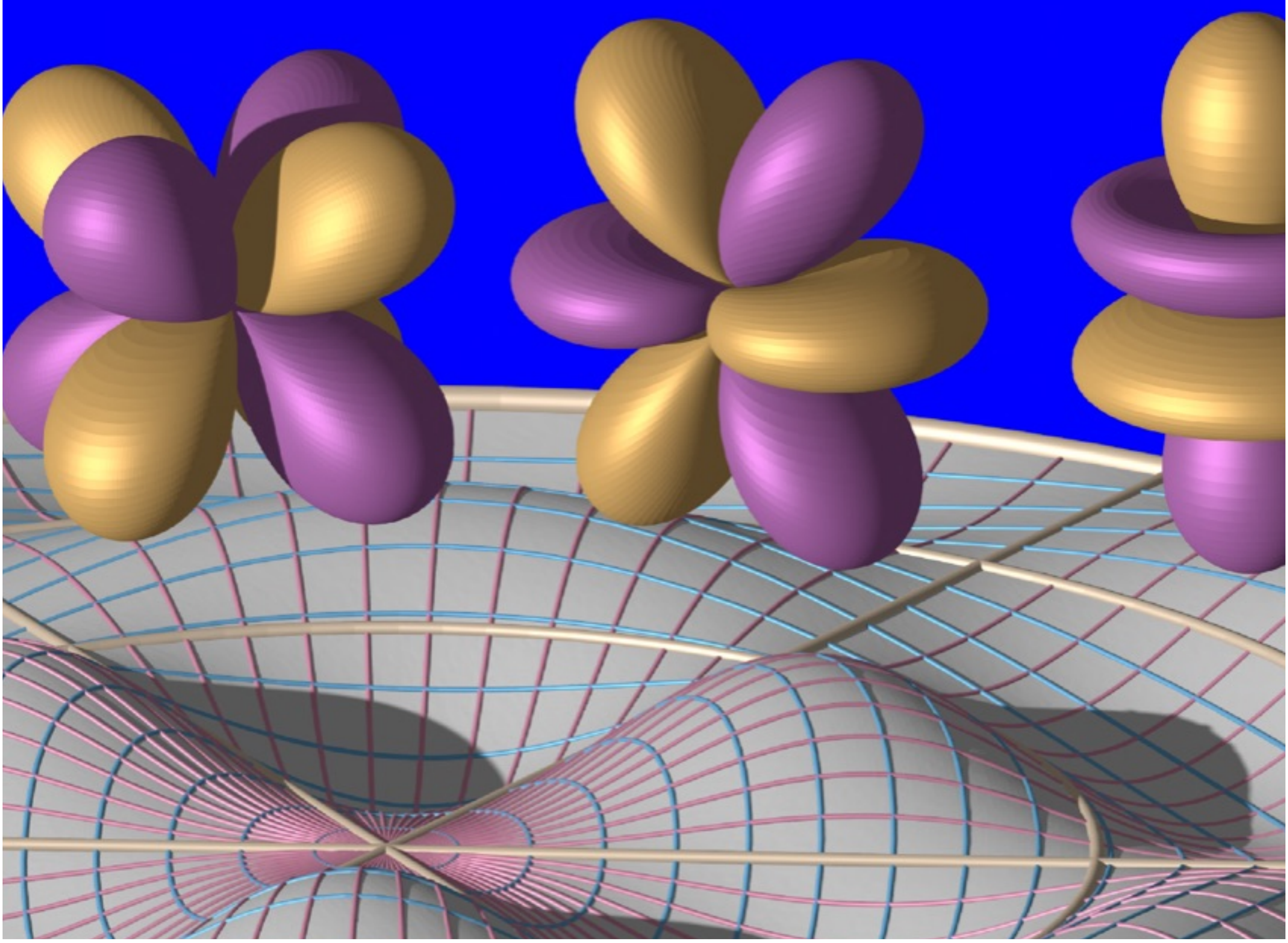
Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

8. Integration in geschlossener Form



Inhalt

1. Problemstellung

Für die Verteilungsfunktion der Normalverteilung

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

gibt es keine Darstellung in geschlossener Form. Damit ist gemeint, dass es keinen Ausdruck aus nur wohlbekannten Funktionen wie e^x, log, trig. Funktionen, Wurzeln und Potenzen gibt, der $\Phi(x)$ ergibt. Dies rechtfertigt, eine neue spezielle Funktion zu definieren, mit der man $\Phi(x)$ einfach ausdrücken kann und die weitere "gute" Eigenschaften hat.

<u>Definition</u>: Die Fehlerfunktion ist die Fkt.

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2}\, dt$$

Anwendung:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}}\; {}_1F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}, -z^2\right)$$

Problem 1: Woher weiss man, dass es keine einfache Darstellung von $\Phi(x)$ gibt?

Das Problem ist verwandt mit dem Problem, eine Lösung einer linearen DGl wie z. B. der Bessel-Gleichung zu finden. Viele DGl lassen sich auf Integration zurückführen, das Problem ist daher:

Problem 2: Gegeben eine Funktion $f(x)$, ausgedrückt durch "wohlbekannte" Funktionen, kann dann auch eine Stammfunktion durch wohlbekannte Funktionen ausgedrückt werden?

Zu klären:

- Welche "wohlbekannten" Funktionen sind akzeptabel? → elementare Funktionen
- Was heisst "ausgedrückt durch"? → Differentialkörper und Körpererweiterungen
- Gibt es ein Kriterium, welches die Frage entscheiden kann? → Satz von Liouville
- Gibt es einen Algorithmus? → Risch

2. Elementare Funktionen

Ziel: eine Klasse von Funktionen definieren, die man als "Lösungen" eines Integrals akzeptieren will

Willkürlich:

- historischer Kontext des Problems im 19. Jahrhundert
- Funktionen, die man "von Hand" und mit Hilfe von Tabellen leicht berechnen konnte:
  - Polynome, rationale Funktionen
  - Wurzeln
  - e^x und log
  - trigonometrische Fkt und ihre Umkehrfunktionen

$\Rightarrow$ Integrale auf etwas zurückführen, was man berechnen kann

Mit modernen Computern kann man jedes Integral direkt berechnen, d.h. die Bedeutung dieser Funktionenklasse ist geringer geworden.

Definition: Ein Körper ist eine Menge mit einer Addition + und einer Multiplikation · derart, dass:

a) assoziativ

$(a+b)+c = a+(b+c)$

b) kommutativ:

$a+b = b+a$

c) Es gibt ein neutrales Element zur Addition:

$a+0 = a$

d) Es gibt ein additives Inverses $-a$

$a+(-a)=0$

assoziativ

$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

kommutativ

$a\cdot b = b\cdot a$

Es gibt ein neutrales Element zur Multiplikation

$a\cdot 1 = a$

$a\neq 0$ hat ein multiplikatives Inverses a^{-1}

$a\cdot a^{-1} = 1$

e) Distributivgesetz (Ausmultiplizieren)

$(a+b)\cdot c = ac+bc$

Beispiele: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Körpererweiterungen: einen Körper um eine Zahl erweitern, z.B. $\alpha=\sqrt{2}$: kleinster Körper, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Beliebige Potenzen und Brüche mit $\sqrt{2}$ müssen in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sein.

$$\frac{a_0+a_1\sqrt{2}+a_2\sqrt{2}^2+\ldots+a_n\sqrt{2}^n}{b_0+b_1\sqrt{2}+b_2\sqrt{2}^2+\ldots+b_m\sqrt{2}^n} = \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{ac-2bd+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2}$$

$$= u+v\sqrt{2}$$

Das Integrationsproblem arbeitet mit Funktionen

<u>Definition</u>: Der Körper der rationalen Funktionen mit Koeffizienten in K

$$K(X) = \left\{ \frac{p(X)}{q(X)} \;\middle|\; p, q \text{ teilerfremde Polynome in } K[X] \right\}$$

In $K(X)$ gibt es Funktionen, die nicht integriert werden können:

$$\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}(x) \Rightarrow \int \frac{1}{x} \, dx = \log(x) + C \notin \mathbb{Q}(x)$$

$$\frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{Q}(x) \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + C \notin \mathbb{Q}(x)$$

Wenn man eine weitere Funktion f als "wohlbekannt" betrachten möchte, muss man auch alle Potenzen, Linearkombinationen und Brüche zulassen, d.h. alle Funktionen in einem Erweiterungskörper $K(f)$.

<u>Definition</u>: Elementare Funktionen sind die Elemente eines Funktionenkörpers, der aus $\mathbb{Q}(x)$ durch Körpererweiterung in endlich vielen Schritten mit Nullstellen von Polynomen, Logarithmen und Exponentialfunktionen entsteht

Beispiele:

① Die Funktion $\sin(x)$ ist in $\mathbb{Q}(x)$, dem die Zahl i und die Funktion e^{ix} hinzugefügt worden sind:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{\underbrace{2i}_{\in K(i)}} = \frac{e^{ix} - \overbrace{\frac{1}{e^{ix}}}^{\in K(e^{ix})}}{2i}$$

Aber auch:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + \frac{1}{e^{ix}}}{2} \in K(e^{ix}, i)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \in K(e^{ix}, i)$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \in K(e^{ix}, i)$$

○

② Die Funktion $\arctan(x)$ ist in $K(i, \log(x+i), \log(x-i), \pi)$, wie die folgende Darstellung zeigt:

$$\arctan(x) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{x-i}{x+i}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2i} \log(x-i) - \frac{1}{2i} \log(x+i) + C$$

○

D.h. Die trigonometrischen Funktionen sind elementare Funktionen

3. Differentialkörper

Was heisst "Stammfunktion" in einem Fkt-körper?

Analysis: Integral ist definiert über Riemann-Summe und Grenzprozess → ungeeignet für ein Computer-Algebra-System (CAS).

Ein CAS "kann" nur Symbolmanipulation.
⟹ ein CAS braucht symbolische Regeln für Ableitung und Stammfunktion. z.B.

$$\frac{d}{dx}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{dg}{dx} \qquad \text{(linear)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df}{dx}(x) g(x) + f(x) \frac{dg}{dx}(x) \qquad \text{(Produkt)}$$

Oder formal:

Definition: Ein Differentialkörper K ist ein Funktionenkörper mit einem linearen Operator $d: K \to K$ mit den Eigenschaften

a) $dx = 1$

b) $d(fg) = (df) \cdot g + f \cdot dg$

Folgerungen: ① $dx^n = n x^{n-1}$

Induktion: $n=1$: $dx = dx^1 = 1 dx^0 = 1$

$n \to n+1$: $dx^{n+1} = d(x \cdot x^n) = dx \cdot x^n + x dx^n$

$= x^n + x n x^{n-1} = x^n + n x^n = (n+1) x^n$ ○

② Ableitung von 1: $d(\underset{\overset{\shortparallel}{dx}}{1\cdot x}) = (d1)\cdot x + \underbrace{1\cdot dx}_{dx}$

$\Longrightarrow\ d1\cdot x = 0 \ \Longrightarrow\ d1 = 0$ ▢

③ Kehrwert: $1 = f\cdot\frac{1}{f}$ ableiten:

$$0 = d1 = d\left(f\cdot\frac{1}{f}\right) = df\cdot\frac{1}{f} + f\, d\frac{1}{f}$$

nach $d\frac{1}{f}$ auflösen: $d\frac{1}{f} = -\frac{1}{f^2}\,df$ ▢

④ Quotientenregel:

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = d\left(f\cdot\frac{1}{g}\right) = (df)\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(d\frac{1}{g}\right)$$
$$= df\cdot\frac{1}{g} - f\cdot\frac{1}{g^2}\,dg$$
$$= \frac{df\cdot g - f\cdot dg}{g^2}$$ ▢

keine Grenzwerte, nur Symbolmanipulation

Ableitungen berechnen ist ein rein algebraischer Prozess / reine Symbolmanipulation.

<u>Definition</u>: Eine Stammfunktion F einer Funktion $f\in K$ ist ein $F\in K$ mit $dF = f$.

Rechenregeln: ① Stammfunktion ist linear:

$dF = f,\ dG = g \Rightarrow d(\alpha F + \beta G) = \alpha f + \beta g$

② Stammfunktion von x^n: $d\,\frac{1}{n+1}x^{n+1} = x^n$

$n = -1 \Rightarrow$ keine Stammfunktion in $\mathbb{Q}(x)$!

4. Logarithmen und Exponentialfunktionen

Die Funktion $\frac{1}{x}$ hat keine Stammfunktion in $\mathbb{Q}(X)$. Wenn man rationale Funktionen integrieren will, muss der Funktionenkörper um $\log(x)$ erweitert werden.

Analysis: $\log(x)$ ist die Umkehrfunktion von e^x, aber

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = {}_0F_0(x)$$

Diese Definition ist für ein CAS ungeeignet

Definition: Eine Funktion f heisst eine Exponentialfunktion von g, wenn $df = f\,dg$. Eine Funktion f heisst ein Logarithmus von g, wenn $g\,df = dg$.

Notation: f eine Exponentialfunktion von g, dann schreibt man auch $f = e^g$. f ein Logarithmus von g, dann schreibt man $f = \log(g)$.

"Übliche" Rechenregeln für log und exp:

① $d\,e^g = e^g \cdot \underbrace{dg}_{\text{"innere" Ableitung}}$

② $d\log(g) = \frac{1}{g}\,\overbrace{dg}$

Symbol-manipulation

5. Integration rationaler Funktionen

$f(x) = p(x)/q(x) \in K(x)$ eine rationale Funktion, alle Nullstellen des Nenners $q(x)$ in K, d.h. $q(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m)$.

<u>1. Schritt</u>: Durchführung der Polynomdivision p/q ergibt: $f(x) = r(x) + b(x)/q(x)$ mit Polynomen $r(x)$ und $b(x)$.

Stammfunktion von $r(x) = r_n x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \ldots + r_1 x + r_0$ ist

$$R(x) = \frac{r_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{r_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{r_1}{2}x^2 + r_0 x$$

<u>2. Schritt</u>: Stammfunktion von $b(x)/q(x)$ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\frac{b(x)}{q(x)} = & \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} \\ & + \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} \\ & + \ldots \\ & + \frac{A_{m1}}{x-\alpha_m} + \frac{A_{m2}}{(x-\alpha_m)^2} + \ldots + \frac{A_{mk_m}}{(x-\alpha_2)^{k_m}}\end{aligned}$$

Stammfkt: $\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}dx = \frac{-A}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}} \in K(x)$

d.h. $f(x)$ hat nur dann eine Stammfunktion in K, wenn die Funktionen

$$\log(x-\alpha_1),\ \log(x-\alpha_2), \dots, \log(x-\alpha_n) \in K$$

d.h. um rationale Funktionen integrieren zu können, muss man $K(x)$ um die Logarithmen der Faktoren des Nenners erweitern.

<u>Beobachtung:</u> $f \in \mathcal{D} = \mathbb{Q}(x)$ hat eine Stammfunktion F in einem Erweiterungskörper $\mathcal{F}$, wenn man f in der Form

$$f = v_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}$$

schreiben kann, wobei v_0 ein Polynom ist und v_i Polynome vom Grad 1, d.h. von der Form $x-\alpha_i$.
Der Erweiterungskörper muss die Logarithmen $\log(v_i)$ enthalten und die Stammfunktion ist

$$F = v_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i)$$

6. Integrale der Form $\int R(x, \sqrt{p(x)})\,dx$

Für quadratische Polynome $p(x)$ können solche Integrale in geschlossener Form ausgewertet werden.

R eine rationale Funktion von zwei Variablen und $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$. Im allgemeinen ist $y \notin \mathbb{Q}(x)$, d.h. y muss zu $\mathbb{Q}(x)$ hinzugefügt werden.

Rechenregeln für y:

$$y^2 = ax^2+bx+c \Rightarrow y\,dy = 2ax+b$$

$$\Rightarrow dy = \frac{2ax+b}{y}$$

<u>Konsequenzen:</u>

- $$R(x,y) = \underbrace{\frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)}}_{\substack{\text{siehe} \\ \text{Abschnitt 5}}} + \frac{\omega_3(x)}{\omega_4(x)} \cdot \frac{1}{y}$$

- Mit Partialbruchzerlegung kann man auf Integrale der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\, y\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \text{mit Subst. } x-a = \frac{1}{t}$$

<u>Beobachtung</u>: Eine Stammfunktion kann in einem Erweiterungskörper gefunden werden, wenn man die Logarithmusfunktion hinzufügt. Die Stammfunktion hat die Form

$$F = v_0 + c_0 \log(\ldots) + \sum_{i=1}^{k} c_i \log v_i$$

wobei v_i weitere Nenner sind, die in der Partialbruchzerlegung von w_3/w_4 auftreten.

7. Der Satz von Liouville

Die Beobachtungen in Abschnitt 5+6 sind die Aussage des allgemeineren Satzes von Liouville.

<u>Definition:</u> Eine Erweiterung $\mathcal{F}$ eines Differentialkörpers $\mathcal{D}$ heisst elementar über $\mathcal{D}$, wenn $\mathcal{F}$ aus $\mathcal{D}$ durch hinzufügen endlich vieler Elemente entsteht, die

a) algebraisch sind, z.B. Wurzeln und Wurzelfunktionen oder
b) Logarithmen oder
c) Exponentialfunktionen von aus bereits hinzugefügten Funktionen konstruierte Funktionen sind.

<u>Satz:</u> Sei $\mathcal{D}$ ein Differentialkörper, $\mathcal{F}$ eine elementare Körpererweiterung von $\mathcal{D}$. Wenn $F \in \mathcal{F}$ eine Stammfunktion von $f \in \mathcal{D}$ ist, dann gibt es Zahlen $c_i \in \mathbb{C}$ und $v_0, v_i \in \mathcal{D}$ derart, dass

$$g = v_0 + \sum_{i=1}^{k} c_i \log(v_i), \quad g' = v_0' + \sum_{k=1}^{n} c_i \frac{v_i'}{v_i} = f$$

Der Satz liefert ein Kriterium für Integrierbarkeit.

8. Risch-Algorithmus

Der Satz von Liouville besagt, dass eine Stammfunktion von f in einem Differentialkörper existiert, wenn f eine spezielle Form hat.

Der Satz von Risch konstruiert lineare Gleichungssysteme mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ für Unbekannte in $\mathcal{F}$, die genau dann lösbar sind, wenn f eine elementare Stammfunktion hat

<u>Schwierigkeit</u>: Um daraus einen Computer-Algorithmus zu machen, muss man einen Algorithmus haben, welcher entscheiden kann, ob zwei Ausdrücke in $\mathcal{F}$ gleich sind. Dies ist aber ein nicht entscheidbares Problem, d.h. es gibt keinen allgemeinen Algorithmus, der das kann.

Reale Implementationen sind daher immer nur so leistungsfähig wie die zugrundeliegenden Vergleichsalgorithmen.