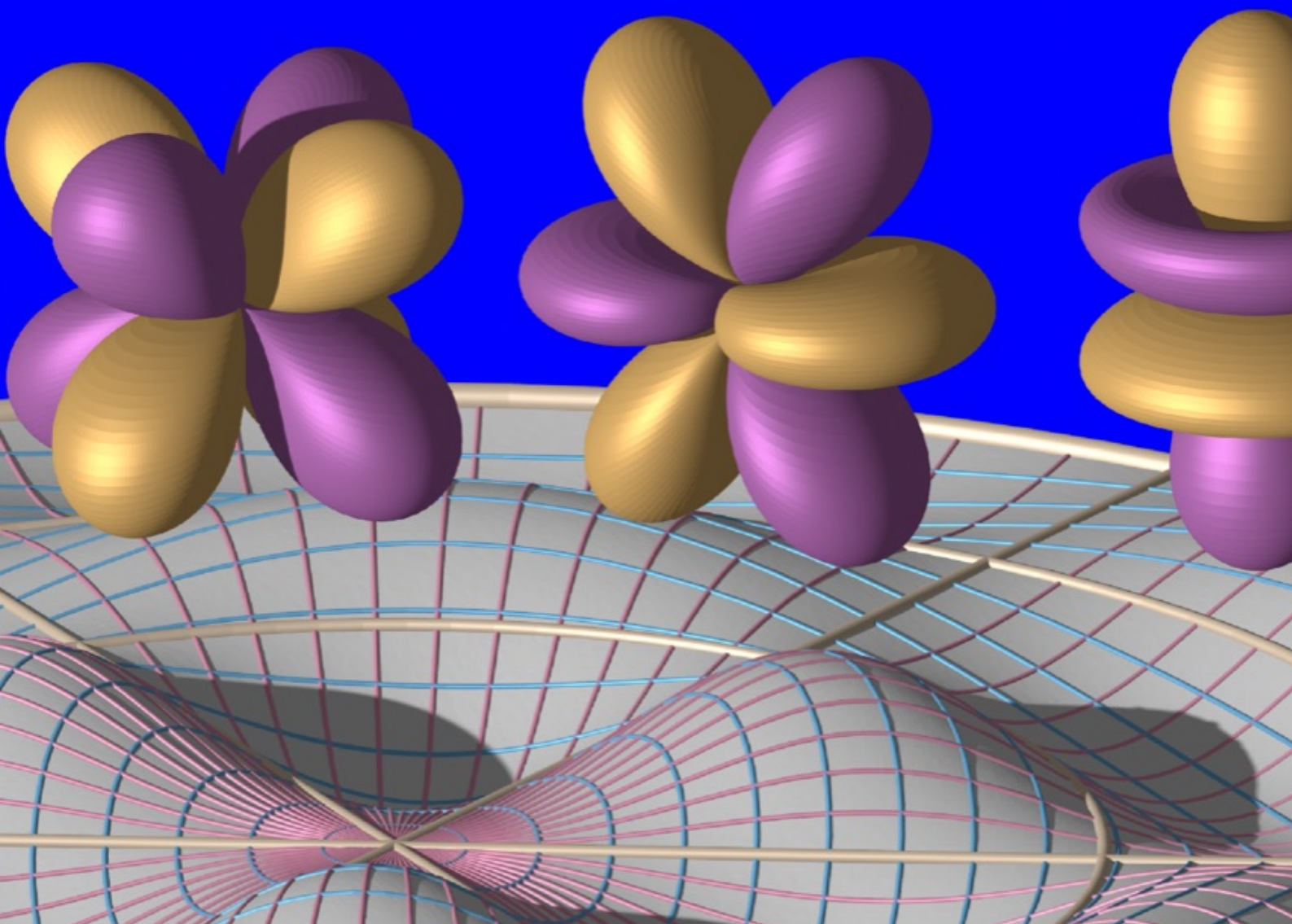


Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

1. Komplexe Funktionen



Sitzung 1: Komplexe Funktionen

Motivation:

- In der Analysis lernt man, mit beliebigen reellen Funktionen zu rechnen. Selbst die Kenntnis aller Ableitungen sagt nichts über den tatsächlichen weiteren Verlauf der Funktion aus.

→ reelle Funktionen sind "unvorhersagbar"

- Naturgesetze sind "vorhersagbar", man kann immer Koordinaten wählen, so dass die Funktionen einfach, meistens Polynome sehr niedrigen Grades sind.

→ Potenzreihe müssen reichen

- Taylorreihe: Ableitung an einer Stelle legen den weiteren Verlauf vollständig fest und können immer auch für komplexe Argumente ausgewertet werden

→ "natürliche" Funktionen sind $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

⇒ komplex diff'bare Funktionen

- sind ∞ oft diff'bar
 - haben eine konvergente Potenzreihe
 - durch Singularitäten festgelegt
- } "starr"

1. Komplex differenzierbare Funktionen

Eine reelle Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle x_0 , wenn es eine Zahl $f'(x_0)$ gibt derart, dass

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{lineare Ersatzfunktion}} + o(x - x_0)$$

$$o(x - x_0) \text{ bedeutet: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

\Leftrightarrow "Lineares Verhalten wird durch $f'(x_0)$ vollständig erfasst"

Berechnung mit Grenzwert:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definition: Eine komplexe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **differenzierbar** oder **holomorph** an der Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn es eine Zahl $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

$$\Leftrightarrow f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Zu beachten:

- $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kann man auch als reelle Funktionen schreiben:

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

- Ableitung einer reellen Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

mit 4 unabhängigen Einträgen

- Ableitung $f'(z_0)$ ist eine komplexe Zahl mit 2 Komponenten $\operatorname{Re} f'(z_0)$ und $\operatorname{Im} f'(z_0)$

\Rightarrow komplexe Diffbarkeit ist eine zusätzliche Einschränkung

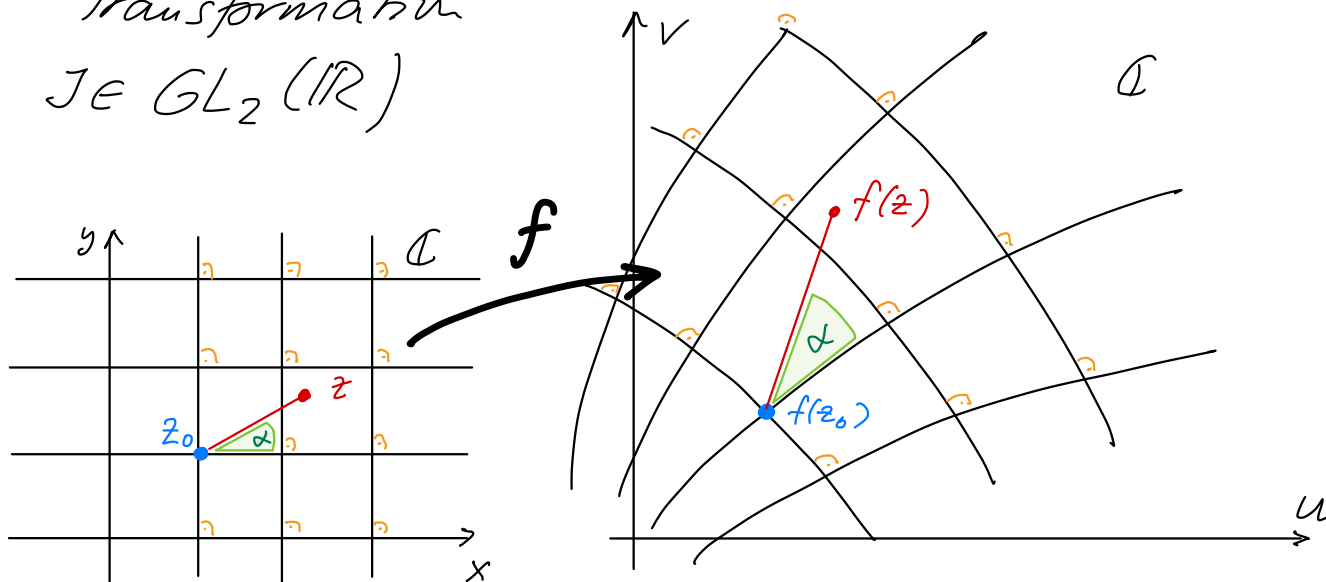
- geometrisch:

$J =$ beliebige affine

Transformations

$$J \in GL_2(\mathbb{R})$$

$f'(z_0) =$ Drehstreckung
 \Rightarrow Winkel bleiben erhalten



2. Berechnung von $f'(z)$, Cauchy-Riemann-Dgl.

Wähle eine beliebige Richtung $w \in \mathbb{C}$, berechne

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + wt) - f(z_0)}{wt}$$

Wichtig: - muss für jedes w dasselbe geben
- "reeller" Grenzwert, Richtungsableitung.

a) reelle Richtung: $w = 1$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{d}{dx} (u(x,y) + iv(x,y)) \Big|_{x+iy=z_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

b) komplexe Richtung: $w = i$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} \\ &= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Satz (Cauchy-Riemann): $f(z)$ holomorph genau dann, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Beispiele:

$$\textcircled{1} f(z) = z^n$$

$$\begin{aligned} f(z_0 + wt) &= (z_0 + wt)^n = z_0^n + n z_0^{n-1} wt + o(t) \\ &= f(z_0) + \underbrace{n z_0^{n-1}}_{=f'(z_0)} \cdot wt + o(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1} \quad \circ$$

$$\textcircled{2} f(z) = e^z$$

$$\begin{aligned} f(z_0 + wt) &= e^{z_0 + wt} = e^{z_0} e^{wt} \\ &= e^{z_0} \left(1 + wt + \underbrace{\frac{1}{2}(wt)^2 + \dots}_{o(t)} \right) \\ &= f(z_0) + \underbrace{e^{z_0}}_{f'(z_0)} \cdot wt + o(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} e^z = e^z \quad \circ$$

Ableitungsregel: $f'(z) = \frac{d}{dx} f(z+x) \Big|_{x=0}$, $x \in \mathbb{R}$
d.h. $\frac{d}{dz} = \frac{d}{dx}$, reelle Ableitung mit Werten in \mathbb{C}
 \Rightarrow alle Regeln bleiben erhalten

$$1) \frac{d}{dz} (f+g) = f' + g', \quad \frac{d}{dz} (\lambda f) = \lambda f' \quad (\text{linear})$$

$$2) \frac{d}{dz} (f \cdot g) = f'g + fg' \quad \text{Produktregel}$$

$$3) \frac{d}{dz} \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

Satz: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorph
 $\Rightarrow u$ und v sind harmonisch

Beweis: harmonisch: $\Delta u = 0, \Delta v = 0$ (*)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\stackrel{\text{CR}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\stackrel{\text{CR}}{=} -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \quad \square$$

Review: $J = 4$ unabhängige Ableitungen
+ 2 Bedingungen (2x CR oder (*))

f'(z) = 2 unabhängige Ableitungen

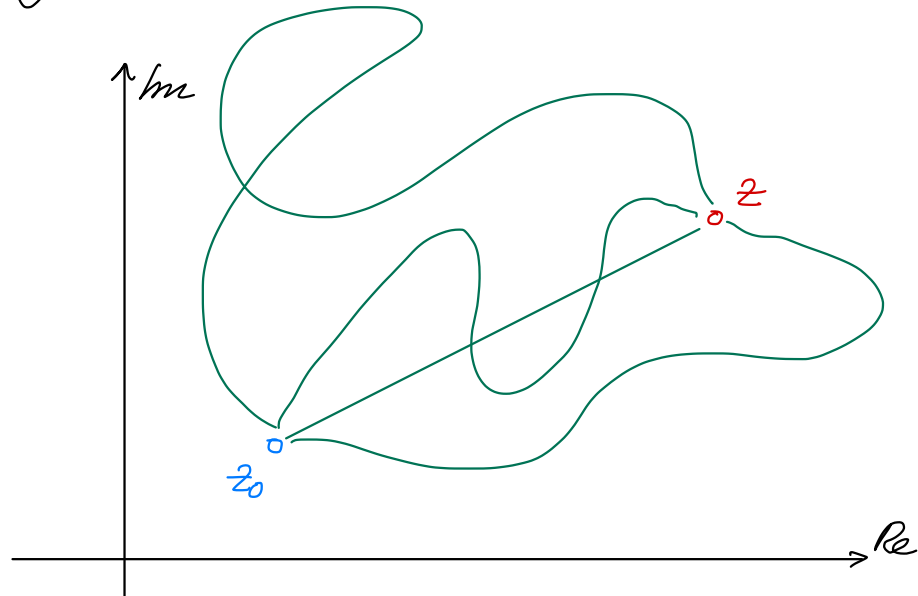
3. Integration komplexer Funktionen: Wegintegrale

Gegeben: Ableitung $F'(z) = f(z)$

Aufgabe: Rekonstruieren $F(z)$ mit $F(z_0) = w_0$

Reelles Analogon: Stammfunktion verwenden!

Problem:



In \mathbb{C} gibt es so viele Wege von z_0 nach z !

In \mathbb{R} gibt es nur einen Weg von a nach b ,

daher ist

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx$$

eindeutig bestimmt.

Zwei Teilprobleme:

1. Was für eine Art Integral?

2. Unabhängigkeit von der Wahl des Weges.

Definition: Weg von z_0 nach z :

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}: t \longmapsto \gamma(t)$$

mit $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z$

Definition: Wegintegral

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Da $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ reell ist, ist das Integral wohldefiniert.

Beispiel: $f(z) = z^n$
 $\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$, $t \in [0, 1]$
 $\dot{\gamma}(t) = z_1 - z_0$

Strecke von z_0 nach z_1

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 \underbrace{(\underbrace{z_0 + t(z_1 - z_0)}_{\gamma(t)})^n}_{f(\gamma(t))} \underbrace{(z_1 - z_0)}_{\dot{\gamma}(t)} dt$$

$$= \left[\frac{1}{n+1} (z_0 + t(z_1 - z_0))^{n+1} \frac{1}{z_1 - z_0} (z_1 - z_0) \right]_0^1$$

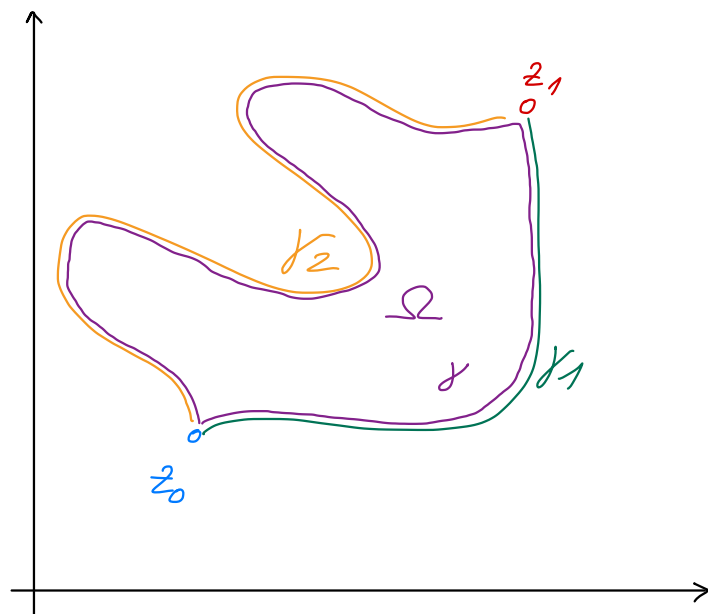
Stammfunktion einer Funktion einer reellen Variable

$$= \frac{1}{n+1} (z_1^{n+1} - z_0^{n+1})$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$$

Offen: Wegunabhängigkeit?

Idee: γ_1, γ_2 Wege
zu einem geschlossenen
Weg γ zusammensetzen



$$\int_{\gamma_1} f(z) dz \stackrel{?}{=} \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

$$\Leftrightarrow 0 = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = \oint_{\gamma} f(z) dz$$

Satz: f holomorph, dann ist $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$
für alle geschlossenen Wege

Beweis:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u(x,y) + i v(x,y)) (dx + i dy) \\ &= \int_{\gamma} (u(x,y) dx - v(x,y) dy) + i \int_{\gamma} (u(x,y) dy + v(x,y) dx) \end{aligned}$$

Satz von
Green

$$= \iint_{\Omega} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \iint_{\Omega} \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{\text{CR} = 0} dx dy + i \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{\text{CR} = 0} dx dy$$

$$= 0$$



Beispiel: Einheitskreis $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ $t \in [0, 1]$

$$f(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow \oint_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 e^{-2\pi i t} \cdot 2\pi i e^{2\pi i t} dt$$
$$= 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i$$

Warum? $f(z)$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $z=0$. Im Beweis wurden die CR-Dgl auch an dieser Stelle verwendet.

Zur Erinnerung:

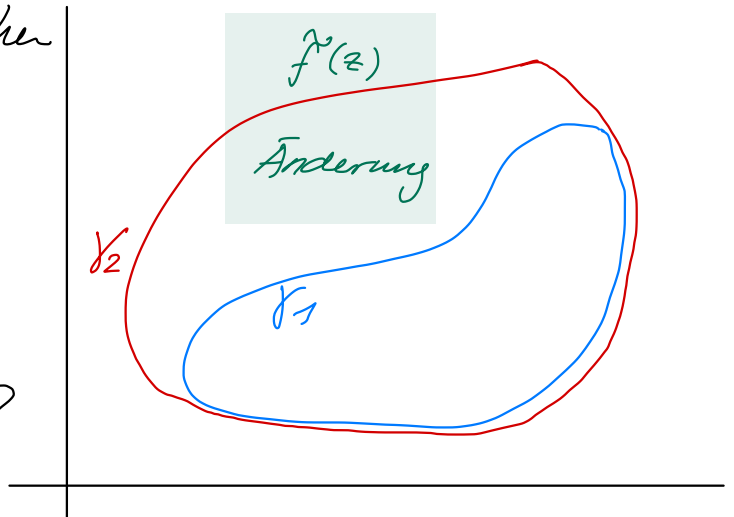
Satz (Green): f, g diffbar im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Rand $\gamma = \partial\Omega$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(x,y) dx + g(x,y) dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dx dy$$

Holomorphe Funktionen sind "starr": es ist nicht möglich, sie ein bisschen zu ändern in $\tilde{f}(z)$

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$$

$$0 = \int_{\gamma_2} \tilde{f}(z) dz \quad ???$$

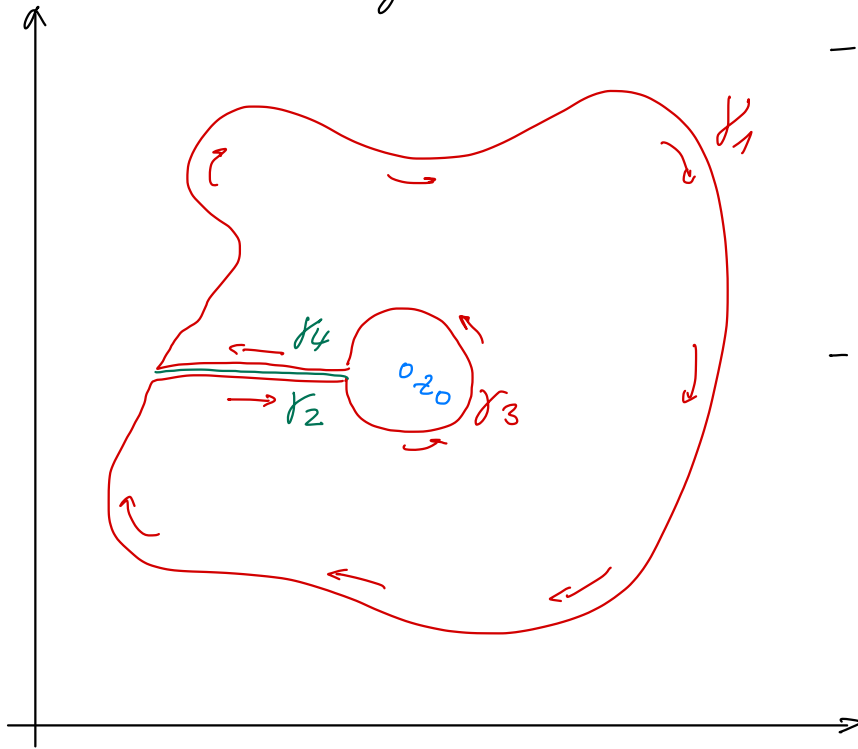


4. Cauchy - Integralformel

$f(z)$ holomorph in einer Umgebung, dann ist $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ für einen geschlossenen Weg, der z_0 umschließt.

$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ ist holomorph ausser im Punkt z_0 .

Berechne: $\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$



- Die beiden Segmente γ_2 und γ_4 heben sich weg

- Im Innere des Weges ist $f(z)/(z - z_0)$ holomorph

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$\Rightarrow - \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = \int_{\gamma_3} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$$

d.h. man muss das Integral nur entlang eines Kreises um z_0 berechnen können.

Parametrisierung des Weges: $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$
 $\dot{\gamma}(t) = rie^{it}$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{\cancel{re^{it}}} \cancel{rie^{it}} dt$$
$$= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} f(z_0) + f'(z_0) \cdot re^{it} + o(r) dt$$

$$= 2f(z_0) \int_0^{2\pi} dt + if'(z_0)r \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{it} dt}_{=0} + i \int_0^{2\pi} o(r) dt$$

$$= 2\pi i f(z_0) + i o(r)$$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Satz: Cauchy-Integralformel. f holomorph,
 γ ein geschlossener Weg, der z_0 im Gegenuhr-
zeigersinn einmal umläuft. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

5. Cauchy-Formel für die Ableitungen

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d}{dz_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{(z - z_0)^2} f(z) dz$$

Allgemein: n -te Ableitung

$$\frac{d^n}{dz_0^n} z_0^{-1} = \frac{d^{n-1}}{dz_0^{n-1}} (-1) z_0^{-1-1}$$

$$= \frac{d^{n-2}}{dz_0^{n-2}} (-1)^2 2 \cdot z_0^{-3}$$

$$= \frac{d^{n-3}}{dz_0^{n-3}} (-1)^3 2 \cdot 3 \cdot z_0^{-4} =$$

$$\dots = \frac{d}{dz_0} (-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) z_0^{-n}$$

$$= (-1)^n 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n z_0^{-n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d^n}{dz_0^n} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} n! \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (\text{Cauchy})$$

Folgerungen: f holomorph

1. f ist ∞ oft differenzierbar

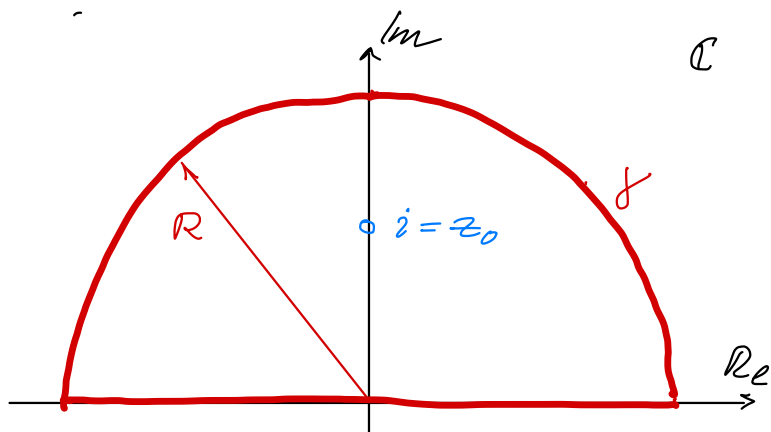
2. $f(z_0)$ ist vollständig bestimmt durch die Werte auf der Kurve γ .

Anwendung: Residuerechnung

Aufgabe: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = ?$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} = \int \frac{dz \cdot 1}{(z-i)(z+i)} = \int \frac{dz}{z_0 f(z)}$$

$$= 2\pi i f(z_0) = \frac{2\pi i}{i+i} = \pi$$



andere Seite

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{-R}^R \frac{dx}{x^2+1} + \int_{\text{Kreis}} \frac{dz}{z^2+1} = I_1(R) + I_2(R)$$

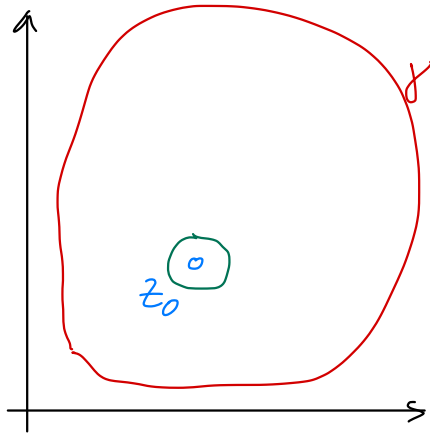
Grenzübergang $R \rightarrow \infty$: $I_1 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

$$|I_2(R)| \leq \int_{\text{Kreis}} \left| \frac{1}{z^2+1} \right| |dz| \leq \underbrace{\pi R}_{\text{Bogenlänge}} \cdot O\left(\frac{1}{R^2}\right) = O\left(\frac{1}{R}\right) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

6 Nullstellen und Pole zählen

- Nullstelle bei z_0 : $f(z) = a_n (z-z_0)^n + o(z-z_0)^{n+1}$



$$f'(z) = a_n n (z-z_0)^{n-1} + o(z-z_0)^n$$

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{a_n n (z-z_0)^{n-1} + o}{a_n (z-z_0)^n + o} dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{a_n} n e^{i(n-1)t}}{\cancel{a_n} e^{int}} e^{it} dt = 2\pi i \cdot n$$

\Rightarrow Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ zählt

Nullstellen von f mit Vielfachheit n innerhalb γ

- Pole n -ter Ordnung bei z_0 : $f(z) = a_n (z-z_0)^{-n} + o$
 $f'(z) = -a_n n (z-z_0)^{-n-1} + o$

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{-\cancel{a_n} n (z-z_0)^{-n-1} + o}{\cancel{a_n} (z-z_0)^{-n} + o} dz$$

$$= -n \int_{\gamma} \frac{1 + \text{holomorph } o(z-z_0)}{z-z_0} dz$$

$$= -2\pi i \cdot n$$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ zählt Pole mit Ordnung negativ

Satz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \# \text{ Nullstellen mit Vielfachheit} \\ - \# \text{ Pole mit Ordnung}$$

7. Potenzreihen

Geometrische Reihe: $1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}$

Allgemeines:

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{z_0}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{z_0}{z} + \frac{z_0^2}{z^2} + \frac{z_0^3}{z^3} + \dots \right)$$

Einsetzen in Cauchy-Integralformel:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^k dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \right)}_{a_k} z_0^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k \end{aligned}$$

\Rightarrow Jede holomorphe Funktion hat eine konvergente Potenzreihe

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (\text{Cauchy})$$

$$\Rightarrow f(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z_0^k \quad \text{Taylorreihe}$$

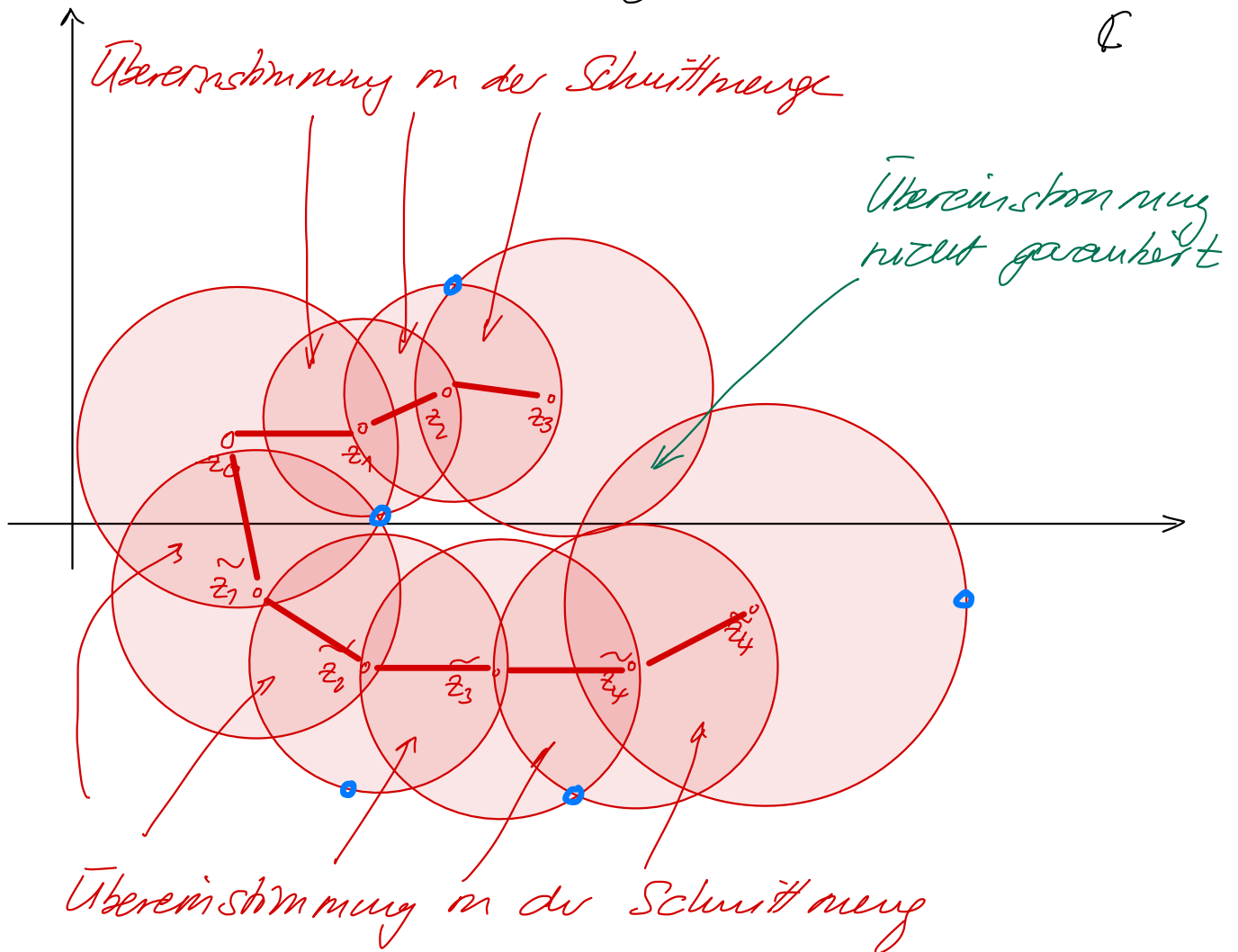
analytisch $\hat{=}$ hat konvergente Potenzreihe

\Rightarrow holomorphe Funktionen sind analytisch

8. Analytische Fortsetzung

- Ableitungen $f^{(k)}(z_0)$ legen $f(z)$ in einem Kreis um z_0 eindeutig fest
- Ableitung $f^{(h)}(z_1)$ legen $f(z)$ in einem Kreis um z_1 eindeutig fest
- ⋮
- Ableitungen $f^{(k)}(z_i)$ legen $f(z)$ in einem Kreis um z_i eindeutig fest

Analytische Fortsetzung entlang
 $z_0 - z_1 - z_2 - z_3 - \dots$



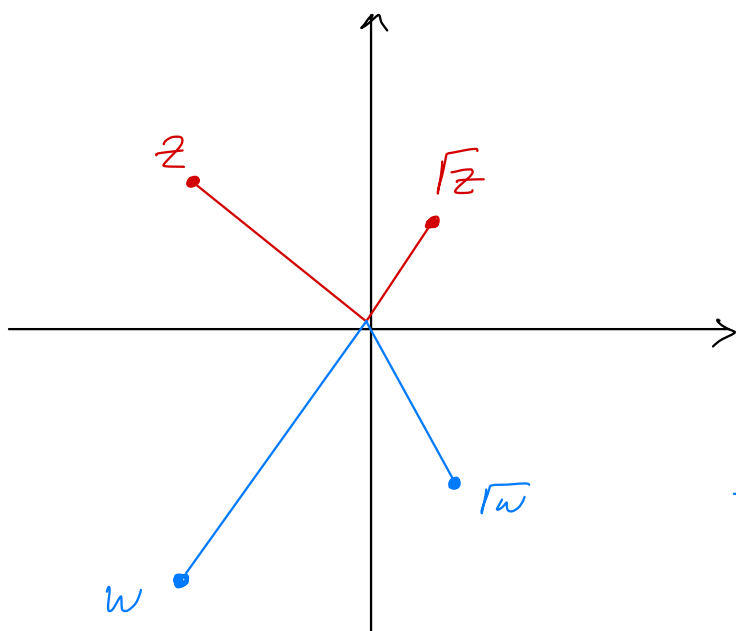
Konvergenzradius: bis zum nächsten Pol ◦

Verschiedene Wege können zu verschiedenen Fkt am Ende der Kette führen

Beispiele:

① Wurzelfunktion:

$$z = r e^{i\varphi} \mapsto \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$



$$-1 = e^{i\pi} \mapsto e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$-1 = e^{-i\pi} \mapsto e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

Keine Übereinstimmung auf der negativen reellen Achse \rightarrow zweiwertige Fkt ○

② Logarithmusfunktion

$$\log z = \log r e^{i\varphi} = \log r + i\varphi$$

Bei analytischer Fortsetzung entlang eines Weges um 0 nimmt der Imaginärteil bei jedem Umlauf um $2\pi i$ zu \rightarrow mehrwertige Fkt mit unendlich vielen Werten. ○

9. Der Satz von Carlson

Holomorphe Funktionen sind durch die Werte in "wenigen" diskreten Punkten "im Wesentlichen" festgelegt.

wenige z.B. in $z \in \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$

im Wesentlichen Wenn f_1 und f_2 auf $z \in \mathbb{N}$ die gleichen Werte haben: $f_1(z) = f_2(z) \forall z \in \mathbb{N}$, dann ist entweder $f = g$ oder f, g unbeschränkt

Satz: Wenn sich zwei Funktionen unterscheiden, dann aber "richtig"

Satz (Carson): $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt* mit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$ und $f(n) = 0 \forall n = 1, 2, \dots$, dann ist $f(z) = 0$ für $z \in \Omega$. * $|f(z)| \leq M$

Anwendung: $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ mit $f(z) = 0 \forall z = 1, 2, 3, \dots$ und $f(z)$ beschränkt, dann ist $f(z) = 0 \forall z \in \Omega$ und damit auch $f_1(z) = f_2(z) \forall z$ mit $\operatorname{Re} z \geq 0$

Beweis:

1. Schritt: Da f holomorph ist, gibt es in jedem Punkt eine Potenzreihe. Bei jeder Nullstelle z_0 von f :

$$f(z) = \cancel{f(z_0)} + f'(z_0) (z - z_0) + \dots$$

Dann ist auch

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = f'(z_0) + f''(z_0) \frac{(z - z_0)}{2!} + \dots$$

holomorph!

2. Schritt: Konstruiere die Funktion

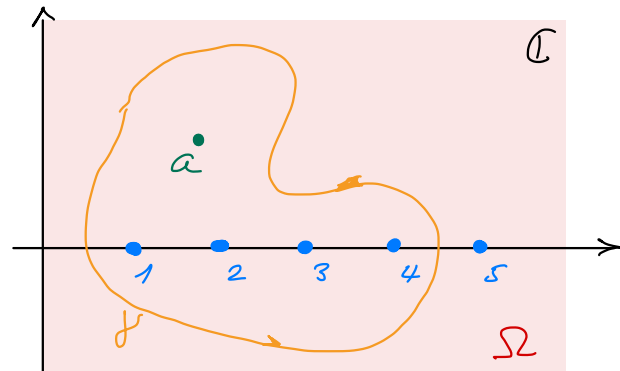
$$g_n(z) = \frac{f(z)}{(z-1)(z-2)\dots(z-n)}$$

sie ist holomorph, da $1, 2, \dots, n$ Nullstelle von $f(z)$ sind.

3. Schritt: Cauchy-Integralformel für die Funktion $g_n(z)$:

$$g_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g_n(z)}{z-a} dz$$

wobei die Kurve γ den Punkt a im Gegenuhrzeigersinn umläuft

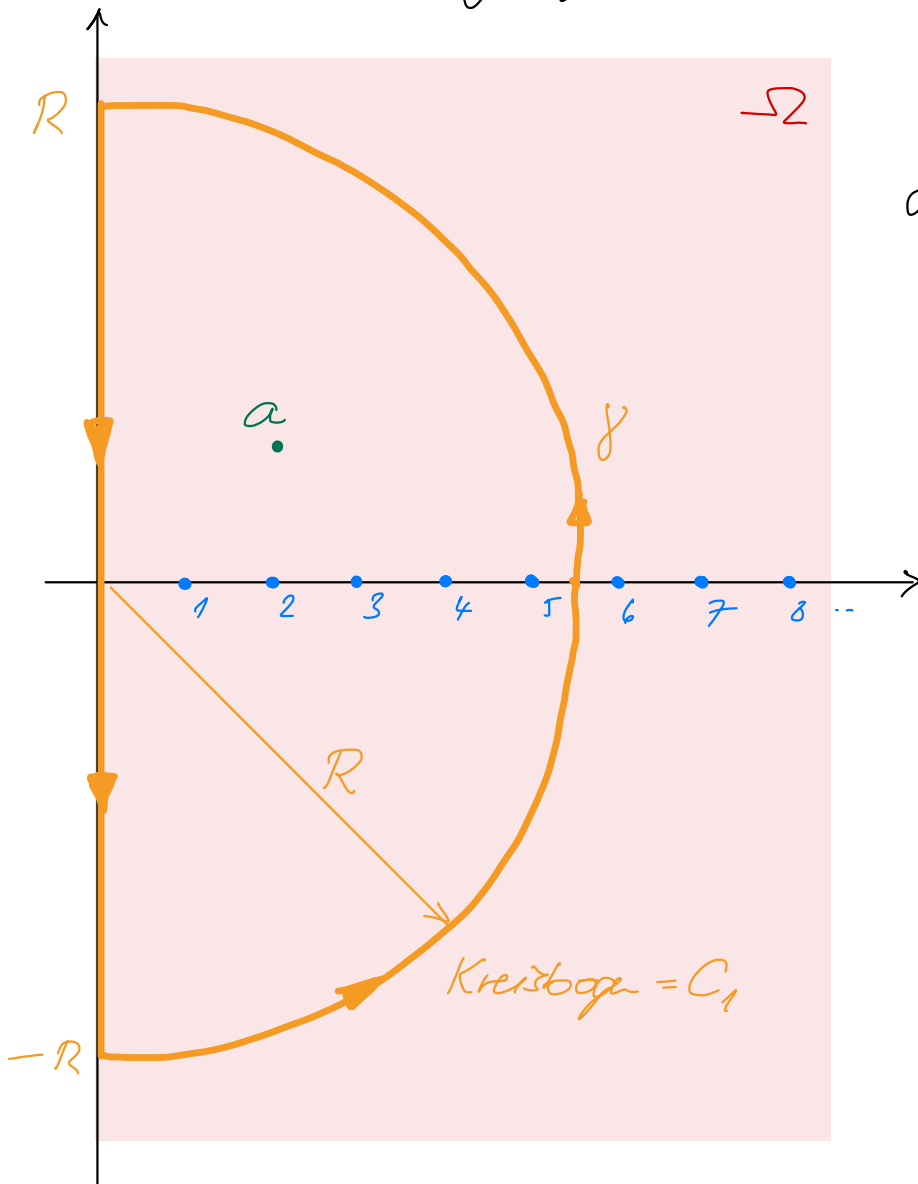


$$g_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)} dz$$

$g_n(z)$ holomorph

$$= \frac{f(a)}{(a-1)(a-2)\cdots(a-n)}$$

4. Schritt: Weg γ speziell wählen



$$g_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g_n(z)}{z-a} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_{C_1} \frac{g_n(z)}{z-a} dz}_{= I_1(R)}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_{-iR}^{iR} \frac{g_n(z)}{z-a} dz}_{= I_2(R)}$$

Plan:

① $\lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) = 0$

② $\lim_{R \rightarrow \infty} I_2(R) = g_n(a)$

Vorteil: das Integral $I_2(R)$ ist ein "gewöhnliches" Integral.

5. Schritt: Berechnung von $I_1(R)$ für $R \gg |a|$ und $R \gg n$?

$$|I_1(R)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)(z-1)(z-2)\dots(z-n)} dz \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot \cancel{2\pi R}}{(R-|a|)(R-n)^n} \rightarrow 0$$

für $R \rightarrow \infty$. D.h. das Integral über den Kreisbogen kann weggelassen werden.

6. Schritt: Abhängigkeit von $I_2(R)$ von n

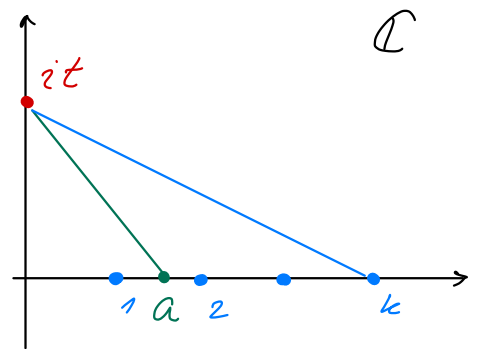
$$I_2(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{(it-a)(it-1)(it-2)\dots(it-n)} dt$$

Im Folgenden: $a \in \mathbb{R}, a > 1$

$$|it-a| = \sqrt{t^2+a^2} \geq \sqrt{1+t^2}$$

$$|it-k| = \sqrt{t^2+k^2} \geq k$$

$$\geq \sqrt{1+t^2}$$



$$\Rightarrow |g_n(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{\sqrt{1+t^2} \sqrt{1+t^2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} dt$$

$$= \frac{M}{2\pi n!} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}}_{=\pi} = \frac{M}{2n!}$$

7. Schritt: $f(a)$ abschätzen

$$g_n(a) = \frac{f(a)}{(a-1)(a-2)\dots(a-n)}$$

$$\Rightarrow |f(a)| = |(a-1)(a-2)\dots(a-n)| |g_n(a)|$$

$$\leq |(a-1)(a-2)\dots(a-n)| \cdot \frac{M}{2n!}$$

8. Schritt: $|(a-1)(a-2)\dots(a-n)|$ abschätzen

1 2 3 · [a] a [a]+1 · · · · n-1 n

$$\left. \begin{array}{c} \text{a-1} \quad \text{a-2} \quad \dots \quad \text{a-[a]} \\ \hline \hline \hline \hline \hline \end{array} \right\} = (a-1)(a-2)\dots(a-[a])$$

vergrössern

$$[a]! \left\{ \begin{array}{c} \text{3} \quad \text{2} \quad \text{1} \\ \hline \hline \hline \hline \hline \end{array} \right.$$

$$(a-[a]+1)\dots(a-n) = \left\{ \begin{array}{c} \hline \hline \hline \hline \hline \end{array} \right. \begin{array}{c} \dots \quad \text{a-n-1} \quad \text{a-n} \end{array}$$

vergrössern

$$(n-[a])! = \left\{ \begin{array}{c} \text{1} \\ \hline \hline \hline \hline \hline \end{array} \right. \begin{array}{c} \dots \quad \text{n-[a]-1} \quad \text{n-[a]} \end{array}$$

$$\Rightarrow |(a-1)(a-2)\dots(a-n)| \leq [a]! (n-[a])!$$

9. Schritt: Grenzwert $n \rightarrow \infty$

$$|f(a)| \leq \frac{[a]!(n-[a])!}{n!} \cdot \frac{M}{2}$$
$$= \binom{n}{[a]}^{-1}$$

Im Pascal-Dreieck liest man ab, dass

$$\binom{n}{[a]} \geq \binom{n}{1} = n \quad \text{für } n > a$$

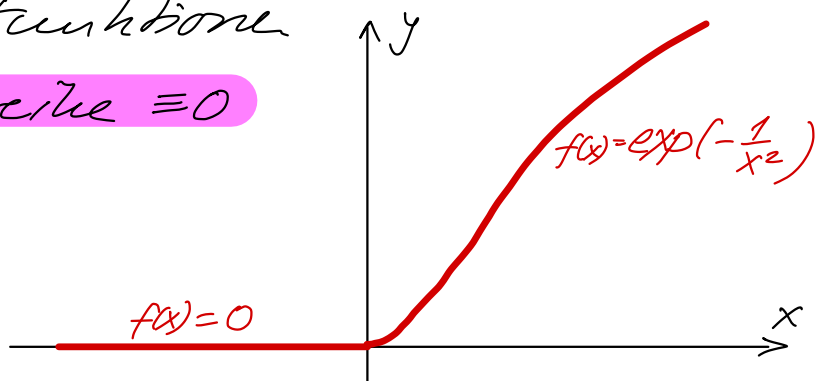
d.h.

$$|f(a)| \leq \frac{M}{2n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

10. Schritt: $f(a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}, a > 1$, dann sind auch alle Ableitungen $= 0$ und damit die **Potenzreihe** von $f(z) = 0$. □

Bemerkungen:

1. **gelb** hervorgehoben: hier braucht man, dass f holomorph ist
2. Es gibt **reelle** Funktionen $\neq 0$, deren **Potenzreihe $\equiv 0$** ist



Folgerung: Die Sinusfunktion $\sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist unbeschränkt!

Beweis: ① $\sin \pi z = 0$ für $z = 1, 2, 3, \dots$

② Wäre \sin beschränkt, folgt aus dem Satz von Carlson: $\sin(\pi z) = 0 \quad \forall z$

\implies Unsin, d.h. \sin kann nicht beschränkt sein □

Tatsächlich:

$$|\sin(it)| = \left| \frac{e^{i^2 t} - e^{-i^2 t}}{2i} \right| = \left| \frac{e^{-t} - e^t}{2} \right|$$

$$= |\sinh t| \rightarrow \infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$