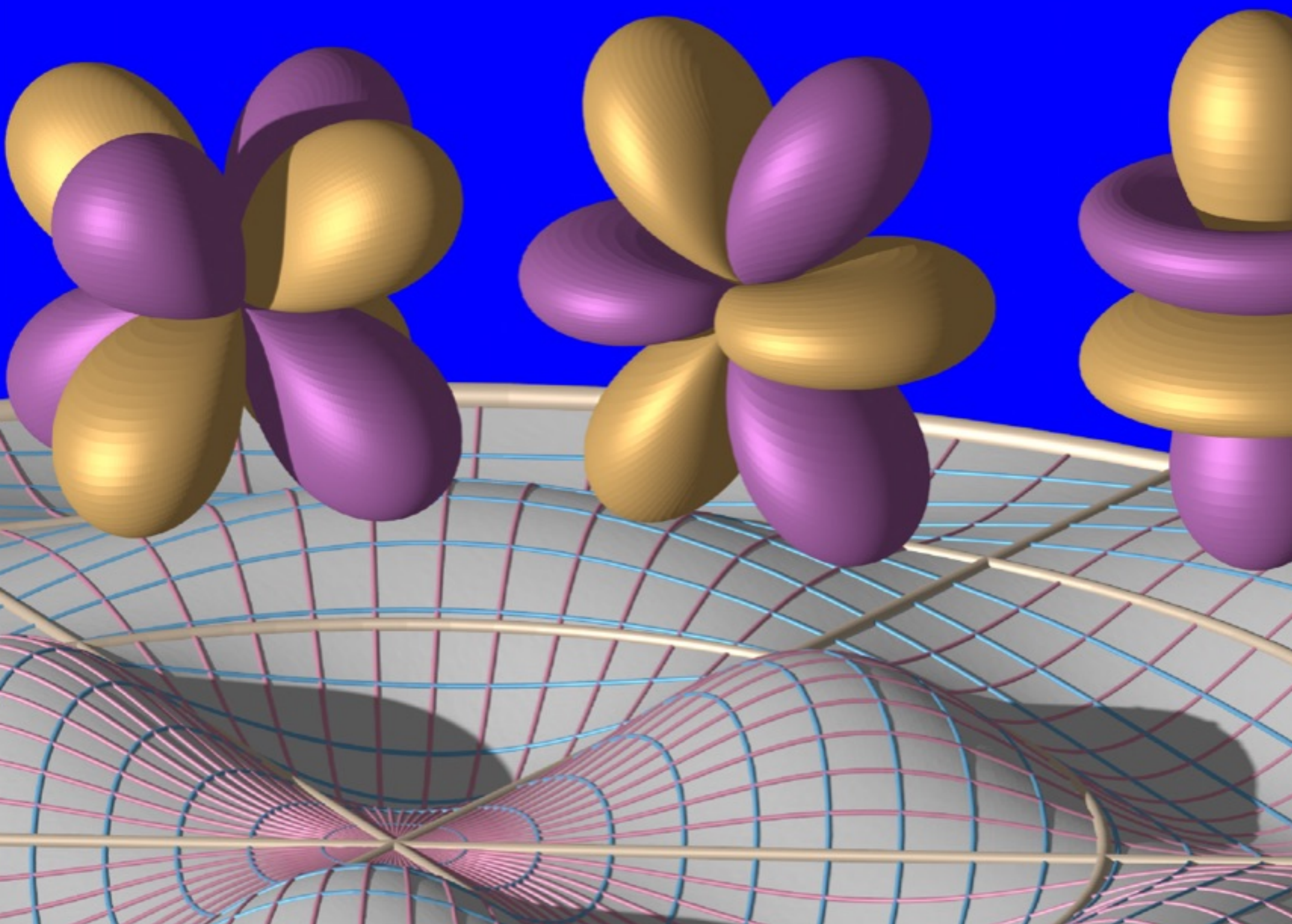
Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

1. Komplexe Funktionen



Sitzung 1: Komplexe Funktionen

Motivation:

- In der Analysis lernt man, mit beliebigen reellen Funktionen zu rechnen. Selbst die Kenntnis aller Ableitungen sagt nichts über den tatsächlichen weiteren Verlauf der Funktion aus.

  → reelle Funktionen sind "unvorhersehbar"

- Naturgesetze sind "vorhersehbar", man kann immer Koordinaten wählen, sodass die Funktionen einfach, meistens Polynome sehr niedrigen Grades sind.

  → Potenzreihen müssen reichen

- Taylorreihe: Ableitung an einer Stelle legen den weiteren Verlauf vollständig fest und können immer auch für komplexe Argumente ausgewertet werden

  → "natürliche" Funktionen sind $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ komplex diff'bare Funktionen

- sind ∞ oft diff'bar
- haben eine konvergente Potenzreihe
- durch Singularitäten festgelegt

"starr"

1. Komplex differenzierbare Funktionen

Eine reelle Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst differenzierbar an der Stelle x_0, wenn es eine Zahl $f'(x_0)$ gibt derart, dass

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{lineare Ersatzfunktion}} + o(x - x_0)$$

$o(x-x_0)$ bedeutet: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{o(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0$

$\Longleftrightarrow$ "lineares Verhalten wird durch $f'(x_0)$ vollständig erfasst"

Berechnung mit Grenzwert:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definition: Eine komplexe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heisst differenzierbar oder holomorph an der Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn es eine Zahl $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

$$\Longleftrightarrow \quad f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Zu beachten:

- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann man auch als reelle Funktionen schreiben:

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

- Ableitung einer reellen Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

mit 4 unabhängigen Einträgen

- Ableitung $f'(z_0)$ ist eine komplexe Zahl mit 2 Komponenten $\mathrm{Re}\, f'(z_0)$ und $\mathrm{Im}\, f'(z_0)$

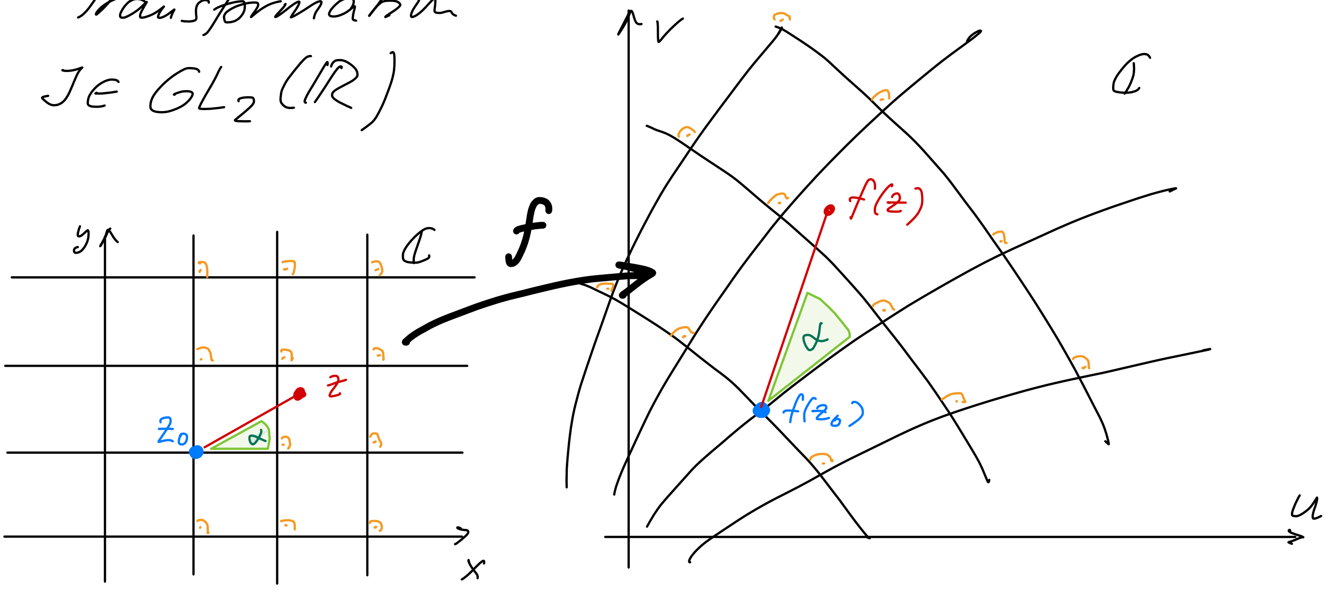
$\Rightarrow$ komplexe Diffbarkeit ist eine <u>zusätzliche</u> Einschränkung

- geometrisch:

J = beliebige affine Transformation $J \in GL_2(\mathbb{R})$

$f'(z_0)$ = Drehstreckung

$\Rightarrow$ Winkel bleiben erhalten



2. Berechnung von $f'(z)$, Cauchy-Riemann-Dgl.

Wähle eine beliebige Richtung $w \in \mathbb{C}$, berechne

$$f'(z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + wt) - f(z_0)}{wt}$$

Wichtig: – muss für jedes w dasselbe geben
– "reeller" Grenzwert, Richtungsableitung.

a) reelle Richtung: $w = 1$

$$f'(z_0) = \frac{d}{dx}\left(u(x,y) + iv(x,y)\right)\Big|_{x+iy=z_0}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

b) komplexe Richtung: $w = i$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Satz (Cauchy-Riemann): $f(z)$ holomorph genau dann, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Beispiele:

① $f(z) = z^n$

$$f(z_0+wt) = (z_0+wt)^n = z_0^n + n z_0^{n-1} wt + o(t)$$
$$= f(z_0) + \underbrace{n z_0^{n-1}}_{=f'(z_0)} \cdot wt + o(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1} \qquad \circ$$

② $f(z) = e^z$

$$f(z_0+wt) = e^{z_0+wt} = e^{z_0} e^{wt}$$
$$= e^{z_0}\big(1 + wt + \underbrace{\tfrac{1}{2}(wt)^2 + \dots}_{o(t)}\big)$$
$$= f(z_0) + \underbrace{e^{z_0}}_{f'(z_0)} \cdot wt + o(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} e^z = e^z \qquad \circ$$

Ableitungsregeln: $f'(z) = \frac{d}{dx} f(z+x)\Big|_{x=0}$, $x \in \mathbb{R}$

d.h. $\frac{d}{dz} = \frac{d}{dx}$, reelle Ableitung mit Werten in $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ alle Regeln bleiben erhalten

1) $\frac{d}{dz}(f+g) = f' + g'$, $\frac{d}{dz}(\lambda f) = \lambda f'$ (linear)

2) $\frac{d}{dz}(f \cdot g) = f'g + fg'$ Produktregel

3) $\frac{d}{dz} \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ Quotientenregel

Satz: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorph
$\Longrightarrow$ u und v sind harmonisch

Beweis: harmonisch: $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ $\qquad (*)$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\stackrel{CR}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\stackrel{CR}{=} -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \square$$

Review: J = 4 unabhängige Ableitungen
+ 2 Bedingungen (2× CR oder (*))

$f'(z)$ = 2 unabhängige Ableitungen

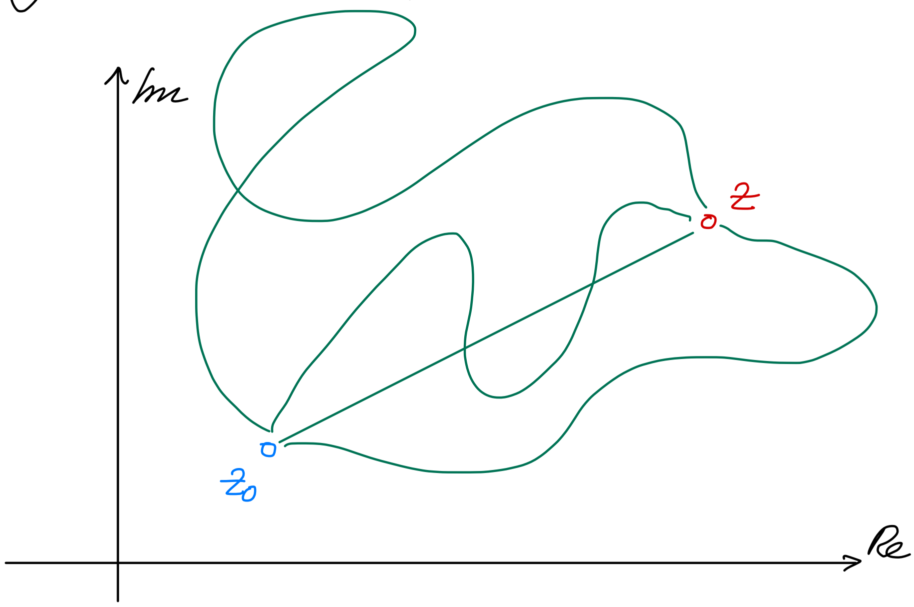
3. Integration komplexer Funktionen: Wegintegrale

Gegeben: Ableitung $F'(z) = f(z)$

Aufgabe: Rekonstruiere $F(z)$ mit $F(z_0) = w_0$

Reelles Analogon: Stammfunktion verwenden!

Problem:



In $\mathbb{C}$ gibt es ∞ viele Wege von z_0 nach z!

In $\mathbb{R}$ gibt es nur einen Weg von a nach b, daher ist

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

eindeutig bestimmt.

Zwei Teilprobleme:

1. Was für eine Art Integral?
2. Unabhängigkeit von der Wahl des Weges.

Definition: Weg von z_0 nach z:

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto \gamma(t)$$

mit $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z$

Definition: Wegintegral

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

Da $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ reell ist, ist das Integral wohldefiniert.

Beispiel:

$$f(z) = z^n$$

Strecke von z_0 nach z_1

$$\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad t \in [0,1]$$

$$\dot{\gamma}(t) = z_1 - z_0$$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 \overbrace{(\underbrace{z_0 + t(z_1 - z_0)}_{\gamma(t)})^n}^{f(\gamma(t))} \overbrace{(z_1 - z_0)}^{\dot{\gamma}(t)}\, dt$$

$$= \left[\boxed{\frac{1}{n+1}\left(z_0 + t(z_1 - z_0)\right)^{n+1} \frac{1}{\cancel{z_1 - z_0}} \cancel{(z_1 - z_0)}} \right]_0^1$$

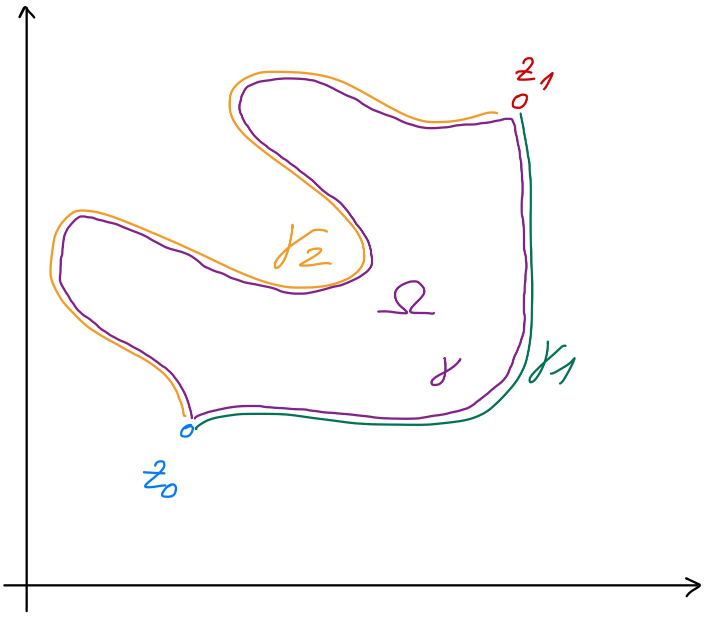
Stammfunktion einer Funktion einer reellen Variable

$$= \frac{1}{n+1}\left(z_1^{n+1} - z_0^{n+1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$$

Offen: Wegunabhängigkeit?

Idee: γ_1, γ_2 Wege zu einem geschlossenen Weg γ zusammensetzen



$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \overset{?}{=} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \oint_{\gamma} f(z)\,dz$$

Satz: f holomorph, dann ist $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschlossenen Wege

Beweis:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u(x,y) + i\,v(x,y))(dx + i\,dy)$$

$$= \int_\gamma (u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy) + i\int_\gamma (u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx)$$

Satz von Green

$$= \iint_\Omega -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy + i\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$= \iint_\Omega \underbrace{-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}}_{\text{CR}\;=0}\,dx\,dy + i\iint_\Omega \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{CR}\;=0}\,dx\,dy$$

$$= 0 \qquad \square$$

Beispiel: Einheitskreis $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ $t \in [0,1]$

$$f(z) = \frac{1}{z} \Longrightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 \cancel{e^{-2\pi i t}} \cdot 2\pi i \, \cancel{e^{2\pi i t}}\, dt$$

$$= 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i$$

Warum? $f(z)$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $z=0$. Im Beweis wurden die CR-Dgl auch an dieser Stelle verwendet.

Zur Erinnerung:

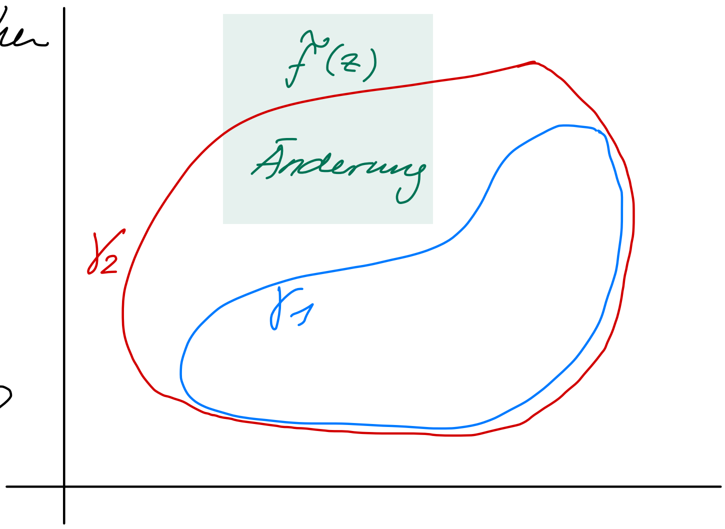
<u>Satz (Green)</u>: f,g diffbar im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Rand $\gamma = \partial\Omega$. Dann gilt

$$\int_\gamma f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \iint_\Omega \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy$$

Holomorphe Funktionen sind "starr": es ist nicht möglich, sie ein bisschen zu ändern in $\tilde{f}(z)$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$$0 = \int_{\gamma_2} \tilde{f}(z)\,dz \quad ???$$

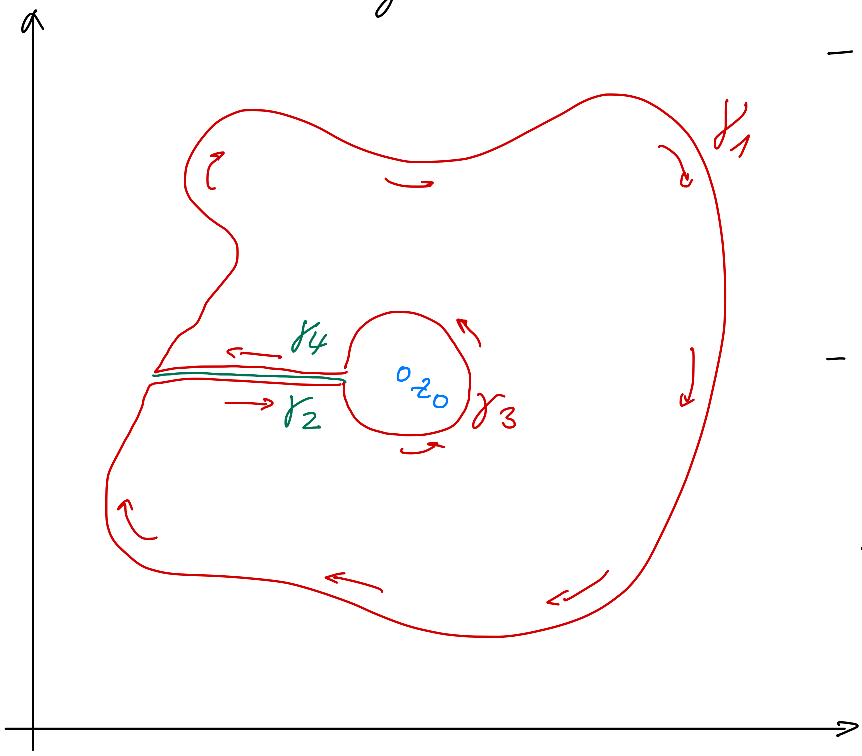


4. Cauchy-Integralformel

$f(z)$ holomorph in einer Umgebung, dann ist $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ für einen geschlossenen Weg, der z_0 umschliesst.

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$ ist holomorph ausser im Punkt z_0.

Berechne: $$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$



- Die beiden Segmente γ_2 und γ_4 heben sich weg
- Im Innere des Weges ist $f(z)/(z-z_0)$ holomorph

$$\Rightarrow \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$\Rightarrow -\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz = \int_{\gamma_3} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz$$

d.h. man muss das Integral nur entlang eines Kreises um z_0 berechnen können.

Parametrisierung des Weges: $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$

$$\dot\gamma(t) = rie^{it}$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{\cancel{re^{it}}}\,\cancel{r}i\cancel{e^{it}}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z_0) + f'(z_0)\cdot re^{it} + o(r)\,dt$$

$$= i f(z_0)\int_0^{2\pi} dt + \underbrace{if'(z_0)r\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt}_{=0} + i\int_0^{2\pi} o(r)\,dt$$

$$= 2\pi i\, f(z_0) + i\, o(r)$$

$$\Longrightarrow \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

<u>Satz:</u> Cauchy-Integralformel. f holomorph, γ ein geschlossener Weg, der z_0 im Gegenuhrzeigersinn einmal umläuft. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

5. Cauchy-Formel für die Ableitungen

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz, \quad \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d}{dz_0} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{(z - z_0)^2} f(z) dz$$

Allgemein: n-te Ableitung

$$\frac{d^n}{dz_0^n} z_0^{-1} = \frac{d^{n-1}}{dz_0^{n-1}} (-1) z_0^{-1-1}$$

$$= \frac{d^{n-2}}{dz_0^{n-2}} (-1)^2 2 \cdot z_0^{-3}$$

$$= \frac{d^{n-3}}{dz_0^{n-3}} (-1)^3 2 \cdot 3 \; z_0^{-4} =$$

$$\dots = \frac{d}{dz_0} (-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) z_0^{-n}$$

$$= (-1)^n 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \; z_0^{-n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d^n}{dz_0^n} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} n! \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz} \quad \text{(Cauchy)}$$

Folgerungen: f holomorph

1. f ist ∞ oft differenzierbar

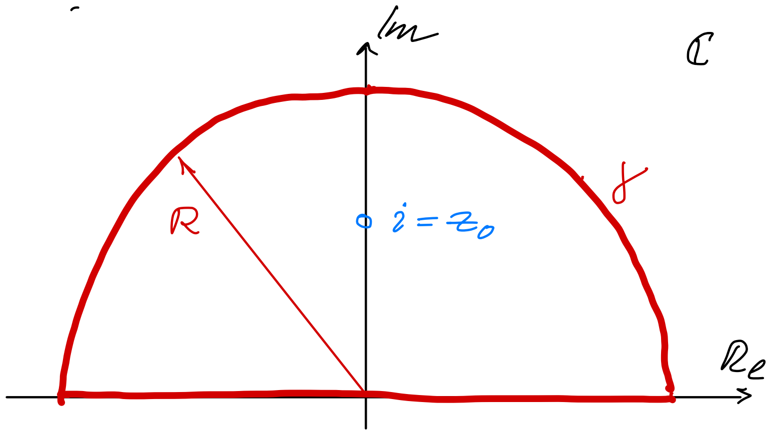
2. $f(z_0)$ ist vollständig bestimmt durch die Werte auf der Kurve γ.

Anwendung: Residuenrechnung

Aufgabe: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = ?$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = \int \frac{dz}{(z-\underbrace{i}_{z_0})\underbrace{(z+i)}_{f(z)}}$$

$$= 2\pi i\, f(z_0) = \frac{2\pi i}{i+i} = \pi$$



andererseits

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{\text{Kreis}} \frac{dz}{z^2+1} = I_1(R) + I_2(R)$$

Grenzübergang $R \to \infty$: $\quad I_1 \longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

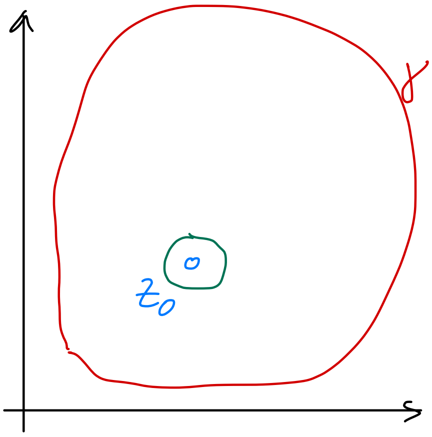
$$|I_2(R)| \leq \int_{\text{Kreis}} \left| \frac{1}{z^2+1} \right| |dz| \leq \underbrace{\pi R}_{\text{Bogenlänge}} \cdot O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{R}\right) \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi}$$

6 Nullstellen und Pole zählen

- Nullstelle bei z_0: $f(z) = a_n (z-z_0)^n + o(z-z_0)^{n+1}$



$$f'(z) = a_n n (z-z_0)^{n-1} + o(z-z_0)^n$$

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_\gamma \frac{a_n n (z-z_0)^{n-1} + o}{a_n (z-z_0)^n + o}\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{a_n}\, n\, e^{\cancel{i(n-1)t}}}{\cancel{a_n}\, e^{\cancel{int}}}\, e^{\cancel{it}}\,dt = 2\pi i \cdot n$$

$\Longrightarrow$ Das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ zählt Nullstelle von f mit Vielfachheit innerhalb γ

- Pol n-ter Ordnung bei z_0: $f(z) = a_n (z-z_0)^{-n} + o$

$$f'(z) = -a_n n (z-z_0)^{-n-1} + o$$

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_\gamma \frac{-\cancel{a_n}\, n\, (z-z_0)^{\cancel{-n}-1} + o}{\cancel{a_n}\,(z-z_0)^{\cancel{-n}} + o}\,dz$$

$$= -n \int_\gamma \frac{1 + \text{holomorph } o(z-z_0)}{z-z_0}\,dz$$

$$= -2\pi i \cdot n$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ zählt Pole mit Ordnung negativ

Satz:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \#\,\text{Nullstellen mit Vielfachheit} - \#\,\text{Pole mit Ordnung}$$

7. Potenzreihen

Geometrische Reihe: $1+q+q^2+\ldots = \dfrac{1}{1-q}$

allgemeiner:

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{z_0}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{z_0}{z}+\frac{z_0^2}{z^2}+\frac{z_0^3}{z^3}+\ldots\right)$$

Einsetzen in Cauchy-Integralformel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_0}{z}\right)^k dz$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}}\right)}_{a_k} z_0^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$$

$\Longrightarrow$ Jede holomorphe Funktion hat eine konvergente Potenzreihe

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad \text{(Cauchy)}$$

$\Longrightarrow$ $f(z_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,z_0^k$ Taylorreihe

analytisch $\hat{=}$ hat konvergente Potenzreihe

$\Longrightarrow$ holomorphe Funktionen sind analytisch

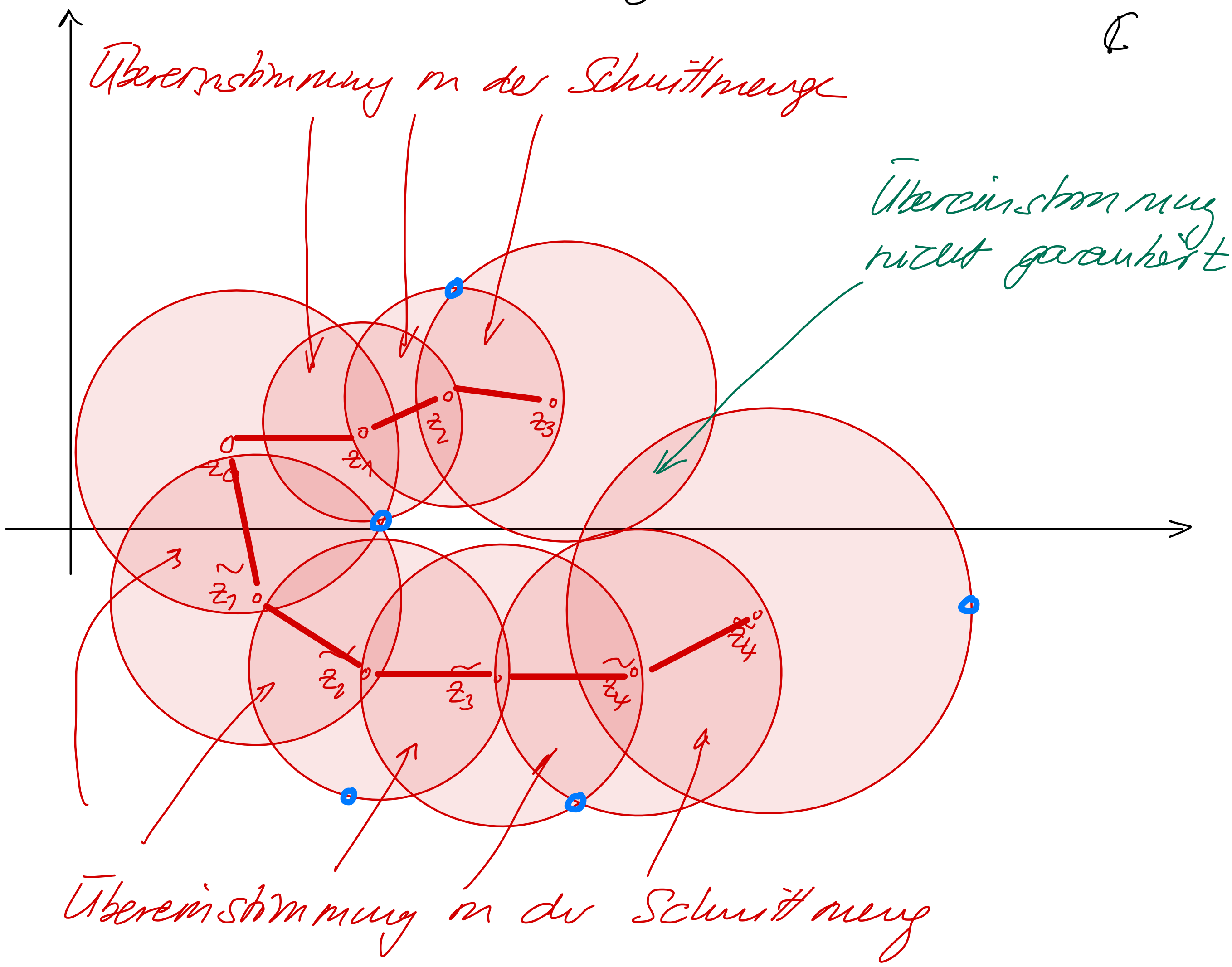
8. Analytische Fortsetzung

- Ableitungen $f^{(k)}(z_0)$ legen $f(z)$ in einem Kreis um z_0 eindeutig fest
- Ableitungen $f^{(k)}(z_1)$ legen $f(z)$ in einem Kreis um z_1 eindeutig fest

$\vdots$

- Ableitungen $f^{(k)}(z_i)$ legen $f(z)$ in einem Kreis um z_i eindeutig fest

analytische Fortsetzung entlang $z_0 - z_1 - z_2 - z_3 - \dots$



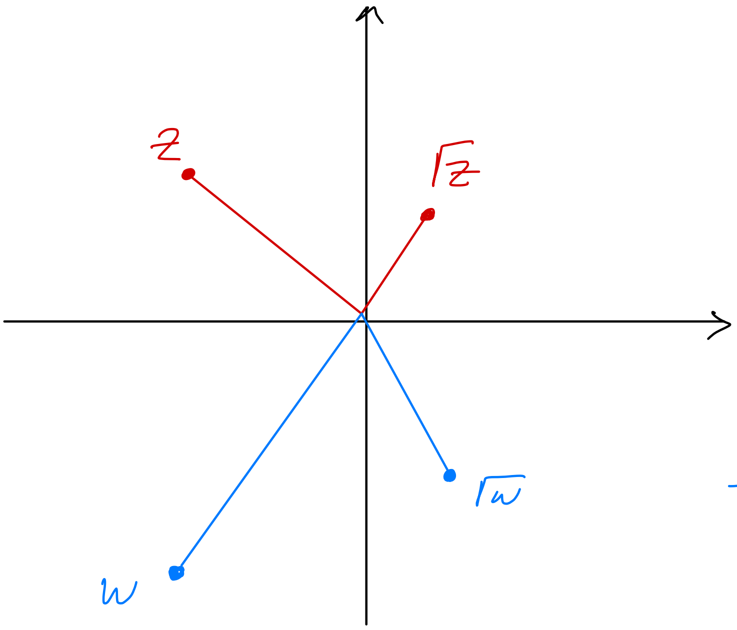
Konvergenzradius: bis zum nächsten Pol o

Verschiedene Weg können zu verschiedenen Fkt am Ende der Kette führen

Beispiele:

① Wurzelfunktion:

$$z = re^{i\varphi} \longmapsto \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$



$$-1 = e^{i\pi} \longmapsto e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$-1 = e^{-i\pi} \longmapsto e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

Keine Übereinstimmung auf der negativen reellen Achse $\longrightarrow$ zweiwertige Fkt

② Logarithmusfunktion

$$\log z = \log re^{i\varphi} = \log r + i\varphi$$

Bei analytischer Fortsetzung entlang eines Weges um 0 nimmt der Imaginärteil bei jedem Umlauf um $2\pi i$ zu $\rightarrow$ mehrwertige Fkt mit unendlich vielen Werten.