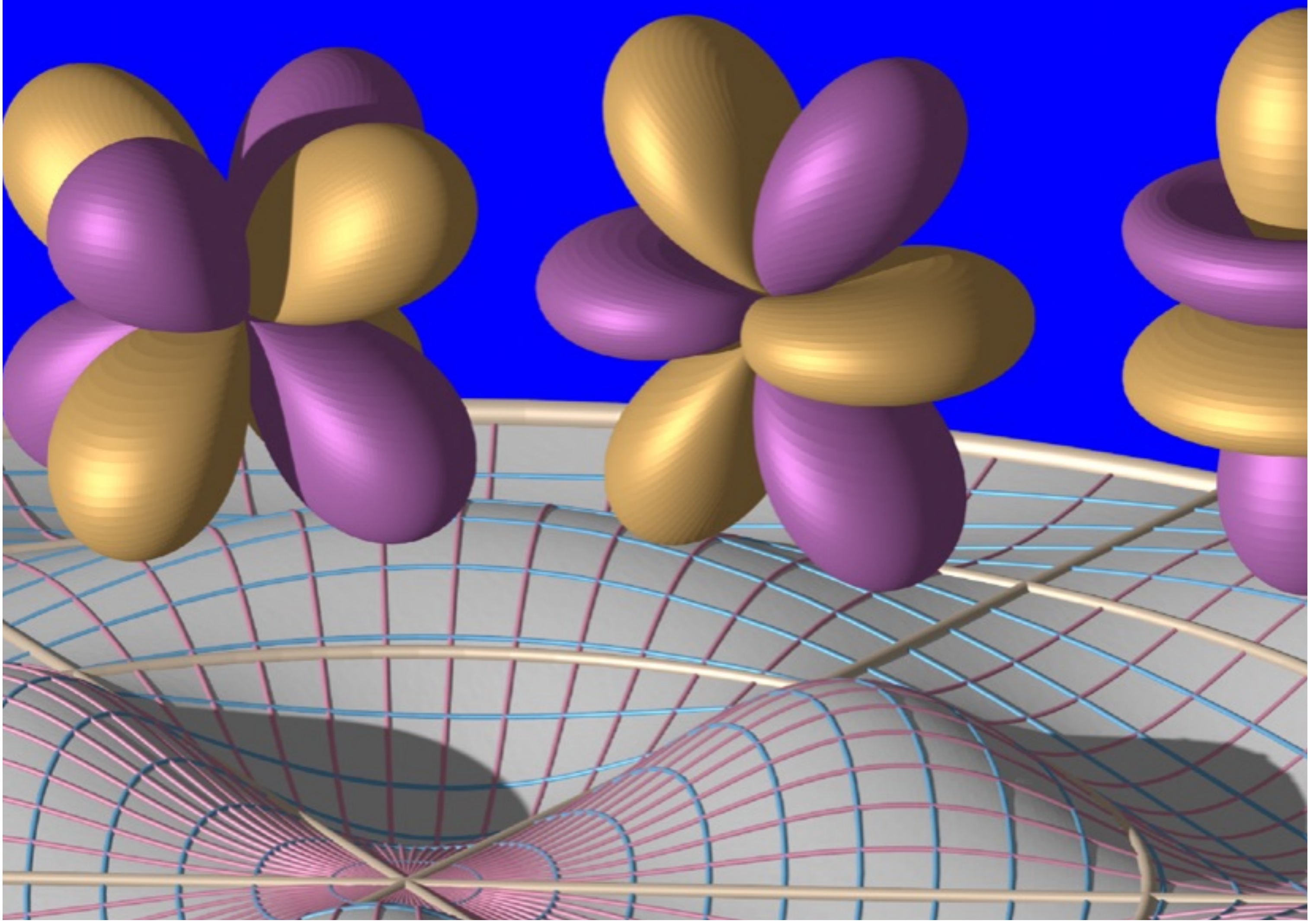
Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

7. Komplexe Funktionen



Inhalt

1. Ableitung und CR-Differentialgleichung 3
2. Potenzreihen + Ableitung 7
3. Wegintegrale 10
4. Cauchy-Integralsatz 12
5. Diffbar $\Longrightarrow$ analytisch 14

1. Ableitung und Cauchy-Riemann-DGl

Ableitung einer reellen Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$: beste lineare Approximation:

$$(*) \quad f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{} \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

"klein"

Steigung beschreibt lokales Verhalten vollständig

$\Rightarrow$ $\exists$ eine reelle Zahl, die die lineare Approximation vollständig beschreibt.

Berechnung mit Grenzwert:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Wie verallgemeinert man dies auf komplexe Funktionen?

① (*) soll erhalten bleiben, da dies die Basis vieler Rechenregeln

② Regeln wie $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$,

$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ ...

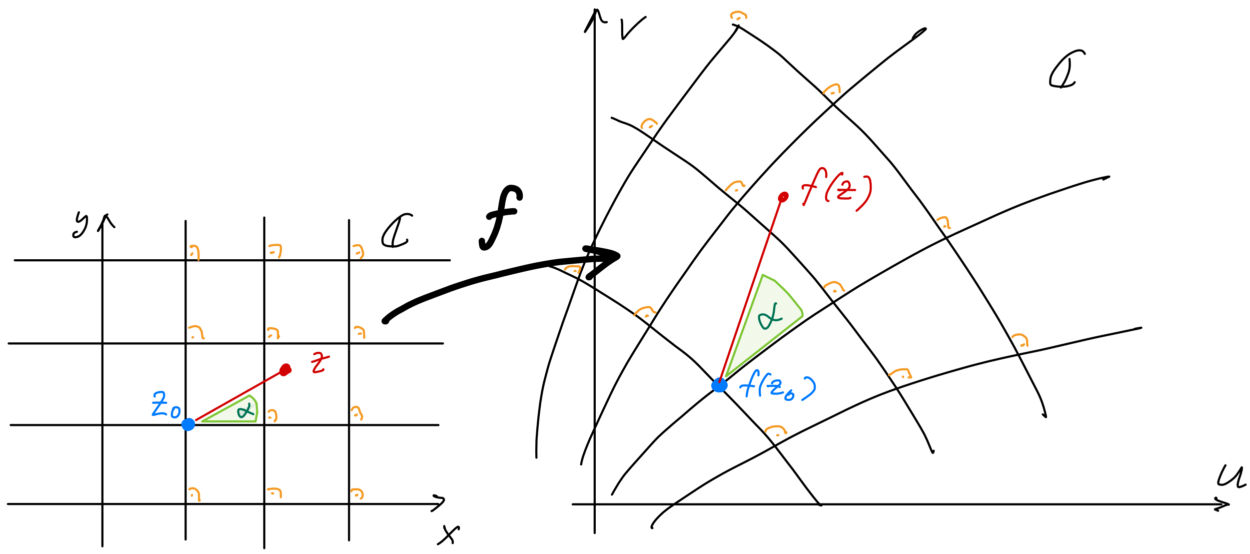
Definition: Eine komplexe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heisst differenzierbar im Punkt z_0, wenn es eine Zahl $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

Geometrische Interpretation:

$z_0 \longmapsto f(z_0)$ Translation

$z - z_0 \longmapsto f'(z) \cdot (z - z_0)$ Drehstreckung



Reelle Schreibweise: $f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

hat 4 mögliche Ableitungen:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{aber } f'(z_0) = \underbrace{\operatorname{Re} f'(z_0) + i \operatorname{Im} f'(z_0)}_{\text{nur 2 Zahlen!}}$$

$$4 \neq 2$$

2 spezielle Berechnungsmöglichkeiten:

$z - z_0$ reell: Imaginärteil y bleibt konstant

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y_0) - v(x_0,y_0))}{x - x_0}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0}} + i \underbrace{\lim \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0}}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$z - z_0$ imaginär: Realteil x bleibt konstant

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0+iy) - f(x_0+iy_0)}{i(y - y_0)} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Da es nur eine komplexe Ableitung gibt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \wedge \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen lösen das "Dimensions-Paradoxon" auf

4 partielle Ableitungen − 2 Bedingungen (CR-DGl) = 2 Komponenten von $f'(z_0)$

Beispiele:

① $f(z) = z \qquad u(x,y) = x, \; v(x,y) = y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Longrightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

② $f(z) = \bar{z} \Longrightarrow u(x,y) = x, \; v(x,y) = -y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \Rightarrow \text{nicht diffbar!}$$

Rechenregeln aus dem reelle bleiben erhalten:

Produktregel: $(fg)' = f'g + fg'$

Kettenregel: $\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z))\, g'(z)$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

2. Potenzreihen + Ableitung

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heisst analytisch in $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn f eine konvergente Potenzreihe um z_0 hat:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Beispiel: geometrische Reihe:

$$1 + z + z^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} = f(z)$$

d.h. $1/(1-z)$ ist analytisch, $a_k = 1$ $\forall k$

Konvergenzbedingungen / Konvergenzradius ρ:
Reihe konvergent für $|z - z_0| < \rho$.

Beispiel: geom Reihe konvergiert für $|z-0| < 1 \Rightarrow \rho = 1$

① $$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Beispiel: $\frac{1}{\rho} = \limsup 1 = 1 \Rightarrow \rho = 1$

② Falls a_k / a_{k+1} definiert und der Grenzwert existiert

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

Folgerung: analytische Funktionen sind komplex differenzierbar und

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = f'(z)$$

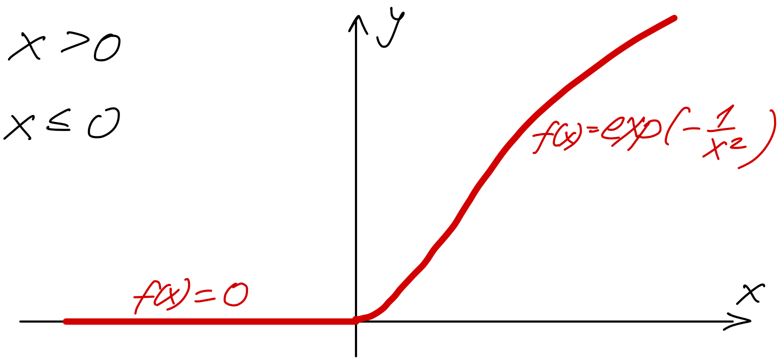
Umgekehrt: zu jeder beliebig oft diff'baren Funktion gibt es die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

Für analytische Funktionen konvergiert die Taylor-Reihe gegen die Funktion

Reelles Gegenbeispiel: Die reelle Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



ist beliebig oft diffbar. Die Taylor-Reihe ist wegen $f^{(k)}(0)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

Sie konvergiert, aber nicht gegen $f(x)$!

Beispiel: $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

$$\frac{d}{dz} e^z = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = e^z$$

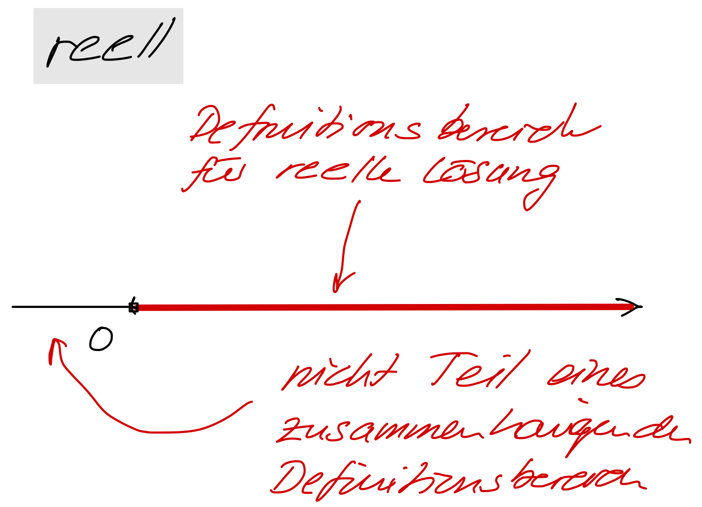
Lösungen von Differentialgleichungen mit analytische Koeffizienten, die mit der Potenzreihenmethode gefunden worden sind, sind auch komplex diffbare Lösungen einer komplexen Differentialgleichung.

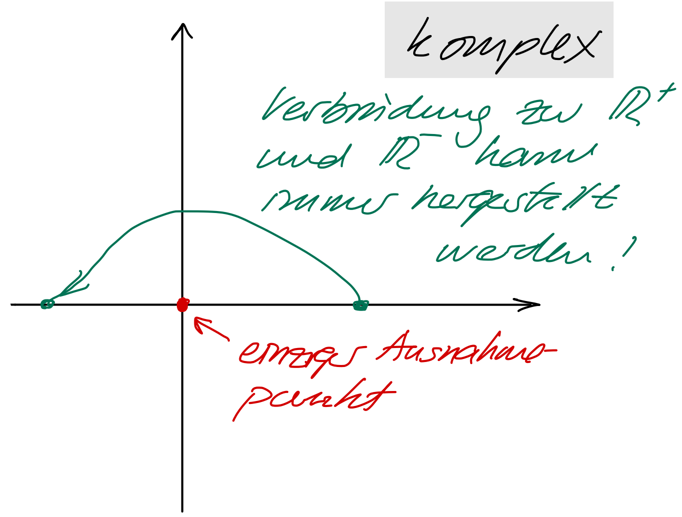
Beispiel:

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

ist komplex diffbare Lösung der komplexen Diff-Gleichung

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2-n^2)y = 0.$$





3. Wegintegrale

Definition: Ein Weg in $\mathbb{C}$ ist eine Funktion

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto \gamma(t)$$

Definition: Wegintegral einer komplexen Funktion:

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\,dt$$

Beispiel: $[a,b] = [0,1] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C} : t \mapsto tw = \gamma(t)$ ein Weg von 0 nach w, $\dot{\gamma}(t) = w$ und $f(z) = z^n$

$$\int_\gamma z^n\,dz = \int_0^1 (wt)^n\, w\,dt$$

$$= w^{n+1} \underbrace{\int_0^1 t^n\,dt}_{\text{reelles Integral}} = \frac{w^{n+1}}{n+1}$$

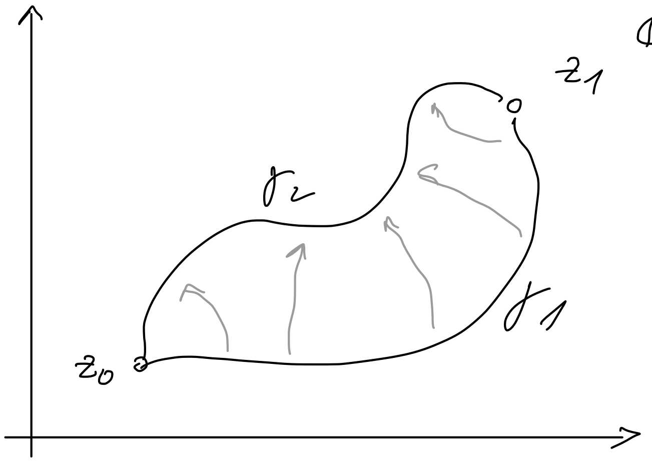
Satz (Hauptsatz der Infinitesimalrechnung): F eine Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$, γ ein Weg von z_0 nach z_1, dann gilt

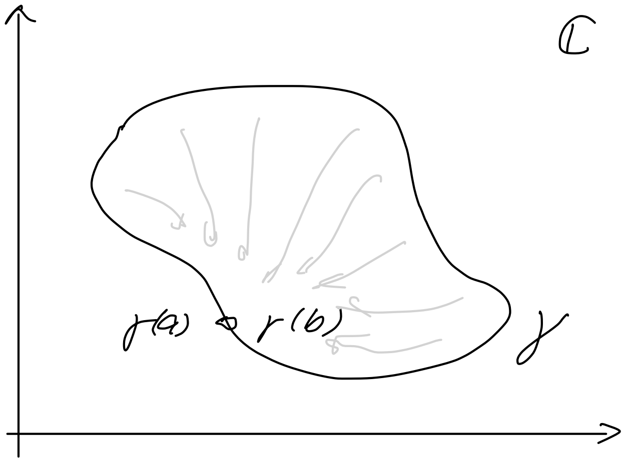
$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

Insbesondere: Der Weg spielt keine Rolle!

Satz (Deformation von Wegen): Wenn ein Weg γ_1 in γ_2 deformiert werden kann, ohne dass sich die Endpunkte bewegen, dann gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$





Satz (Integrale über geschlossene Pfade)
γ ein geschlossener Weg, $\gamma(a)=\gamma(b)$, dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Beweis: Weg auf einen Punkt zusammenziehen

Beispiel: $f(z)=z^n$, $n>0$, $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} e^{nit}\cdot i e^{it}\,dt = \left[\frac{i e^{i(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Diese Aussagen sind falsch, wenn sich Wege im Def.-Bereich der Funktion nicht zusammenziehen lassen.

4. Cauchy-Integralsatz

Satz: γ ein geschlossener Weg, der den Punkt z_0 umschliesst, $f(z)$ diffbar in einer Umgebung von z_0, dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Spezialfall: $f(z)=1$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{re^{it}}} \cdot \cancel{r} i \cancel{e^{it}}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - z_0} = 1 = f(z_0)$$

Beweis:

$$\frac{f(z)}{z-z_0} = \underbrace{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}_{\text{konvergiert} \to h(z)} + \frac{f(z_0)}{z-z_0} = h(z) + \frac{f(z_0)}{z-z_0}$$

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \underbrace{\oint_\gamma h(z)\, dz}_{=0} + f(z_0) \underbrace{\oint_\gamma \frac{dz}{z-z_0}}_{2\pi i}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = f(z_0)$$

Werte auf einer Kurve legen alle Werte im Innern fest!

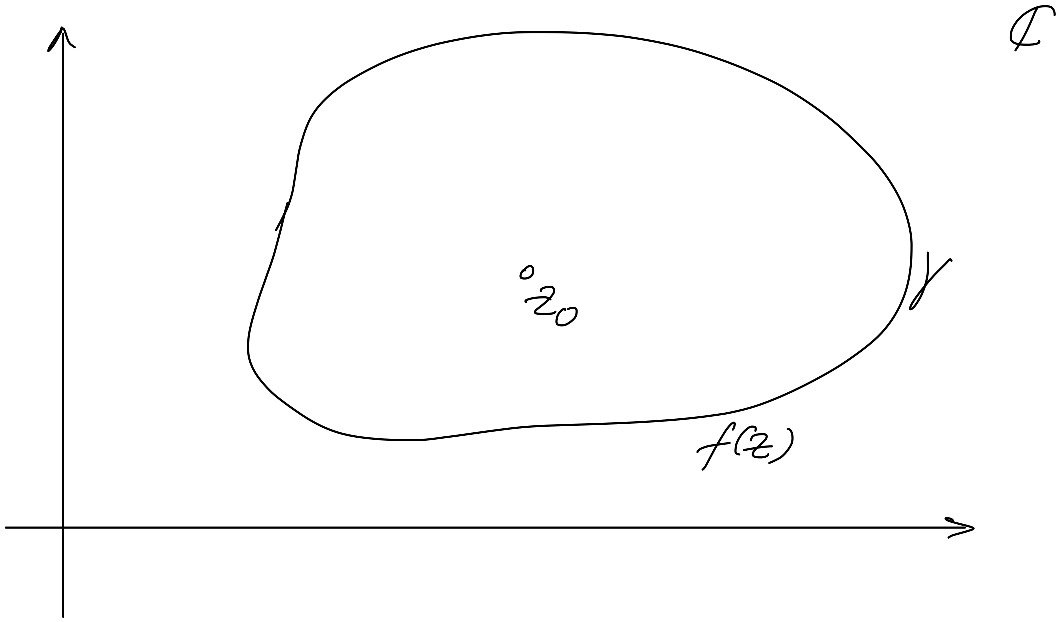
Satz (Ableitungen): f komplex diffbar:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$$

wenn γ den Punkt z_0 umschliesst.

Differenzierbare komplexe Funktionen sind automatisch beliebig oft differenzierbar!

Reelle Funktionen: es gibt reelle Funktionen, die k-mal diffbar sind, aber nicht $(k+1)$-mal.



Werte auf einer Kurve legen alle Ableitungen im Innern fest!

5. Differenzierbar $\Longrightarrow$ analytisch

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1-\frac{z}{x}} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{x^{k+1}}$$

geometrische Reihe!

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(x)}{x-z}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{x^{k+1}}\,f(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(x)}{x^{k+1}}\,dx\right) z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,z^k$$

<u>Satz</u>: Jede komplex diffbare Funktion hat eine konvergente Taylorreihe, ist also analytisch.

Alle speziellen Funktionen sind auch analytische komplexe Funktionen!