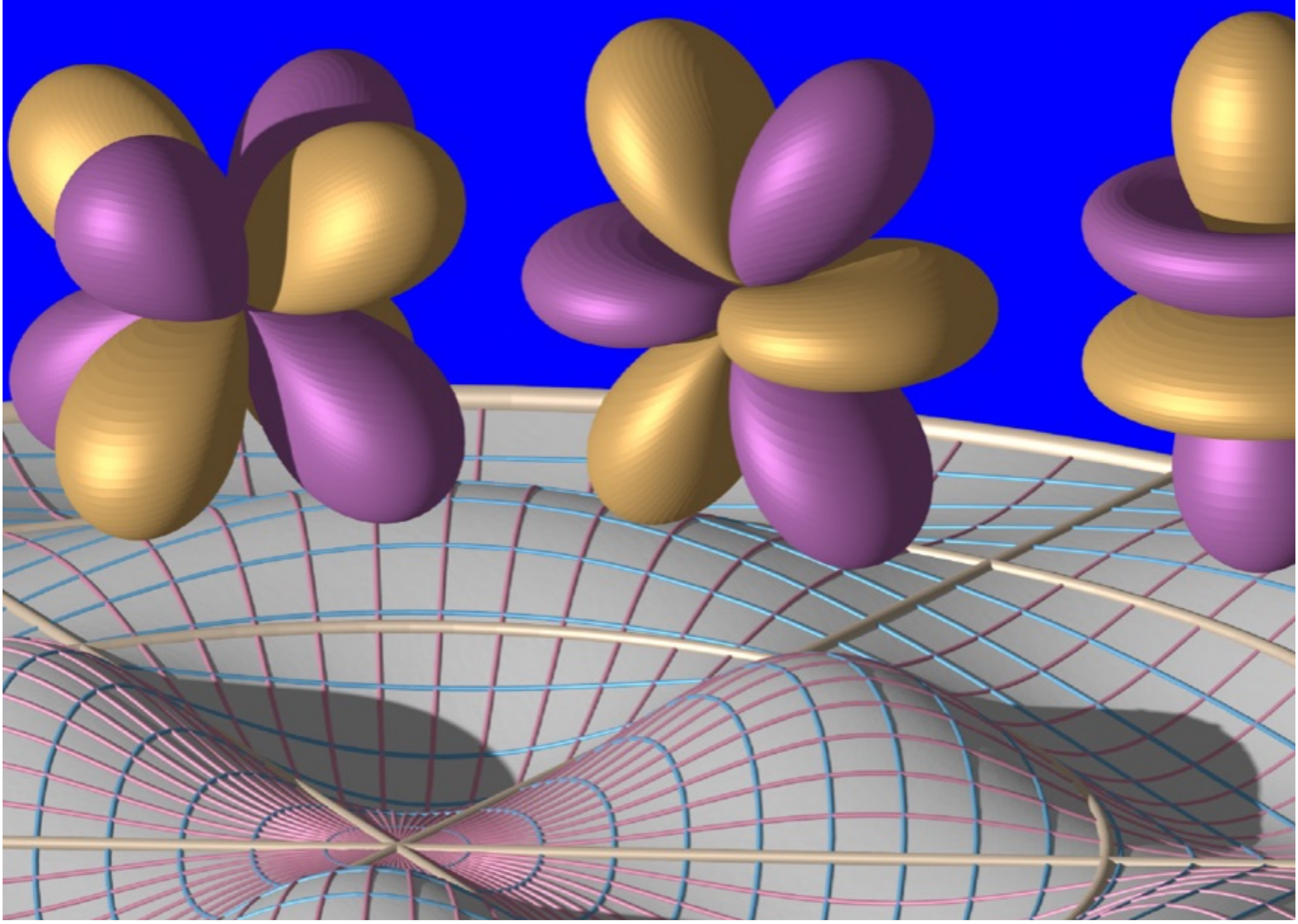
Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

1. Komplexe Funktionen



Sitzung 1: Komplexe Funktionen

Motivation:

- In der Analysis lernt man, mit beliebigen reellen Funktionen zu rechnen. Selbst die Kenntnis aller Ableitungen sagt nichts über den tatsächlichen weiteren Verlauf der Funktion aus.
  → reelle Funktionen sind "unvorhersehbar"
- Naturgesetze sind "vorhersehbar", man kann immer Koordinaten wählen, sodass die Funktionen einfach, meistens Polynome sehr niedrigen Grades sind.
  → Potenzreihen müssen reichen
- Taylorreihe: Ableitung an einer Stelle legen den weiteren Verlauf vollständig fest und können immer auch für komplexe Argumente ausgewertet werden
  → "natürliche" Funktionen sind $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

⟹ komplex diff'bare Funktionen

- sind ∞ oft diff'bar
- haben eine konvergente Potenzreihe
- durch Singularitäten festgelegt

} "starr"

1. Komplex differenzierbare Funktionen

Eine reelle Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst differenzierbar an der Stelle x_0, wenn es eine Zahl $f'(x_0)$ gibt derart, dass

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)}_{\text{lineare Ersatzfunktion}} + o(x-x_0)$$

$o(x-x_0)$ bedeutet: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{o(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0$

$\Leftrightarrow$ "lineares Verhalten wird durch $f'(x_0)$ vollständig erfasst"

Berechnung mit Grenzwert:

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Definition: Eine komplexe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heisst **differenzierbar** oder **holomorph** an der Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn es eine Zahl $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z-z_0) + o(|z-z_0|)$$

$$\Longleftrightarrow \quad f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

Zu beachten:

- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann man auch als reelle Funktionen schreiben:

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

- Ableitung einer reellen Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

mit $\boxed{4}$ unabhängigen Einträgen

- Ableitung $f'(z_0)$ ist eine komplexe Zahl mit $\boxed{2}$ Komponenten $\operatorname{Re} f'(z_0)$ und $\operatorname{Im} f'(z_0)$

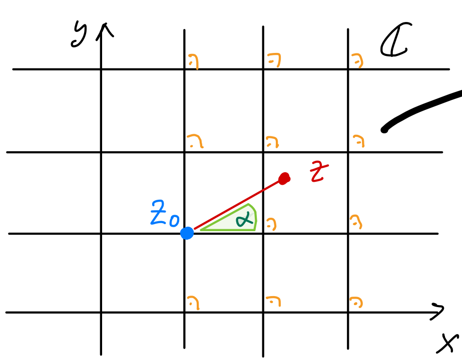
$\Rightarrow$ komplexe Diffbarkeit ist eine <u>zusätzliche</u> Einschränkung

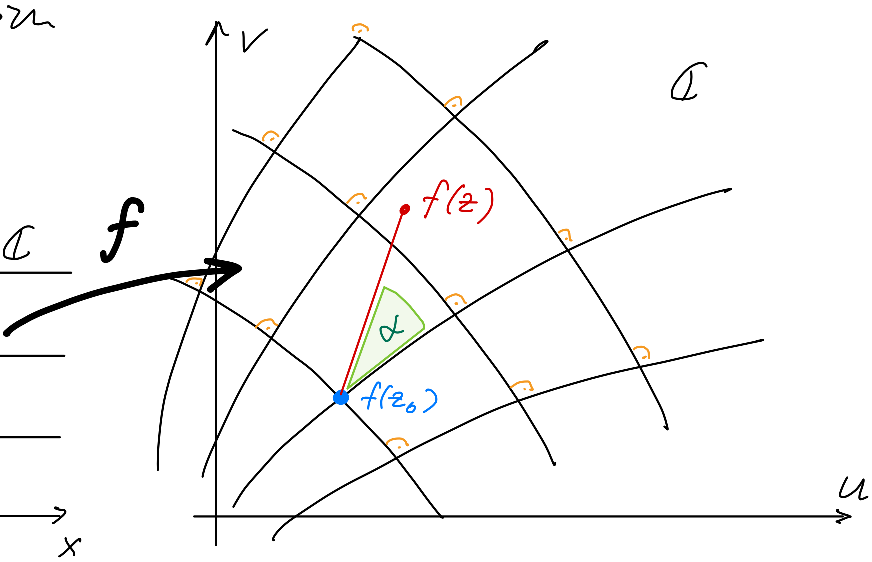
- geometrisch:

J = beliebige affine Transformation $J \in GL_2(\mathbb{R})$

$f'(z_0)$ = Drehstreckung

$\Rightarrow$ Winkel bleiben erhalten





2. Berechnung von $f'(z)$, Cauchy-Riemann-Dgl.

Wähle eine beliebige Richtung $w \in \mathbb{C}$, berechne

$$f'(z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + wt) - f(z_0)}{wt}$$

Wichtig: - muss für jedes w dasselbe geben

- "reeller" Grenzwert, Richtungsableitung.

a) reelle Richtung: $w = 1$

$$f'(z_0) = \frac{d}{dx}\left(u(x,y) + i v(x,y)\right)\Big|_{x+iy=z_0}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

b) komplexe Richtung: $w = i$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i \Delta y}$$

$$= \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

<u>Satz (Cauchy-Riemann)</u>: $f(z)$ holomorph genau dann, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Beispiele:

① $f(z) = z^n$

$$f(z_0+wt) = (z_0+wt)^n = z_0^n + n z_0^{n-1} wt + o(t)$$
$$= f(z_0) + \underbrace{n z_0^{n-1}}_{=f'(z_0)} \cdot wt + o(t)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1} \qquad \circ$$

② $f(z) = e^z$

$$f(z_0+wt) = e^{z_0+wt} = e^{z_0} e^{wt}$$
$$= e^{z_0}\Big(1 + wt + \underbrace{\tfrac{1}{2}(wt)^2 + \dots}_{o(t)}\Big)$$
$$= f(z_0) + \underbrace{e^{z_0}}_{f'(z_0)} \cdot wt + o(t)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dz} e^z = e^z \qquad \circ$$

Ableitungsregeln: $f'(z) = \frac{d}{dx} f(z+x)\Big|_{x=0}$, $x \in \mathbb{R}$

d.h. $\frac{d}{dz} = \frac{d}{dx}$, reelle Ableitung mit Werten in $\mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ alle Regeln bleiben erhalten

1) $\frac{d}{dz}(f+g) = f' + g'$, $\frac{d}{dz}(\lambda f) = \lambda f'$ (linear)

2) $\frac{d}{dz}(f \cdot g) = f'g + fg'$ Produktregel

3) $\frac{d}{dz} \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ Quotientenregel

Satz: $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ holomorph
$\Longrightarrow$ u und v sind harmonisch

Beweis: harmonisch: $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ $\quad(*)$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\overset{CR}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\overset{CR}{=} -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \square$$

Review: J = 4 unabhängige Ableitungen
$+$ 2 Bedingungen ($2\times$ CR oder $(*)$)

$f'(z)$ = 2 unabhängige Ableitungen

Beispiel: Komplexe Konjugation

$f: z \longmapsto \bar{z}$, d.h. $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$

Cauchy-Riemann: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$

$\Longrightarrow$ d.h. nicht holomorph

trotzdem: $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$

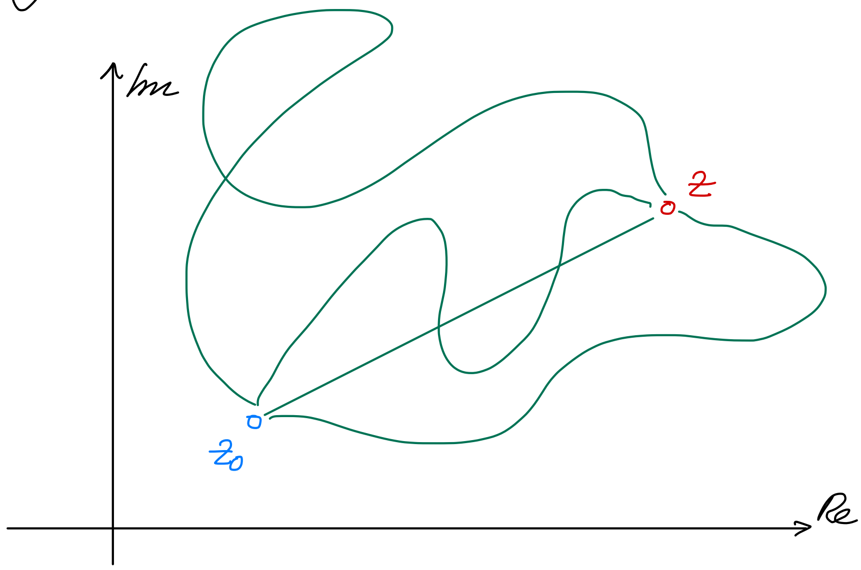
3. Integration komplexer Funktionen: Wegintegrale

Gegeben: Ableitung $F'(z) = f(z)$

Aufgabe: Rekonstruiere $F(z)$ mit $F(z_0) = w_0$

Reelles Analogon: Stammfunktion verwenden!

Problem:



In $\mathbb{C}$ gibt es ∞ viele Wege von z_0 nach z!

In $\mathbb{R}$ gibt es nur einen Weg von a nach b, daher ist

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

eindeutig bestimmt.

Zwei Teilprobleme:

1. Was für eine Art Integral?
2. Unabhängigkeit von der Wahl des Weges.

Definition: Weg von z_0 nach z:

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto \gamma(t)$$

mit $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z$

Definition: Wegintegral

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

Da $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ reell ist, ist das Integral wohldefiniert.

Strecke von z_0 nach z_1

<u>Beispiel:</u>

$$f(z) = z^n$$

$$\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad t \in [0,1]$$

$$\dot{\gamma}(t) = z_1 - z_0$$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 \overbrace{(\underbrace{z_0 + t(z_1 - z_0)}_{\gamma(t)})^n}^{f(\gamma(t))} \overbrace{(z_1 - z_0)}^{\dot{\gamma}(t)}\, dt$$

$$= \left[\boxed{\frac{1}{n+1}(z_0 + t(z_1 - z_0))^{n+1} \frac{1}{\cancel{z_1 - z_0}}} \cancel{(z_1 - z_0)} \right]_0^1$$

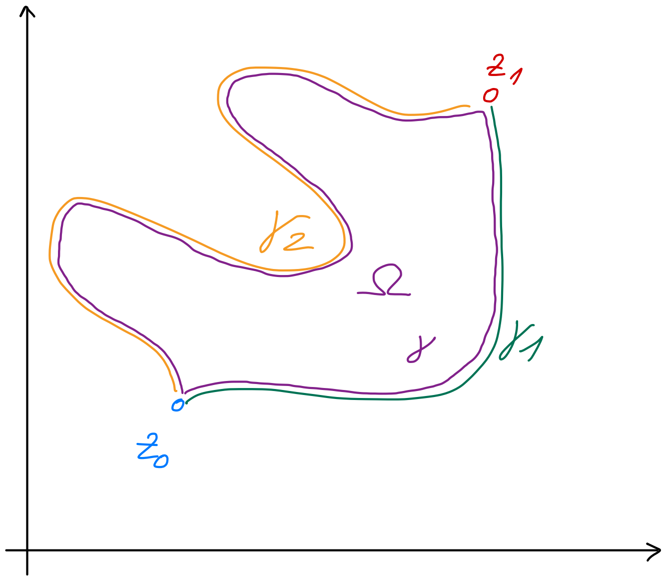
Stammfunktion einer Funktion einer reellen Variable

$$= \frac{1}{n+1}\left(z_1^{n+1} - z_0^{n+1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$$

Offen: Wegunabhängigkeit?

Idee: γ_1, γ_2 Wege zu einem geschlossenen Weg γ zusammensetzen



$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \overset{?}{=} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \oint_{\gamma} f(z)\,dz$$

Satz: f holomorph, dann ist $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschlossenen Wege

Beweis:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u(x,y) + i v(x,y))(dx + i\,dy)$$

$$= \int_\gamma (u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy) + i\int_\gamma (u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx)$$

Satz von Green

$$= \iint_\Omega -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy + i\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$= \underbrace{\iint_\Omega -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}}_{=0}\,dx\,dy + i\underbrace{\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}}_{=0}\,dx\,dy$$

CR   CR

$$= 0 \qquad \square$$

Beispiel: Einheitskreis $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ $t \in [0,1]$

$$f(z) = \frac{1}{z} \implies \oint_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 e^{\cancel{-2\pi i t}} \cdot 2\pi i\, e^{\cancel{2\pi i t}}\,dt$$

$$= 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i$$

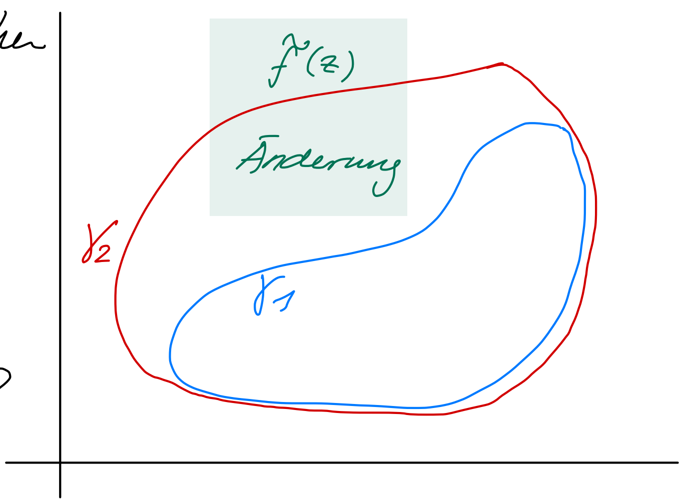
Warum? $f(z)$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $z = 0$. Im Beweis wurden die CR-Dgl auch an dieser Stelle verwendet.

Zur Erinnerung:

Satz (Green): f, g diffbar im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Rand $\gamma = \partial\Omega$. Dann gilt

$$\int_\gamma f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \iint_\Omega \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\;dx\,dy$$

Holomorphe Funktionen sind "starr": es ist nicht möglich, sie ein bisschen zu ändern in $\tilde{f}(z)$



$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

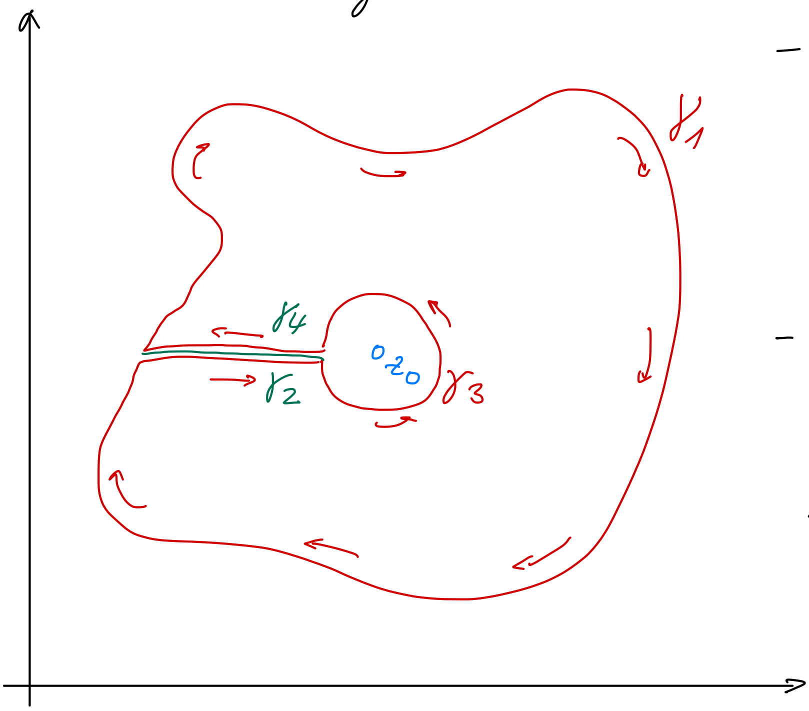
$$0 = \int_{\gamma_2} \tilde{f}(z)\,dz \quad ???$$

4. Cauchy-Integralformel

$f(z)$ holomorph in einer Umgebung, dann ist $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ für einen geschlossenen Weg, der z_0 umschliesst.

$g(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ ist holomorph ausser im Punkt z_0.

Berechne: $\displaystyle\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$



- Die beiden Segmente γ_2 und γ_4 heben sich weg
- Im Inneren des Weges ist $f(z)/(z-z_0)$ holomorph

$$\Rightarrow \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

$$\Longrightarrow -\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\, dz = \int_{\gamma_3} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\, dz$$

d.h. man muss das Integral nur entlang eines Kreises um z_0 berechnen können.

Parametrisierung des Weges: $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$

$\dot\gamma(t) = rie^{it}$

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{\cancel{re^{it}}} \cancel{r}i\cancel{e^{it}}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z_0) + f'(z_0)\cdot re^{it} + o(r)\,dt$$

$$= if(z_0)\int_0^{2\pi} dt + if'(z_0)\underbrace{r\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt}_{=0} + i\int_0^{2\pi} o(r)\,dt$$

$$= 2\pi i f(z_0) + i\,o(r)$$

$$\Longrightarrow \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

<u>Satz:</u> Cauchy-Integralformel. f holomorph, γ ein geschlossener Weg, der z_0 im Gegenuhrzeigersinn einmal umläuft. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

5. Cauchy-Formel für die Ableitungen

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz, \quad \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d}{dz_0} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{(z - z_0)^2} f(z) dz$$

Allgemein: n-te Ableitung

$$\frac{d^n}{dz_0^n} z_0^{-1} = \frac{d^{n-1}}{dz_0^{n-1}} (-1) z_0^{-1-1}$$

$$= \frac{d^{n-2}}{dz_0^{n-2}} (-1)^2 \, 2 \cdot z_0^{-3}$$

$$= \frac{d^{n-3}}{dz_0^{n-3}} (-1)^3 \, 2 \cdot 3 \; z_0^{-4} =$$

$$\ldots = \frac{d}{dz_0} (-1)^{n-1} \, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \, z_0^{-n}$$

$$= (-1)^n \, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \; z_0^{-n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d^n}{dz_0^n} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \, n! \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz} \quad \text{(Cauchy)}$$

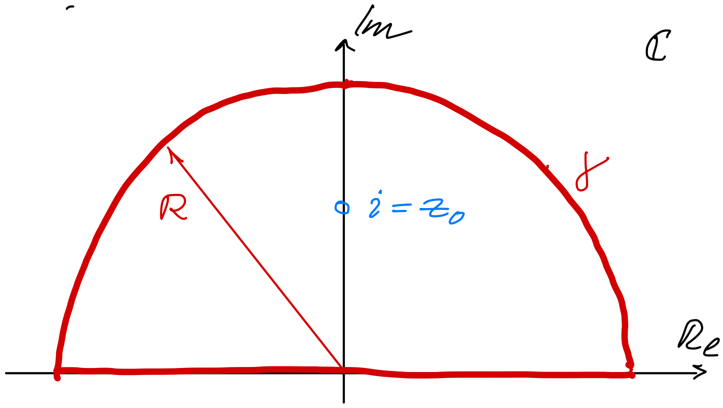
Folgerungen: f holomorph

1. f ist ∞ oft differenzierbar

2. $f(z_0)$ ist vollständig bestimmt durch die Werte auf der Kurve γ.

Anwendung: Residuenrechnung

Aufgabe: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = ?$



$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = \int \frac{dz}{(z-\underbrace{i}_{z_0})\underbrace{(z+i)}_{f(z)}}$$

(with $f(z) = \frac{1}{z+i}$)

$$= 2\pi i \, f(z_0) = \frac{2\pi i}{i+i} = \pi$$

andererseits

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{\text{Kreis}} \frac{dz}{z^2+1} = I_1(R) + I_2(R)$$

Grenzübergang $R \to \infty$: $\quad I_1 \longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

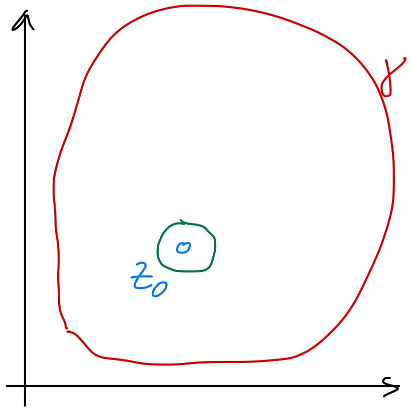
$$|I_2(R)| \leq \int_{\text{Kreis}} \left| \frac{1}{z^2+1} \right| |dz| \leq \underbrace{\pi R}_{\text{Bogenlänge}} \cdot O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{R}\right) \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi}$$

6 Nullstellen und Pole zählen

- Nullstelle bei z_0: $f(z) = a_n (z-z_0)^n + o(z-z_0)^{n+1}$



$$f'(z) = a_n n (z-z_0)^{n-1} + o(z-z_0)^n$$

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \oint_\gamma \frac{a_n n (z-z_0)^{n-1} + o}{a_n (z-z_0)^n + o}\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{a_n}\, n\, e^{\cancel{i(n-1)t}}}{\cancel{a_n}\, e^{\cancel{int}}}\, e^{\cancel{it}}\, dt = 2\pi i \cdot n$$

$\Rightarrow$ Das Integral $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ zählt Nullstelle von f mit Vielfachheit innerhalb γ

- Pol n-ter Ordnung bei z_0: $f(z) = a_n (z-z_0)^{-n} + o$

$$f'(z) = -a_n n (z-z_0)^{-n-1} + o$$

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \oint_\gamma \frac{-\cancel{a_n} n (z-z_0)^{\cancel{-n}-1} + o}{\cancel{a_n} (z-z_0)^{\cancel{-n}} + o}\, dz$$

$$= -n \oint_\gamma \frac{1 + \text{holomorph } o(z-z_0)}{z-z_0}\, dz$$

$$= -2\pi i \cdot n$$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ zählt Pole mit Ordnung negativ

Satz:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \#\,\text{Nullstellen mit Vielfachheit} - \#\,\text{Pole mit Ordnung}$$

7. Potenzreihen

Geometrische Reihe: $1+q+q^2+\ldots = \frac{1}{1-q}$

allgemeiner:

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{z_0}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{z_0}{z}+\frac{z_0^2}{z^2}+\frac{z_0^3}{z^3}+\ldots\right)$$

Einsetzen in Cauchy-Integralformel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_0}{z}\right)^k dz$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}}\right)}_{a_k} z_0^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$$

$\Longrightarrow$ Jede holomorphe Funktion hat eine konvergente Potenzreihe

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{(Cauchy)}$$

$\Longrightarrow$ $f(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z_0^k$ Taylorreihe

analytisch $\hat{=}$ hat konvergente Potenzreihe

$\Longrightarrow$ holomorphe Funktionen sind analytisch

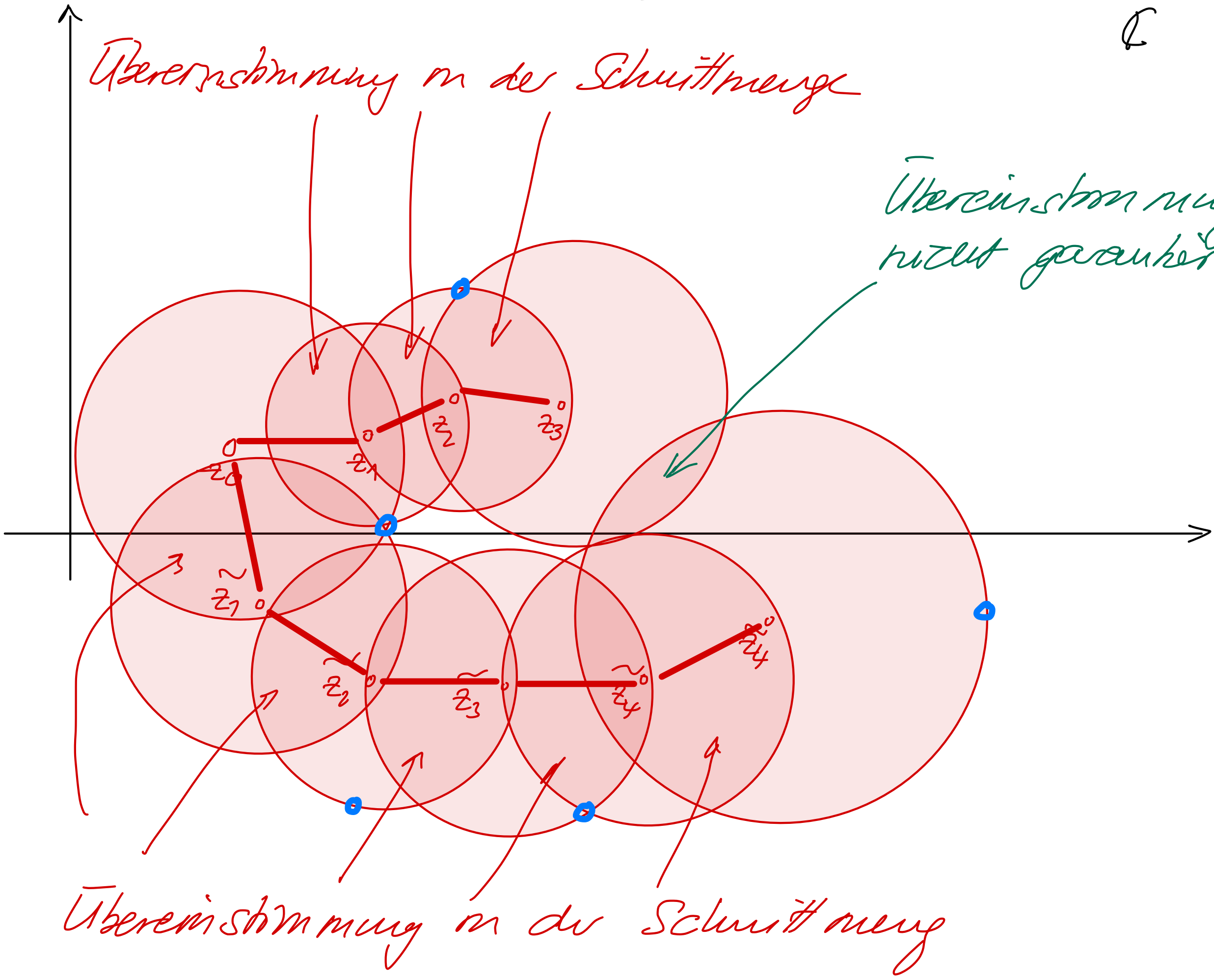
8. Analytische Fortsetzung

- Ableitungen $f^{(k)}(z_0)$ legen $f(z)$ in einem Kreis um z_0 eindeutig fest
- Ableitungen $f^{(k)}(z_1)$ legen $f(z)$ in einem Kreis um z_1 eindeutig fest

$\vdots$

- Ableitungen $f^{(k)}(z_i)$ legen $f(z)$ in einem Kreis um z_i eindeutig fest

analytische Fortsetzung entlang $z_0 - z_1 - z_2 - z_3 - \ldots$



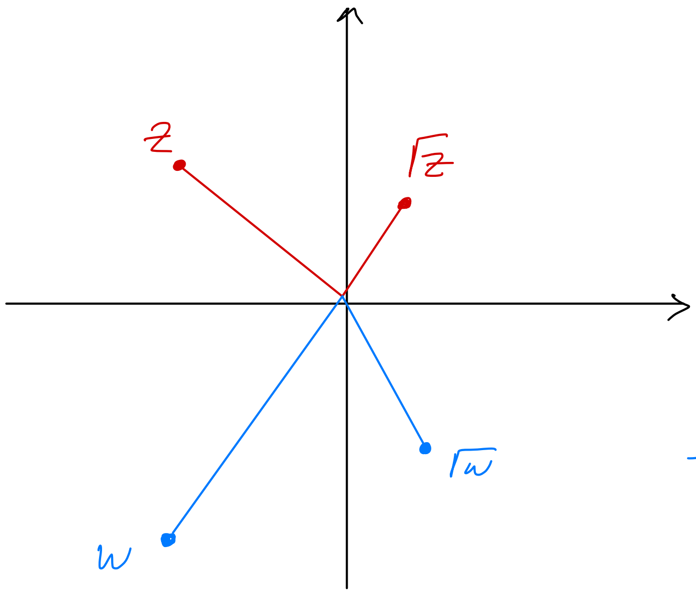
Konvergenzradius: bis zum nächsten Pol o

Verschiedene Wege können zu verschiedenen Fkt am Ende der Kette führen

Beispiele:

① Wurzelfunktion:

$$z = re^{i\varphi} \longmapsto \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi \in (-\pi,\pi)$$



$-1 = e^{i\pi} \longmapsto e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$-1 = e^{-i\pi} \longmapsto e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Keine Übereinstimmung auf der negativen reellen Achse $\longrightarrow$ zweiwertige Fkt

② Logarithmusfunktion

$$\log z = \log re^{i\varphi} = \log r + i\varphi$$

Bei analytischer Fortsetzung entlang eines Weges um 0 nimmt der Imaginärteil bei jedem Umlauf um $2\pi i$ zu $\rightarrow$ mehrwertige Fkt mit unendlich vielen Werten.

9. Der Satz von Carlson

Holomorphe Funktionen sind durch die Werte in "wenigen" diskreten Punkten "im Wesentlichen" festgelegt.

wenige z.B. in $z \in \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$

im Wesentlichen Wenn f_1 und f_2 auf $z \in \mathbb{N}$ die gleichen Werte habe: $f_1(z) = f_2(z)\ \forall z \in \mathbb{N}$, dann ist entweder $f = g$ oder f g unbeschränkt

Salopp: Wenn sich zwei Funktionen unterscheiden, dann aber "richtig"

Satz (Carson): $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt* mit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$ und $f(n) = 0\ \forall n = 1, 2, \ldots$, dann ist $f(z) = 0$ für $z \in \Omega$. * $|f(z)| \leq M$

Anwendung: $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ mit $f(z) = 0\ \forall z = 1, 2, 3, \ldots$ und $f(z)$ beschränkt, dann ist $f(z) = 0\ \forall z \in \Omega$ und damit auch

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \text{ mit } \operatorname{Re} z \geq 0$$

Beweis:

1. Schritt: Da f holomorph ist, gibt es in jedem Punkt eine Potenzreihe. Bei jeder Nullstelle z_0 von f:

$$f(z) = \underbrace{\cancel{f(z_0)}}_{=0} + f'(z_0)(z-z_0) + \dots$$

Dann ist auch

$$\frac{f(z)}{z-z_0} = f'(z_0) + f''(z_0)\frac{(z-z_0)}{2!} + \dots$$

holomorph!

2. Schritt: Konstruiere die Funktion

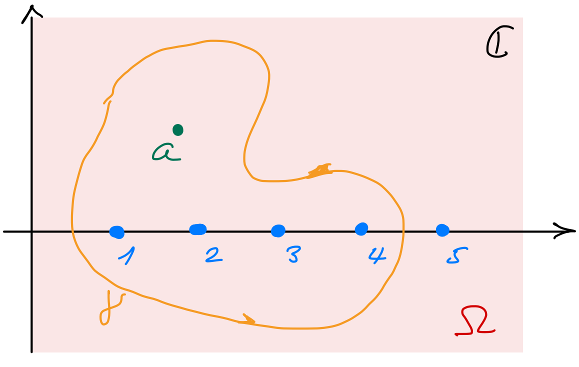
$$g_n(z) = \frac{f(z)}{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)},$$

sie ist holomorph, da $1, 2, \dots, n$ Nullstelle von $f(z)$ sind.

3. Schritt: Cauchy-Integralformel für die Funktion $g_n(z)$:

$$g_n(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g_n(z)}{z-a}\,dz$$

wobei die Kurve γ den Punkt a im Gegenuhrzeigersinn umläuft

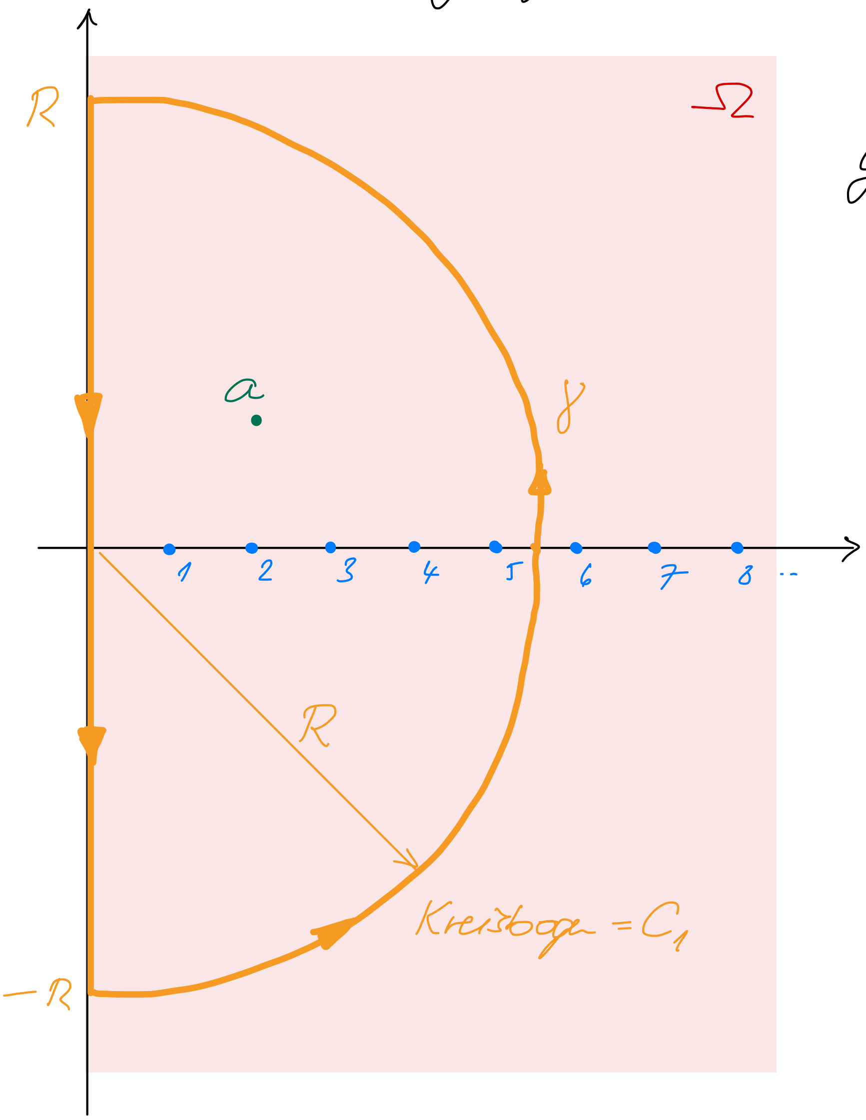


$$g_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\boxed{f(z)}}{(z-a)\,\boxed{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}}\,dz$$

$g_n(z)$ holomorph

$$= \frac{f(a)}{(a-1)(a-2)\cdots(a-n)}$$

4. Schritt: Weg γ speziell wählen



$$g_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g_n(z)}{z-a}\,dz$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{g_n(z)}{z-a}\,dz}_{=I_1(R)}$$

$$\underbrace{- \frac{1}{2\pi i} \int_{-iR}^{iR} \frac{g_n(z)}{z-a}\,dz}_{=I_2(R)}$$

Plan:

1. $\lim\limits_{R\to\infty} I_1(R) = 0$

2. $\lim\limits_{R\to\infty} I_2(R) = g_n(a)$

Vorteil: das Integral $I_2(R)$ ist ein "gewöhnliches" Integral.

<u>5. Schritt</u>: Berechnung von $I_1(R)$ für $R \gg |a|$ und $R \gg n$?

$$|I_1(R)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}\, dz \right|$$

$$\leq \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{M \cdot \cancel{2\pi} R}{(R-|a|)(R-n)^n} \longrightarrow 0$$

für $R \to \infty$. D.h. das Integral über den Kreisbogen kann weggelassen werden.

<u>6. Schritt</u>: Abhängigkeit von $I_2(R)$ von n

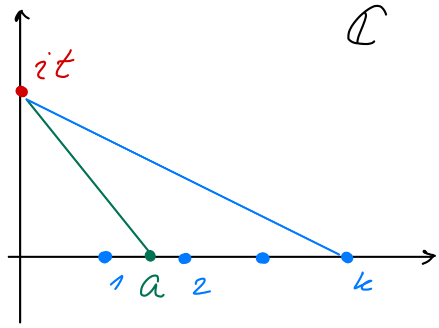
$$I_2(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{(it-a)(it-1)(it-2)\cdots(it-n)}\, dt$$

Im Folgenden: $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$

$$|it - a| = \sqrt{t^2 + a^2} \geq \sqrt{1+t^2}$$

$$|it - k| = \sqrt{t^2 + k^2} \geq k$$

$$\geq \sqrt{1+t^2}$$



$$\Rightarrow |g_n(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+t^2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}\, dt$$

$$= \frac{M}{2\pi n!} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}}_{= \pi} = \frac{M}{2\, n!}$$

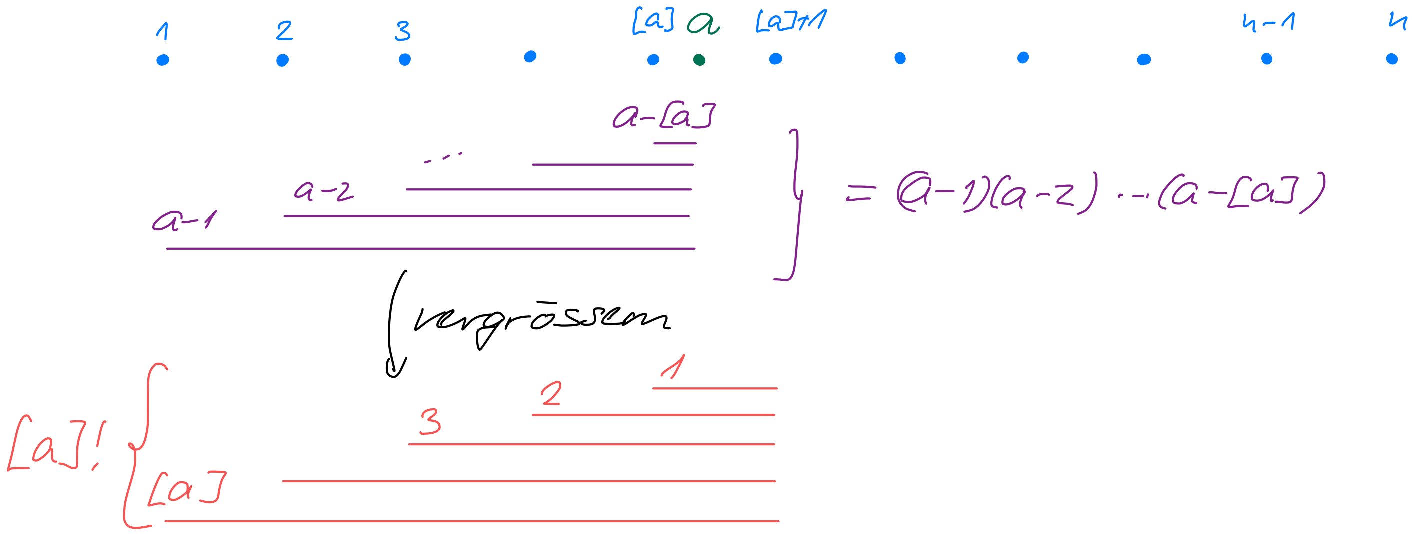
7. Schritt: $f(a)$ abschätzen

$$g_n(a) = \frac{f(a)}{(a-1)(a-2)\cdots(a-n)}$$

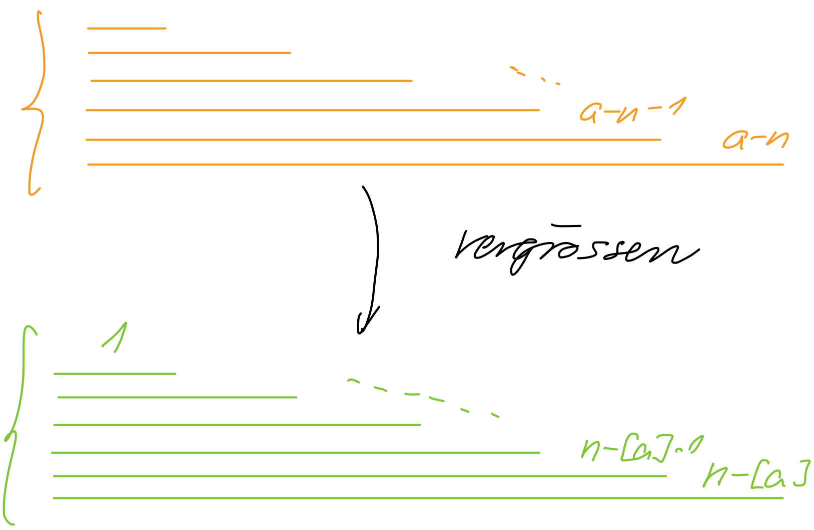
$$\Rightarrow |f(a)| = |(a-1)(a-2)\cdots(a-n)|\,|g_n(a)|$$

$$\leq |(a-1)(a-2)\cdots(a-n)| \cdot \frac{M}{2n!}$$

8. Schritt: $|(a-1)(a-2)\cdots(a-n)|$ abschätzen



$$(a-[a]+1)\cdots(a-n) =$$



$$(n-[a])! =$$

$$\Rightarrow |(a-1)(a-2)\cdots(a-n)| \leq [a]!\,(n-[a])!$$

9. Schritt: Grenzwert $n \to \infty$

$$|f(a)| \le \underbrace{\frac{[a]!\,(n-[a])!}{n!}}_{=\binom{n}{[a]}^{-1}} \cdot \frac{M}{2}$$

Im Pascal-Dreieck liest man ab, dass

$$\binom{n}{[a]} \ge \binom{n}{1} = n \quad \text{für } n > a$$

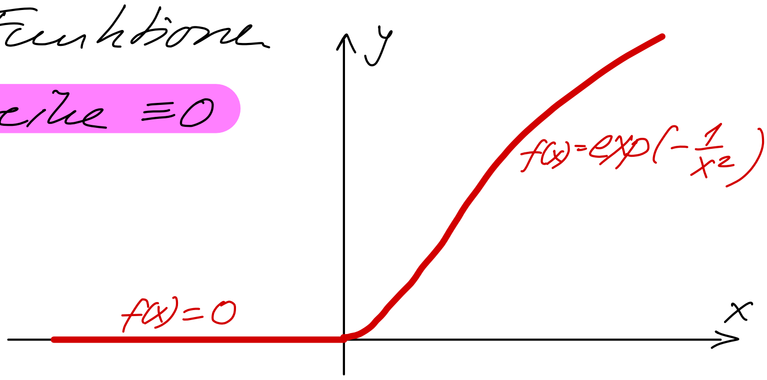
d.h.

$$|f(a)| \le \frac{M}{2n} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

10. Schritt: $f(a) = 0 \;\forall a \in \mathbb{R}, a > 1$, dann sind auch alle Ableitungen $= 0$ und damit die Potenzreihe von $f(z) = 0$. $\square$

Bemerkungen:

1. gelb hervorgehoben: hier braucht man, dass f holomorph ist
2. Es gibt reelle Funktionen $\neq 0$, deren Potenzreihe $\equiv 0$ ist



<u>Folgerung</u>: Die Sinusfunktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist unbeschränkt!

Beweis: ① $\sin \pi z = 0$ für $z = 1, 2, 3, \ldots$

② Wäre sin beschränkt, folgt aus dem Satz von Carlson: $\sin(\pi z) = 0 \ \forall z$

$\Longrightarrow$ Unsinn, d.h. sin kann nicht beschränkt sein $\square$

<u>Tatsächlich</u>:

$$|\sin(it)| = \left| \frac{e^{i^2 t} - e^{-i^2 t}}{2i} \right| = \left| \frac{e^{-t} - e^{t}}{2} \right|$$

$$= |\sinh t| \to \infty \quad \text{für } t \to \infty$$