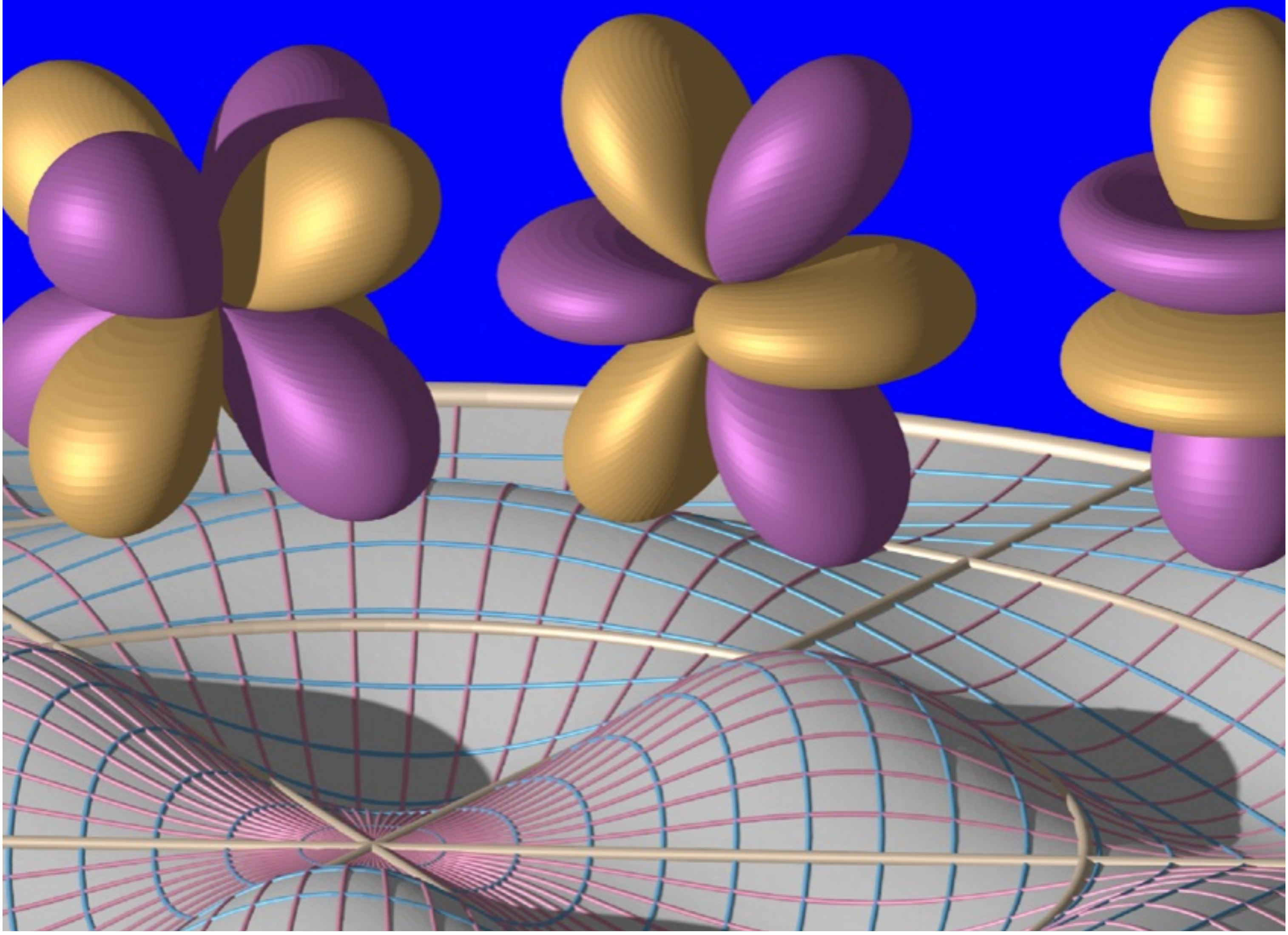
Mathematisches Seminar

# Spezielle Funktionen

## 2. Gamma- und Beta-Funktionen



## Inhalt

# 1. Fakultät $x!$ für $x \in \mathbb{R}$?

Definition: die Fakultäts-Funktion

$$\bullet ! : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto n!$$

ist rekursiv definiert durch

$$n! = n \cdot (n-1)! \qquad n > 0$$
$$0! = 1$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \cdot 0! = 1 \\ 2! &= 2 \cdot 1! = 2 \\ 3! &= 3 \cdot 2! = 6 \\ 4! &= 4 \cdot 3! = 24 \end{aligned} \quad \Big\downarrow$$

exponentielles Wachstum

Näherungsformel von Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ für grosse $n$, i.e. $n!$ wächst wie $n^n$.

Anwendungen:

a) Kombinatorik: Anzahl von Permutationen von $n$ Objekten: $|S_n| = n!$

symmetrische Gruppe
Permutationsgruppe

b) Taylor-Reihen:

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

c) Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ \dots\ \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\ \cdots\ k}$$

Anzahl Auswahlen von $k$ Elementen aus $n$

(Matlab: nchoosek(n,k) )

d) Binomialreihe:

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{8!}x^3 + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}}_{=:\binom{\alpha}{k} \text{ für } \alpha\in\mathbb{R} \text{ beliebig!}} x^k$$

verallgemeinerte Binomialkoeffizienten

z.B: $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\dots$

Fragen: 1. Verallgemeinerung $n! \longrightarrow x!,\ x\in\mathbb{R}$
Rekursionsformel soll erhalten bleiben
$\longrightarrow$ Gamma-Funktion

2. Verallgemeinerung der Binomialreihe
$\longrightarrow$ Pochhammer-Symbole
$\longrightarrow$ Beta-Funktion

## 2. Pochhammer - Symbole

Fakultät: $n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{n \text{ aufsteigende Faktoren}}$

Start: 1

Verallgemeinerung:

$$n! = 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) \cdot \ldots \cdot (1+n-1)$$

$$\downarrow$$

$$(a)_n = a \cdot (a+1)(a+2) \cdot \ldots \cdot (a+n-1)$$

**Definition:** Pochhammer - Symbol

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \cdot \ldots \cdot (a+n-1)$$

$n$ aufsteigende Faktoren

Spezialfall: $(1)_n = n!$

Anwendung: verallgemeinerte Binomialkoeffizient:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)\cdots(-\alpha+k-1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \frac{(\alpha)_k}{k!}$$

Rekursionsformel:

$$(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$$
$$(a)_0 = 1$$

$$\Longrightarrow \quad (a)_1 = (a)_{0+1} = (a+0)(a)_0 = a$$
$$(a)_2 = (a)_{1+1} = (a+1)(a)_1 = (a+1)a$$
$$\vdots$$

Man beachte auch die Ähnlichkeit zur Funktionalgleichung der Fakultät:

$$n! = n\,(n-1)!$$

$$(n+1)! = (n+1)\; n! \qquad\qquad (a)_{n+1} = (a+n)\,(a)_n$$

passt nicht, Argument verschieben $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Gamma(n+1) = n\;\Gamma(n)$$

passt!

Übungsaufgaben:

1. $\left(\frac{1}{2}\right)_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\, n!}$

2. $(-n)_k = (-1)^k \dfrac{n!}{(n-k)!}$

3. Schreibe $\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot (k+2)(k+3)}$ mit Pochhammer-Symbolen (wie in 1. und 2.)

# 3. Gamma-Funktion als Grenzwert

**Aufgabe:** finde eine Funktion $\Gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad (n+1)! = (n+1)\,n!$$
$$\Gamma(1) = 1 \qquad 0! = 1$$

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Heuristische Beobachtungen:

1. Es werden viele Faktoren nötig sein
2. Endliche Anzahl wird nicht reichen, beim Sprung zur nächsten Anzahl würde sich die Funktion auf unstetige oder nicht diff'bare Art ändern
3. Ohne einen Grenzprozess geht es nicht!

Strategie:

- "grosse" Fakultät $n!$, $n \to \infty$ bauen
- überzählige Faktoren $> x$ mit Pochhammer-Symbolen wieder wegkürzen.
- $n \to \infty$
- $x \in \mathbb{R}$ zulassen

Durchführung dieser Strategie:

$$x! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot x$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x\cdot(x+1)\cdots(x+n)}{(x+1)\cdots(x+n)}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdots(n+x)}{(x+1)\cdots(x+n)}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)_x}{(x+1)_n}$$

nur für ganzzahliges $x$ definiert

"Trick"
$$= \frac{n!\,n^x}{(x+1)_n}\ \underbrace{\frac{(n+1)_x}{n^x}}_{\to 1} \qquad (*)$$

auch für $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ definiert!

für $x\in\mathbb{N}$ (Hoffnung)

**Definition**

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^{x-1}}{(x)_n}$$

Grenzwert-Definition der $\Gamma$-Funktion

Zu überprüfen:

1. Rekursionsformel $\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. Startwert $\quad \Gamma(1) = 1$
3. Konvergenz

**Lemma:** $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)_x}{n^x} = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

Beweis:

$$\frac{(n+1)_x}{n^x} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+x)}{n\cdot n \cdots n}$$

$$= \Big(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Big)\Big(1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}\Big)\cdots\Big(1+\underbrace{\frac{x}{n}}_{\to}\Big)$$

$$\to 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

Grenzübergang zulässig, da nur endlich viele ($x = \text{const}$) Faktoren vorhanden □

**Satz:** Für $x \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(x) = (x-1)!$

Beweis: unmittelbar aus der Definition und dem "Trick" (*) □

Ist damit die Aufgabe gelöst?

Anfangsbedingung:

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{1-1}}{(1)_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot 1}{n!} = 1 \checkmark$$

$$\Gamma(2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{2-1}}{(2)_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\cancel{2}\cdots\cancel{n}\cdot n}{\cancel{2}\cdots\cancel{n}\cdot(n+1)} = 1 \checkmark$$

Funktionalgleichung?

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{x+1-1}}{(x+1)_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x \cdot n! \cdot n^x}{x \cdot (x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$= x \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{x-1}}{(x)_n}}_{=\Gamma(x)} \cdot \underbrace{\frac{n}{(x+n)}}_{\to 1} = x\,\Gamma(x)$$

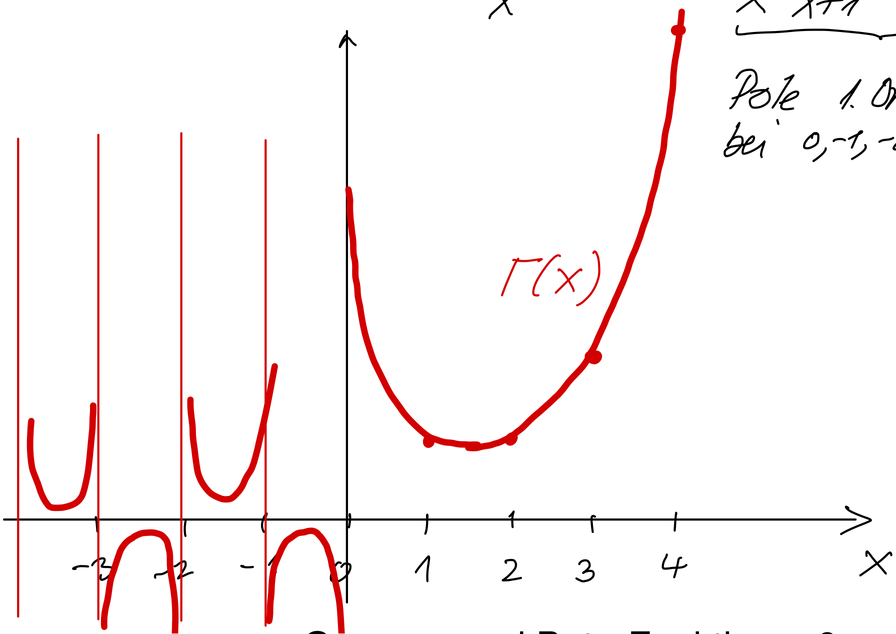
□

Die Grenzwertdefinition liefert also eine Lösung der gegebenen Funktionalgleichung.

Einige Werte:

- $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n>0$
- $\lim_{x\to n} \Gamma(x) = \pm\infty \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ n \leq 0$

Warum? $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) = \underbrace{\frac{1}{x}\,\frac{1}{x+1} \cdots \frac{1}{x+k}}_{\text{Pole 1. Ordnung bei } 0,-1,-2,\ldots} \underbrace{\Gamma(x+k)}_{\text{stetig für } k > |x|}$



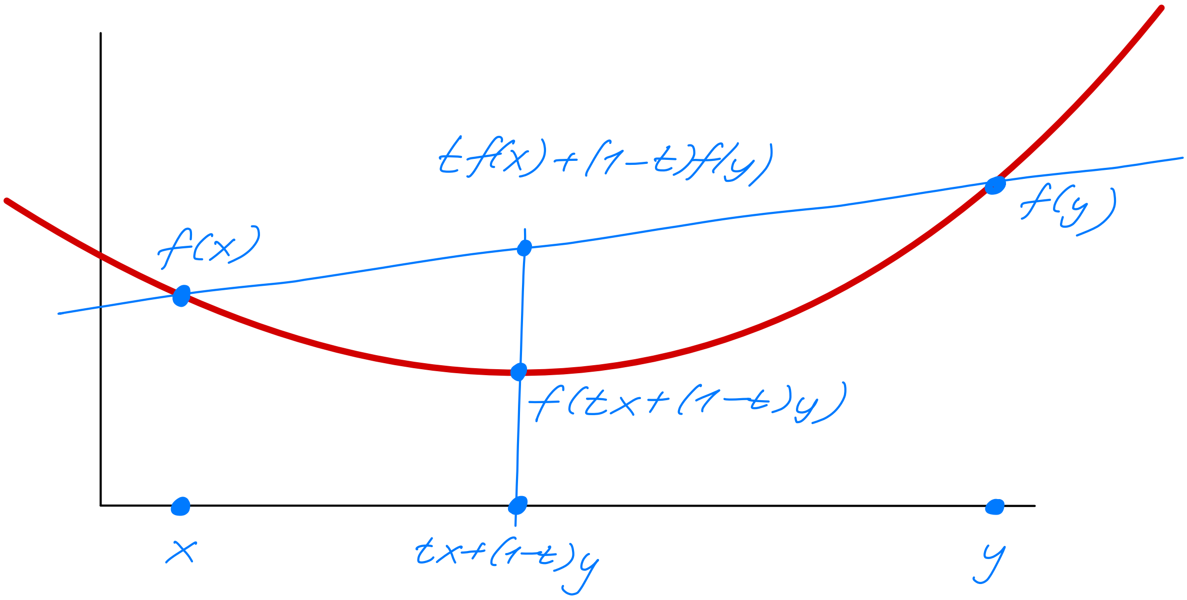
## 4. Der Satz von Bohr-Mollerup

Die Grenzwertdefinition ist die einzig mögliche Erweiterung der Fakultät auf $\mathbb{R}$, wenn man zusätzlich Konvexität von $\log \Gamma(x)$ fordert.

**Definition:** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst $\boxed{\text{konvex}}$, wenn

$$f(tx + (1-t)y) \geq t f(x) + (1-t) f(y)$$

gilt.




__Folgerung:__ Steigung eines Segments

$$S(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad y > x$$

ist monoton wachsend in $x$ und $y$

__Beachte:__ eine konvexe Funktion kann keine Sprünge machen!

**Satz (Bohr-Mollerup):** Ist $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

a) $f(x+1) = x f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

b) $f(1) = 1$

c) $\log f(x)$ ist konvex,

dann ist $f(x) = \Gamma(x)$.

Vorbemerkung: aus a) und b) folgt sofort

$$f(n+1) = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

d.h. Werte auf ganzzahligen Argumenten sind bereits festgelegt.

Beweis: Da $\log f(x)$ konvex ist, ist
$S(x,y) = (\log f(y) - \log f(x))/(y-x)$
monoton in $x$ und $y$, $y > x$.

Betrachte $0 < x < 1$, dann ist

$$n-1 < n < n+x < n+1$$

$$S(n-1,n) \underset{\boxed{1}}{<} S(n-1,n+x) < S(n,n+x) \underset{\boxed{2}}{<} S(n,n+1)$$

Werte Ungleichungen $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ separat aus.

$S(a,b)$ mit $a,b \in \mathbb{N}$ ist nach Vorbemerkung bekannt!

Hilfsformel:

$$S(n, n+1) = \frac{\log n! - \log(n-1)!}{n+1-n} = \log \frac{n!}{(n-1)!}$$

$$= \log n$$

$\boxed{1}$ ergibt

$$\log(n-1) < \frac{\log f(n+x) - \log(n-2)!}{\cancel{n}+x - \cancel{n}+1}$$

$$(x+1)\log(n-1) < \log f(n+x) - \log(n-2)!$$

$$x \log(n-1) + \log(n-1)! < \log f(n+x)$$

$$(n-1)^x \cdot (n-1)! < f(n+x)$$

$\boxed{2}$ ergibt

$$\frac{\log f(n+x) - \log(n-1)!}{\cancel{n}+x - \cancel{n}} < \log n$$

$$\log f(n+x) - \log(n-1)! < x \log n$$

$$\log f(n+x) < x \log n + \log(n-1)!$$

$$f(n+x) < n^x \cdot (n-1)!$$

Kombiniert:

$$(n-1)^x (n-1)! < f(n+x) < n^x (n-1)! \qquad (*)$$

Funktionalgleichung auf $f(n+x)$ anwenden:

$$\begin{aligned} f(n+x) &= (n+x-1) f(n+x-1) \\ &= (n+x-1)(n+x-2) f(n+x-2) \\ &\;\;\vdots \\ &= (n+x-1)(n+x-2) \cdots x\, f(x) \\ &= (x)_n\, f(x) \end{aligned}$$

Zusammen mit der Ungleichung $(*)$:

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{(x)_n} < f(x) < \frac{n^x (n-1)!}{(x)_n} = \frac{n^x n!}{(x)_{n+1}} \underbrace{\frac{x+n}{n}}_{\to 1 \ (n\to\infty)},$$

die für alle $n$ gilt, folgt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{(x)_{n+1}} = \Gamma(x) \qquad \square$$

# 5. Eulersche Integralformel

**Definition:** (Euler)

$$\Gamma : \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

Nachprüfen:

- Startwert: $\Gamma(1) = \int_0^\infty \underbrace{t^{1-1}}_{=1} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1$ ✓

- Funktionalgleichung.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

part. Integration

Minus von der Ableitung $\frac{d}{dt} e^{-t}$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{x} t^x e^{-t}\right]_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{x} \underbrace{\int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt}_{\Gamma(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

Aber: damit ist nur gezeigt, dass die Integralformel für $1, 2, 3, \ldots$ gilt!

$\Longrightarrow$ mehr Arbeit nötig!

Idee: zeigen, dass $\log \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$ konvex ist, dann folgt die Gleichheit aus dem Satz von Bohr-Mollerup

**Satz:** Die Funktion

$$x \longmapsto \log \underbrace{\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt}_{f(x)}$$

ist konvex.

Plan: Zweite Ableitung $> 0 \Longrightarrow$ konvex

① Logarithmische Ableitung:

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \log f(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2} \quad ??? \quad > 0$$

② Ableitung von $f(x)$:

$$t^{x-1} = e^{(x-1)\log t} \Longrightarrow \frac{d^k}{dx^k} t^{x-1} = \log(t)^k t^{x-1}$$

$$f'(x) = \int_0^\infty \log(t)\; t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$$f''(x) = \int_0^\infty \log(t)^2\; t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$$f(x) = \int_0^\infty 1 \cdot t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

gemeinsam

③ $u, v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ Funktionen, dann ist

$$\langle u, v \rangle = \int_0^\infty u(t)\, v(t)\; t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

ein Skalarprodukt von Funktionen

($L^2(\mu)$ mit $\mu(t) = t^{x-1} e^{-t} \underbrace{\lambda(t)}_{\text{Lebesgue-Maß}}$ )

mit Norm

$$\|u\|^2 = \int_0^\infty u(t)^2\; t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$\Longrightarrow$ Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \qquad \forall u, v$$

④ Spezialfall $u = 1$, $v = \log(t)$

$$\|u\|^2 = \int_0^\infty 1 \; t^{x-1} e^{-t}\, dt = f(x)$$

$$\|v\|^2 = \int_0^\infty \log(t)^2 \; t^{x-1} e^{-t}\, dt = f''(x)$$

$$\langle u, v \rangle = \int_0^\infty 1 \cdot \log(t) \; t^{x-1} e^{-t}\, dt = f'(x)$$

Cauchy-Schwarz

$$(f'(x))^2 \leq f(x)\, f''(x)$$

$$\Longrightarrow \quad f''(x) f(x) - f'(x)^2 \geq 0 \quad !!!!$$

$\square$

## 6. Der Wert von $\Gamma(\frac{1}{2})$

Mit der eulerschen Integralformel für die Gamma-Funktion kann man jetzt die Werte von $\Gamma(n+\frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$ berechnen.

Integralformel:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

Substitution: $t = s^2 \Rightarrow dt = 2s\, ds = 2\sqrt{t} dt$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\cancel{s}} e^{-s^2} 2\cancel{s}\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

Mit der Funktionalgleichung kann man jetzt weitere Werte bestimmen:

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \Gamma(\tfrac{1}{2}+1) = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \Gamma(\tfrac{3}{2}+1) = \tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+k) = \frac{2k-1}{2}\Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right) = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3\cdot 1}{2^k}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$= (\tfrac{1}{2})_k \Gamma(\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2})_k \sqrt{\pi}$$

# 7. Analytische Fortsetzung

Die Eulersche Integraldarstellung der Gammafunktion ist

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt. \qquad (*)$$

Schreibt man $z = x + iy$, dann kann der Integrand abgeschätzt werden durch

$$|t^{z-1}| = t^{x-1}\, |t^{iy}|$$
$$= t^{x-1}\, |e^{iy \cdot \log t}| = t^{x-1}.$$

$$\Rightarrow |t^{z-1} e^{-t}| = t^{x-1} e^{-t}$$

fällt für $t \to \infty$ sehr schnell ab, so dass die obere Grenze des Integrals nicht zu Konvergenzproblemen führt. Da $e^{-t} \to 1$ für $t \to 0$ darf $t^{x-1}$ nicht zu schnell anwachsen.

$$\int_0^1 t^{x-1}\, dt = \left[\frac{1}{x}\, t^x\right]_0^1 = \frac{1}{x}(1-0) = \frac{1}{x}$$

d.h. das Integral konvergiert für $x > 0$.

<u>Satz</u>: Die Eulersche Integralformel $(*)$ liefert eine in $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ holomorphe Funktion

Berechnung der Ableitung: Ableitung unter dem Integral

$$\Gamma'(z) = \frac{d}{dz}\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{d}{dz}\left(t^{z-1} e^{-t}\right) dt$$
$$= \int_0^\infty \log(t)\, t^{z-1} e^{-t} dt$$

konvergiert für $\operatorname{Re} z > 1$, d.h. als Methode zu Berechnung der Ableitung nicht für ganz $\mathbb{C}$ geeignet.

$\Rightarrow$ $\Gamma(z)$ und $\Gamma'(z)$ berechenbar als Integral für $\operatorname{Re}(z) > 1$.

Für $\operatorname{Re} z \leq 1$: Funktionalgleichung verwenden:

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)\Gamma(z+n-1)$$
$$= (z+n-1)(z+n-2)\Gamma(z+n-2)$$
$$\vdots$$
$$= (z+n-1)\cdots z\,\Gamma(z) = (z)_n\,\Gamma(z)$$

$$\Longrightarrow \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}$$

$\leftarrow$ Integral konvergent $\operatorname{Re} z > -n$

$\leftarrow$ Polynom in $z$ (Grad $n$)

Das Pochhammer-Symbol

$$(z)_n = z \cdot (z+1) \cdots (z+n-1)$$

hat die Nullstellen $0, -1, -2, \ldots, -n+1$;
daher sind die negative ganzen Zahlen und 0 Pole der Gamma-Funktion.

Die Formel $\Gamma(z) = \Gamma(z+n) / (z)_n$
liefert die analytische Fortsetzung der Gamma-Funktion auf

$$\mathbb{C} \setminus \{ n \in \mathbb{Z} / \, n \leq 0 \}.$$

## Residuum in den Polstellen

In der Nähe von $-n$ ist für $k > n$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{(z)_k} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

$$= \frac{1}{z+n} \cdot \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$$

Residuum

für $z = -n$:

$$\frac{\Gamma(-n+n+1)}{-n(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n(n-1)\cdots 1} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{Res}_{-n}\, \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}}$$

# 8. Beta-Verteilung und Beta-Integrale

Motivation: Binomialverteilung $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Verallgemeinerung: Beta-Verteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\beta(x,y) = t^{x-1}(1-t)^{y-1},\ t \in (0,1)$$ ($x=y=1$: Gleichverteilung)

Normierungskonstante

Definition: Beta-Integral oder Beta-Funktion:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

Kann nicht in geschlossener Form ausgewertet werden.

Ziel:
- Rekursionsformeln für $B(x,y)$
- Zusammenhang zwischen $B(x,y)$ und $\Gamma(x)$ ...
- Symmetrie von $B(x,y) = B(y,x)$ liefert Symmetrieeigenschaften der Gamma-Funktion (ähnlich wie bei der $\zeta(z)$-Funktion)

## 9. Rekursionsformeln für $B(x,y)$

<u>Startwerte</u>: $B(1,1) = \int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{1-1}\,dt = \int_0^1 dt = 1$

$$B(x,1) = B(1,x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{1-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$$

<u>Rekursionsformel 1</u>: Partielle Integration

$$B(x,y+1) = \int_0^1 \underbrace{t^{x-1}}_{\uparrow}\underbrace{(1-t)^y}_{\downarrow}\,dt$$

innere Ableitung

$$= \underbrace{\left[\frac{t^x}{x}(1-t)^y\right]_0^1}_{=0} + \frac{y}{x}\underbrace{\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,dt}_{B(x+1,y)}$$

$$B(x,y+1) = \frac{y}{x}\,B(x+1,y). \qquad (R_1)$$

<u>Rekursionsformel 2</u>: Faktorisierung

$$B(x,y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt - \int t^x(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$\boxed{B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y)} \qquad (R_2)$$

Abgeleitete Rekursionsformeln:

$(R_1^*)$ $\quad B(x+1,y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$

$(R_2^*)$ $\quad B(x+1,y) = B(x,y) - B(x,y+1)$

$(R_1^*) = (R_2^*)$:

$$B(x,y) = \frac{x}{y} B(x,y+1) + B(x,y+1) = \frac{x+y}{y} B(x,y+1)$$

Iteration:

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \frac{x+y}{y} B(x,y+1) \\ &= \frac{x+y}{y} \cdot \frac{x+y+1}{y+1} B(x,y+2) \\ &\vdots \\ &= \frac{x+y}{y} \frac{x+y+1}{y+1} \cdots \frac{x+y+n-1}{y+n-1} B(x,y+n) \end{aligned}$$

$$B(x,y) = \frac{(x+y)_n}{(y)_n} B(x,y+n)$$

# 10. Beta-Funktion und Gamma-Funktion

$$B(x,y) = \frac{(x+y)_n}{(y)_n} B(x, y+n)$$

Verbindung zur Gamma-Funktion: Erweiterungstrick

$$= \frac{(x+y)_n}{n!\,n^{x+y-1}} \cdot \frac{n!\,n^{y-1}}{(y)_n} \int_0^1 n^x t^{x-1} (1-t)^{y+n-1}\, dt$$

Substitution $t = \frac{s}{n}$

$$\frac{(x+y)_n}{n!\,n^{x+y-1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(x+y)}, \qquad \frac{n!\,n^{y-1}}{(y)_n} \xrightarrow{n\to\infty} \Gamma(y)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(x+y)} \cdot \Gamma(y) \int_0^n \cancel{n^x} \left(\frac{s}{\cancel{n}}\right)^{\cancel{x-1}} \left(1-\frac{s}{n}\right)^{y+n-1} \frac{ds}{\cancel{n}}$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \lim_{n\to\infty} \int_0^n s^{x-1} \underbrace{\left(1-\frac{s}{n}\right)^{y-1}}_{\to 1} \underbrace{\left(1-\frac{s}{n}\right)^{n}}_{\to e^{-s}} dt$$

$$= \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s}\, ds = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

<u>Satz:</u> $$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Anwendung: $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(1)} = \Gamma(\frac{1}{2})^2$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt = \pi \Rightarrow \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

**Satz (Legendre): Verdoppelungssatz**

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2})$$

Beweis: $B(z,z)$ ausrechnen, nach $\Gamma(2z)$ auflösen

$$B(z,z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} \Rightarrow \Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)^2}{B(z,z)}$$

$$= \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\,dt$$

"Symmetrischerer" Integrand: $t = \frac{1+s}{2}$, $s \in (-1,1)$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{2}\right)^{z-1}\left(\frac{1-s}{2}\right)^{z-1}\frac{ds}{2}$$

$$= \frac{1}{2^{2z-1}}\underbrace{\int_{-1}^1 (1-s^2)^{z-1}\,ds}$$

$s^2 = u$
$2s\,ds = du$
$2\,ds = u^{-\frac{1}{2}}\,du$

$$= 2\int_0^1 (1-s^2)^{z-1}\,ds$$

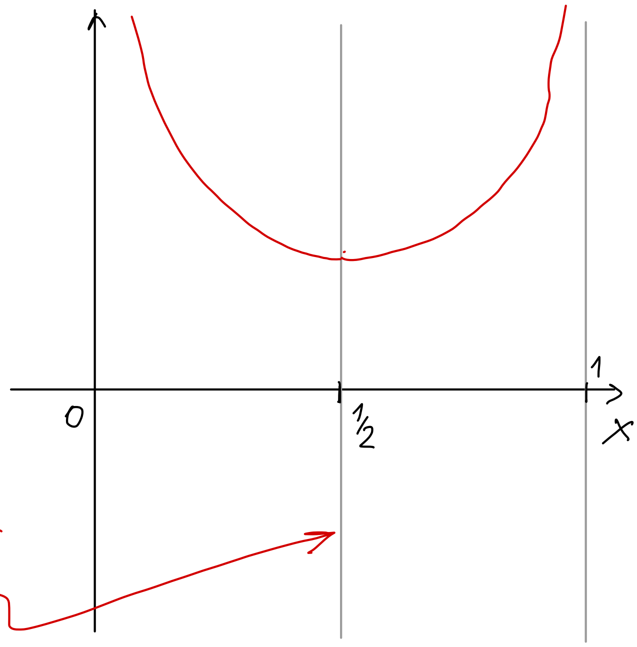
$$= \int_0^1 (1-u)^{z-1}u^{-\frac{1}{2}}\,du = B(\tfrac{1}{2},z)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z)}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}$$

$$\Gamma(2z) = \Gamma(z)^{\cancel{2}}\, 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\cancel{\Gamma(z)}} = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2})$$

Kontrolle: $z = \frac{1}{2} \Rightarrow \Gamma(1) \overset{?}{=} \frac{\cancel{2^{2\cdot\frac{1}{2}-1}}^{=1}}{\cancel{\sqrt{\pi}}}\cancel{\Gamma(\tfrac{1}{2})}\,\Gamma(1)$ ✓ □

# 11. Spiegelungssatz




**Satz:** Für $0<x<1$ gilt

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$$

symmetrisch bezüglich der Geraden $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = B(x,1-x),$$ d.h. es ist nur der Wert von $B(x,1-x)$ zu berechnen.

$$B(x,1-x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}\,dt$$

Substitution: $t=\frac{s}{s+1}$, $s\in[0,\infty)$

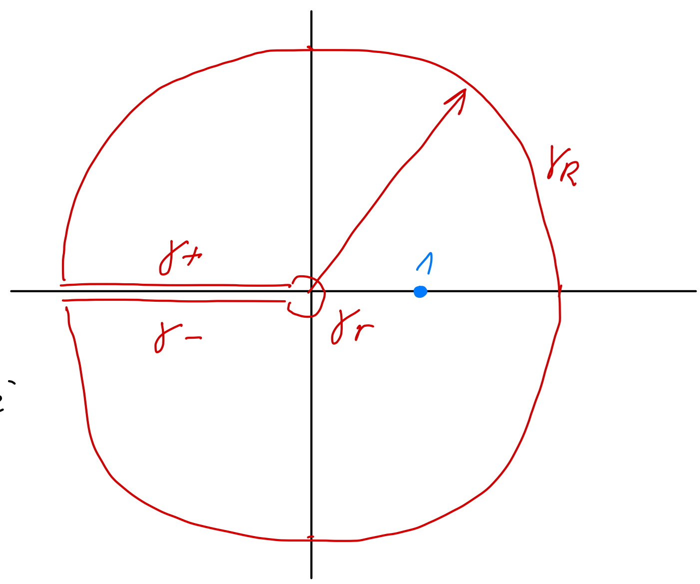
$$B(x,1-x)=\int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(s+1)^{\cancel{x-1}}}\,\frac{1}{(s+1)^{\cancel{-x}}}\,\frac{1}{(s+1)^{\cancel{2}\,1}}\,ds$$

$$=\int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{s+1}\,ds$$

Dieses Integral kann mit Cauchys Integralformel aus

$$-\oint_\gamma \frac{z^{x-1}}{1-z}\,dz = 2\pi i$$

berechnet werden.



Berechnung der einzelnen Pfadteile: mit der Parametrisierung $z(t) = Re^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$

$$I_R = \oint_{\gamma_R} \frac{z^{x-1}}{1-z}\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^{x-1} e^{it(x-1)}}{1 - Re^{it}}\, iRe^{it} dt$$

$$= i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^{x} e^{itx}}{1 - Re^{it}}\, dt$$

Für $R \to \infty$:

$$I_R = i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^{x-1} e^{itx}}{\underbrace{1/R}_{\to 0} - e^{it}}\, dt$$

$0 < x < 1$

$$= i \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(x-1)} dt \cdot \lim_{R \to \infty} R^{\overset{<0}{x-1}} = 0$$

Für $r \to \infty$:

$$I_r = i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overset{\to 0}{r^{x}}\, e^{itx}}{1 - \underbrace{re^{it}}_{\to 0}}\, dt \to 0$$

Die Segmente $\gamma_\pm$: $z^{x-1}$ muss für $\gamma_+$ und $\gamma_-$ verschieden berechnet werden:

$$\gamma_\pm(t) = t e^{\pm i\pi} \qquad z^{x-1} = t^{x-1} e^{\pm i\pi(x-1)}$$

$$\int_{\gamma_\pm} \frac{z^{x-1}}{1-z}\, dz = -\int_0^\infty \frac{t^{x-1} e^{\pm i\pi(x-1)}}{1 - te^{\pm i\pi}}\, dt$$

$$= -\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt \cdot e^{\pm i\pi(x-1)}$$

$\gamma_1$ wird von $-\infty$ nach $0$ durchlaufen

$\gamma_2$ von $0$ nach $-\infty$, d.h.

$$\oint \frac{z^{x-1}}{1-z}\,dz = +\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \cdot e^{i\pi(x-1)}$$

$$-\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt\; e^{-i\pi(x-1)}$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \left(e^{i\pi(x-1)} - e^{-i\pi(x-1)}\right)$$

$$= -\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \quad 2i \cdot \underbrace{\frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i}}_{\sin \pi x}$$

$$\Longrightarrow \; -1 = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{z^{x-1}}{1-z}\,dz = -\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \; \frac{\sin \pi x}{\pi}$$

$$\Longrightarrow \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

$\square$

Anwendung: $z = \frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \pi \Longrightarrow \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$