

9 zusätzliche Formeln der Art:

$$\frac{d}{du} sc(u,k) = \boxed{dc(u,k)\, nc(u,k)}$$

d.h. alle sind von der Form

$$\frac{d}{du} pq(u,k) = \text{Produkt von 2 ell. Fkt.}$$

Stammfunktionen

z.B. $\int ds(u,k)\, du = \log(ns(u,k) - cs(u,k))$

Differentialgleichungen

Alle von der Form:

$$(y')^2 = \boxed{(\alpha + \beta y^2)(\gamma + \delta y^2)}$$

zwei Faktoren von den zwei Faktoren in den Ableitungsformeln.

Integrale

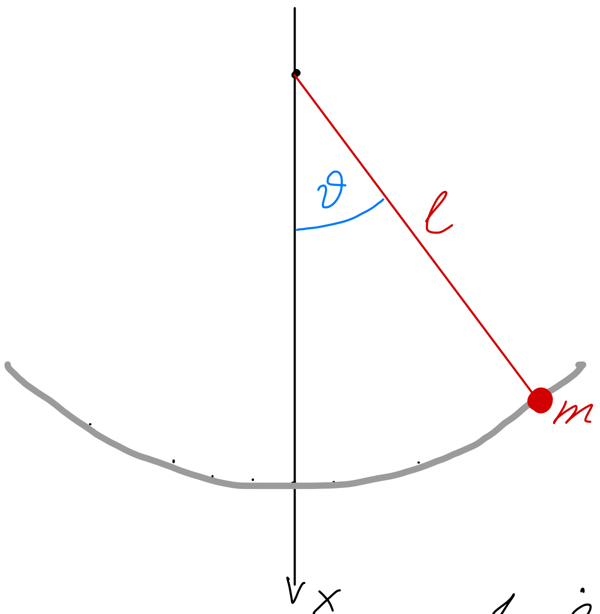
Durch geeignete Substitution kann man jedes Integral der Form

$$\int R\left(u, \sqrt{\alpha_4 u^4 + \alpha_3 u^3 + \alpha_2 u^2 + \alpha_1 u + \alpha_0}\right) du$$

$$\int R\left(u, \sqrt{\beta_3 u^3 + \beta_2 u^2 + \beta_1 u + \beta_0}\right) du$$

durch Inverse von elliptischen Funktionen ausdrücken (elliptische Integrale)

6. Anwendung: Pendel



• kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 m l^2$$

• potentielle Energie

$$E_{pot} = mgl(1-\cos\vartheta)$$

• Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 \cancel{m} l^{\cancel{2}} + \cancel{mg}\cancel{l}(1-\cos\vartheta) = E$$

$$\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 = -\frac{g}{l}(1-\cos\vartheta) + \frac{E}{ml}$$

d.h. Pendel ist beschrieben durch eine nichtlineare Differentialgleichung.

<u>Substitution</u>: ① $y = \sin\frac{\vartheta}{2}$

$$\Rightarrow 1-y^2 = \cos^2\frac{\vartheta}{2}$$

$$\cos\vartheta = 1-2\sin^2\frac{\vartheta}{2} = 1-2y^2$$

$$\Rightarrow 1-\cos\vartheta = 2y^2$$

② $\dot{y} = \frac{1}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cdot\dot{\vartheta} \Rightarrow 2\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2\cdot(1-y^2)$

$$2\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2(1-y^2) = (1-y^2)\left(\frac{E}{ml} - \frac{2g}{l}y^2\right)$$

Das Pendel hat damit eine DGl der Form

$$\dot{y}^2 = (1-y^2)\left(\frac{2E}{ml} - \frac{4g}{l}y^2\right)$$
$$= (1-y^2)\left(1 - \frac{2gm}{E}y^2\right)\frac{2E}{ml}$$

$\Longrightarrow$ Lösung mit elliptischen Funktionen.