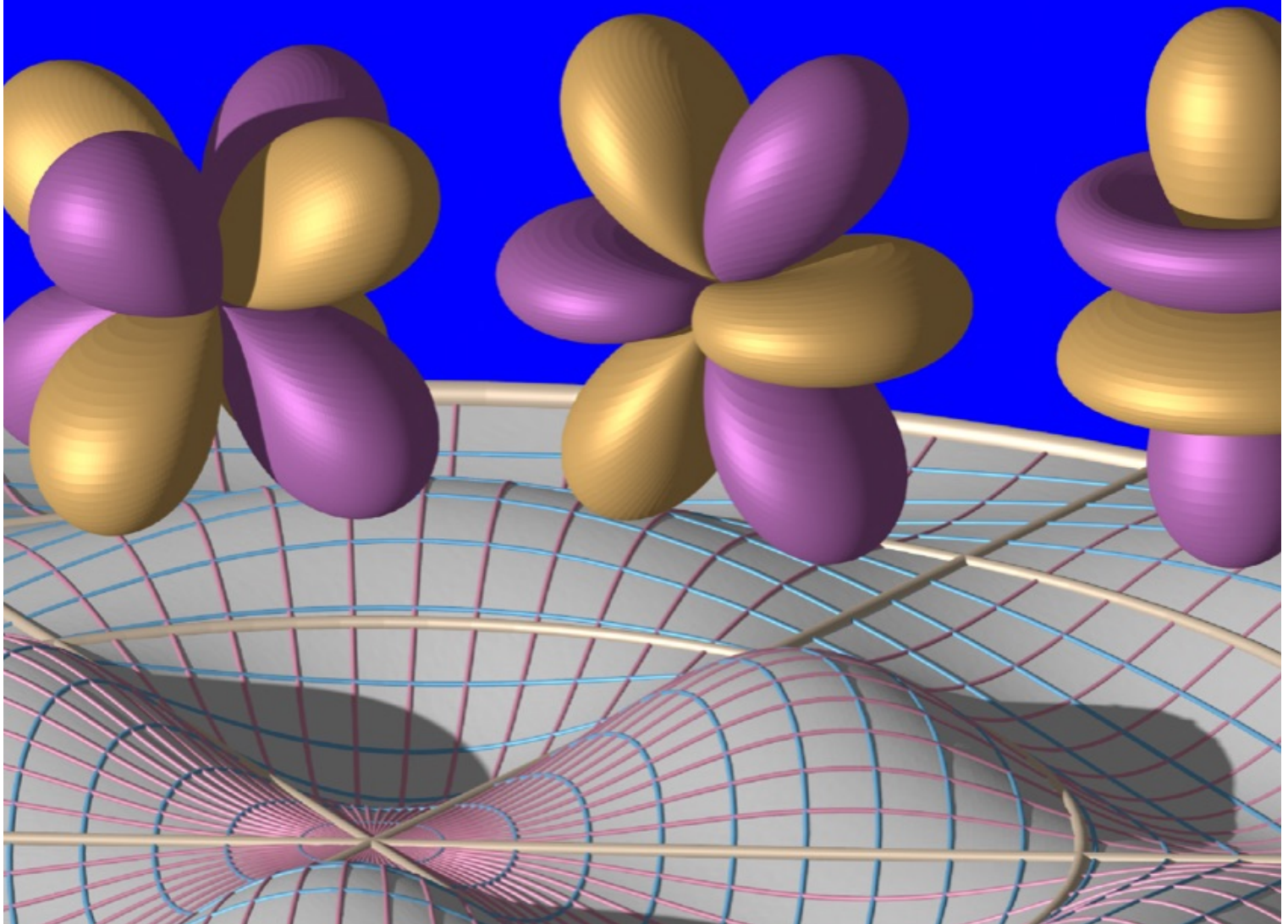


Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

2. Gamma- und Beta-Funktionen



Inhalt

1. Problemstellung: $n!$ auf \mathbb{C} erweitern
2. Pochhammer-Symbole
3. Grenzwert-Definition der Gamma-Funktion
4. Der Satz von Bohr-Mollerup
5. Die eulersche Integralformel
6. Der Wert von $\Gamma(\frac{1}{2})$
7. Analytische Fortsetzung auf \mathbb{C}
8. Beta-Verteilung und Beta-Integrale
9. Rekursionsformeln für $B(x, y)$
10. $B(x, y)$ und die Gamma-Funktion
11. Spiegelungssatz für $\Gamma(x)$

1. Fakultät $x!$ für $x \in \mathbb{R}$?

Definition: die Fakultäts-Funktion

$$\cdot! : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto n!$$

Ist rekursiv definiert durch

$$n! = n \cdot (n-1)! \quad n > 0$$

$$0! = 1$$

Es folgt: $1! = 1 \cdot 0! = 1$

$$2! = 2 \cdot 1! = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2! = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3! = 24$$

exponentielles
Wachstum

Näherungsformel von Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$
für grosse n , i.e. $n!$ wächst wie n^n .

Anwendungen:

a) Kombinatorik: Anzahl von Permutationen
von n Objekten: $|S_n| = n!$

↑ symmetrische Gruppe
Permutationsgruppe

b) Taylor-Reihen:

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

c) Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

Anzahl Auswahl von k Elementen aus n
(Matlab: `nchoosek(n,k)`)

d) Binomialreihe:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

$$=: \binom{\alpha}{k} \text{ für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ beliebig!}$$

verallgemeinerte Binomial-
koeffizienten

$$\text{z.B.: } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

- Fragen:
1. Verallgemeinerung $n! \rightarrow x!$, $x \in \mathbb{R}$
Rekursionsformel soll erhalten bleiben
 \rightarrow Gamma-Funktion
 2. Verallgemeinerung der Binomialreihe
 \rightarrow Pochhammer-Symbole
 \rightarrow Beta-Funktion

2. Pochhammer - Symbole

Fakultät: $n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}_{\substack{\uparrow \\ \text{Start: } 1 \quad \text{ } n \text{ aufsteigende} \\ \text{Faktoren}}}$

Verallgemeinerung:

$$\begin{array}{ccccccc} n! & = & 1 & \cdot & (1+1) & \cdot & (1+2) & \cdot & \dots & \cdot & (1+n-1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ (a)_n & = & a & \cdot & (a+1) & \cdot & (a+2) & \cdot & \dots & \cdot & (a+n-1) \end{array}$$

Definition: Pochhammer - Symbol

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \cdot \dots \cdot (a+n-1)$$

n aufsteigende Faktoren

Spezialfall: $(1)_n = n!$

Anwendung: verallgemeinerte Binomialkoeffizient:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2) \dots (-\alpha+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(\alpha)_k}{k!} \end{aligned}$$

Rekursionsformel:

$$(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$$

$$(a)_0 = 1$$

$$\Rightarrow (a)_1 = (a)_{0+1} = (a+0)(a)_0 = a$$

$$(a)_2 = (a)_{1+1} = (a+1)(a)_1 = (a+1)a$$

⋮

Man beachte auch die Ähnlichkeit zur Funktionalgleichung der Fakultät:

$$n! = n(n-1)!$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

$$(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$$

↖ passt nicht, Argument verschieben $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

↖ passt!

Übungsaufgaben:

$$1. \left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$$

$$2. (-n)_k = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$3. \text{Schreibe } \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (k+2)(k+3)} \text{ mit}$$

Pochhammer-Symbole (wie in 1. und 2.)

3. Gamma-Funktion als Grenzwert

Aufgabe: finde eine Funktion $\Gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
mit

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$0! = 1$$

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Heuristische Beobachtungen:

1. Es werde viele Faktoren nötig sein
2. Endliche Anzahl wird nicht reichen, beim Sprung zur nächsten Anzahl würde sich die Funktion auf un-sterbliche oder nicht diff'bar mit ändern
3. Ohne einen Grenzprozess geht es nicht!

Strategie:

- "grosse" Fakultät $n!$, $n \rightarrow \infty$ bauen
- überzählige Faktoren $> x$ mit Pochhammer-Symbolen wieder weg kürzen.
- $n \rightarrow \infty$
- $x \in \mathbb{R}$ zulassen

Durchführung dieser Strategie:

$$\begin{aligned}
 x! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x \\
 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x \cdot (x+1) \cdots (x+n)}{(x+1) \cdots (x+n)} \\
 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) \cdots (n+x)}{(x+1) \cdots (x+n)} \\
 &= \frac{n! (n+1)_x}{(x+1)_n} \leftarrow \text{nur für ganzzahliges } x \text{ definiert}
 \end{aligned}$$

"Trick"

$$= \frac{\frac{n! n^x}{(x+1)_n} \cdot \underbrace{(n+1)_x}_{n^x}}{n^x} \quad (*)$$

auch für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ definiert! $\rightarrow 1$ (Hoffnung) für $x \in \mathbb{N}$

Definition

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n}$$

Grenzwert -
Definition der
 Γ -Funktion

Zu überprüfen:

① Rekursionsformel

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

② Startwert

$$\Gamma(1) = 1$$

③ Konvergenz

Lemma: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)_x}{n^x} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)_x}{n^x} &= \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+x)}{n \cdot n \cdots n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &\quad \begin{array}{ccc} \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} \\ \rightarrow 0 & \rightarrow 0 & \rightarrow \end{array} \\ &\rightarrow 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1 \end{aligned}$$

Grenzübergang zulässig, da nur endlich viele ($x = \text{const}$) Faktoren vorhanden \square

Satz: Für $x \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(x) = (x-1)!$

Beweis: unmittelbar aus der Definition und dem "Trick" (*) \square

Ist damit die Aufgabe gelöst?

Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{1-1}}{(1)_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 1}{n!} = 1 \quad \checkmark \\ \Gamma(2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{2-1}}{(2)_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdots \cancel{n} \cdot n}{\cancel{2} \cdots \cancel{n} \cdot (n+1)} = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Funktionalgleichung?

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x+1-1}}{(x+1)_n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \cdot n! \cdot n^x}{x \cdot (x+1)(x+2) \dots (x+n)} \\
 &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1} \cdot n}{(x)_n \cdot (x+n)} = x \Gamma(x)
 \end{aligned}$$

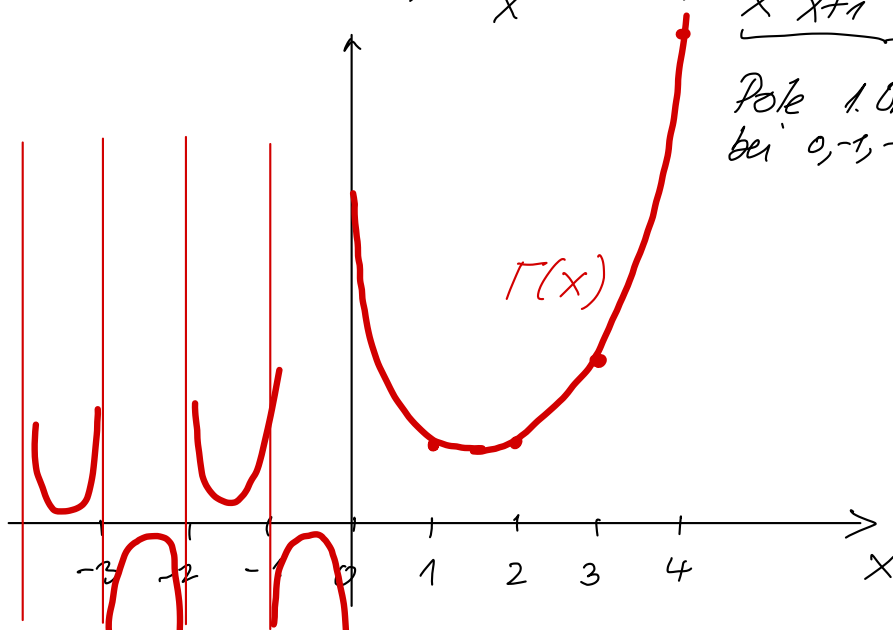
□

Die Grenzwertdefinition liefert also eine Lösung der gegebenen Funktionalgleichung.

Einige Werte:

- $\Gamma(n) = (n-1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$
- $\lim_{x \rightarrow n} \Gamma(x) = \pm \infty$ $\forall n \in \mathbb{Z}, n \leq 0$

Warum? $\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1) = \frac{1}{x} \frac{1}{x+1} \dots \frac{1}{x+k} \Gamma(x+k)$



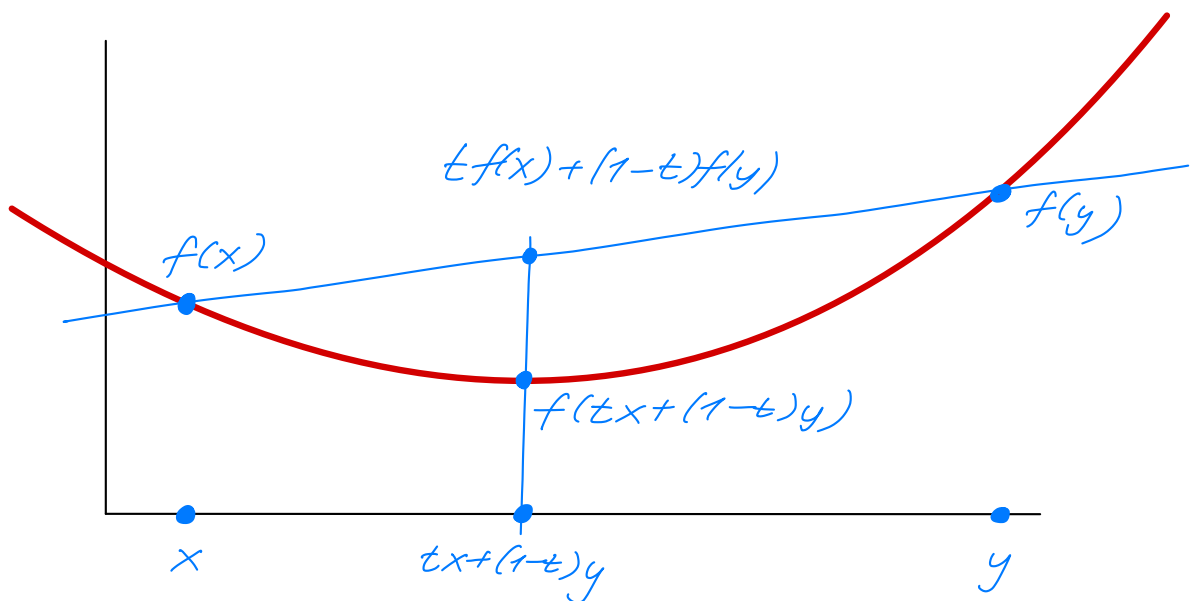
stetig für
Pole 1. Ordnung
bei $0, -1, -2, \dots$

4. Der Satz von Bohr - Mollerup

Die Grenzwertdefinition ist die einzig mögliche Erweiterung der Fakultät auf \mathbb{R} , wenn man zusätzlich Konvexität von $\log \Gamma(x)$ fordert.

Definition: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn

$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$
gilt.



Folgerung: Steigung eines Segmentes

$$S(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad y > x$$

ist monoton wachsend in x und y

Beachte: eine konvexe Funktion kann keine Sprünge machen!

Satz (Bohr - Mollerup): Ist $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

a) $f(x+1) = x f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

b) $f(1) = 1$

c) $\log f(x)$ ist konvex,
dann ist $f(x) = \Gamma(x)$.

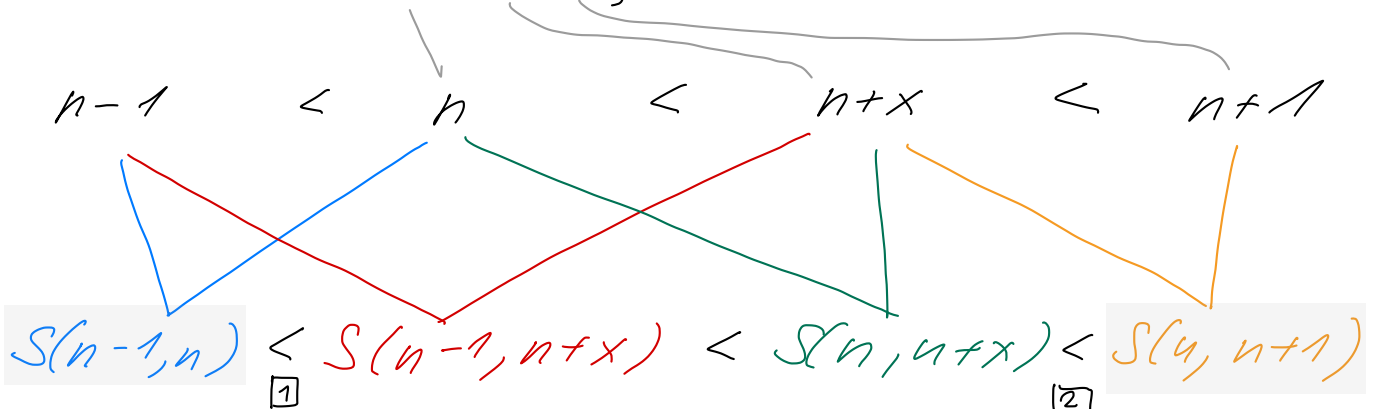
Vorbemerkung: aus a) und b) folgt sofort

$$f(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d.h. Werte auf ganzzahligen Argumenten sind bereits festgelegt.

Beweis: Da $\log f(x)$ konvex ist, ist
 $S(x,y) = (\log f(y) - \log f(x)) / (y-x)$
monoton in x und y , $y > x$.

Betrachte $0 < x < 1$, dann ist



Werte Ungleichungen [1] und [2] separat aus.

$S(a,b)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ ist nach Vorbemerkung bekannt!

Hilfsformel:

$$S(n, n+1) = \frac{\log n! - \log(n-1)!}{n+1 - n} = \log \frac{n!}{(n-1)!}$$
$$= \log n$$

① ergibt

$$\log(n-1) < \frac{\log f(n+x) - \log(n-2)!}{\cancel{n+x} - \cancel{n+1}}$$

$$(x+1) \log(n-1) < \log f(n+x) - \log(n-2)!$$

$$x \log(n-1) + \log(n-1)! < \log f(n+x)$$

$$(n-1)^x \cdot (n-1)! < f(n+x)$$

② ergibt

$$\frac{\log f(n+x) - \log(n-1)!}{\cancel{n+x} - \cancel{n}} < \log n$$

$$\log f(n+x) - \log(n-1)! < x \log n$$

$$\log f(n+x) < x \log n + \log(n-1)!$$

$$f(n+x) < n^x \cdot (n-1)!$$

Kombiniert:

$$(n-1)^x (n-1)! < f(n+x) < n^x (n-1)! \quad (*)$$

Funktionalgleichung auf $f(n+x)$ anwenden:

$$\begin{aligned} f(n+x) &= (n+x-1)f(n+x-1) \\ &= (n+x-1)(n+x-2)f(n+x-2) \\ &\quad \vdots \\ &= (n+x-1)(n+x-2) \cdots x f(x) \\ &= (x)_n f(x) \end{aligned}$$

Zusammen mit der Ungleichung (*):

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{(x)_n} < f(x) < \frac{n^x (n-1)!}{(x)_n}$$

||

$$\frac{n^x n!}{(x)_{n+1}} \frac{x+n}{\underbrace{n}_{\rightarrow 1 \text{ (unendlich)}}},$$

die für alle n gilt, folgt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{(x)_{n+1}} = \Gamma(x)$$



5. Eulersche Integralformel

Definition: (Euler)

$$\Gamma: \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Nachprüfen:

• Startwert: $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \underbrace{t^{1-1}}_{=1} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{\infty} = 1 \checkmark$

• Funktionalgleichung.

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &\stackrel{\text{part. Integration}}{=} \left[\underbrace{\frac{1}{x} t^x e^{-t}}_{=0} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \\ &\quad \text{Minus von der Ableitung } \frac{d}{dt} e^{-t} \\ &= \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \end{aligned}$$

Aber: damit ist nur gezeigt, dass die Integralformel für 1, 2, 3, ... gilt!

⇒ mehr Arbeit nötig!

Idee: zeigen, dass $\log \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ konvex ist, dann folgt die Gleichheit aus dem Satz von Bohr-Mollerup

Satz: Die Funktion

$$x \mapsto \log \underbrace{\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt}_{f(x)}$$

ist konvex.

Plan: Zweite Ableitung $> 0 \Rightarrow$ konvex

① Logarithmische Ableitung:

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \log f(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2} > 0 \quad ???$$

② Ableitung von $f(x)$:

$$t^{x-1} = e^{(x-1)\log t} \Rightarrow \frac{d^k}{dx^k} t^{x-1} = \log(t)^k t^{x-1}$$

$$f'(x) = \int_0^{\infty} \log(t) t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$f''(x) = \int_0^{\infty} \log(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} 1 \cdot t^{x-1} e^{-t} dt$$

gemeinsam

③ $u, v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, dann ist

$$\langle u, v \rangle = \int_0^\infty u(t) v(t) t^{x-1} e^{-t} dt$$

ein **Skalarprodukt** von Funktionen
 $(L^2(\mu))$ mit $\mu(t) = t^{x-1} e^{-t} \underbrace{\lambda(t)}_{\text{Lebesgue-Ma\ss}}$
 mit Norm

$$\|u\|^2 = \int_0^\infty u(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$$

\Rightarrow Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \quad \forall u, v$$

④ Spezialfall $u = 1, v = \log(t)$

$$\|u\|^2 = \int_0^\infty 1 \cdot t^{x-1} e^{-t} dt = f(x)$$

$$\|v\|^2 = \int_0^\infty \log(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt = f''(x)$$

$$\langle u, v \rangle = \int_0^\infty 1 \cdot \log(t) t^{x-1} e^{-t} dt = f'(x)$$

Cauchy-Schwarz

$$(f'(x))^2 \leq f(x) f''(x)$$

$$\Rightarrow f''(x) f(x) - f'(x)^2 \geq 0 \quad \text{!!!!}$$

□

6. Der Wert von $\Gamma(\frac{1}{2})$

Mit der eulerschen Integralformel für die Gamma-Funktion kann man jetzt die Werte von $\Gamma(n + \frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$ berechnen.

Integralformel:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

Substitution: $t = s^2 \Rightarrow dt = 2s ds = 2\sqrt{t} dt$

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\cancel{s}} e^{-s^2} \cancel{2s} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Mit der Funktionalgleichung kann man jetzt weitere Werte bestimmen:

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})$$

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \Gamma(\frac{3}{2} + 1) = \frac{3}{2} \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{1}{2} + k) &= \frac{2k-1}{2} \Gamma(\frac{2k-1}{2}) = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1}{2^k} \Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= (\frac{1}{2})_k \Gamma(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})_k \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

7. Analytische Fortsetzung

Die Eulersche Integraldarstellung der Gammafunktion ist

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (*)$$

Schreibt man $z = x + iy$, dann kann der Integrand abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} |t^{z-1}| &= t^{x-1} |t^{iy}| \\ &= t^{x-1} |e^{iy \cdot \log t}| = t^{x-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |t^{z-1} e^{-t}| = t^{x-1} e^{-t}$$

fällt für $t \rightarrow \infty$ sehr schnell ab, so dass die obere Grenze des Integrals nicht zu Konvergenzproblemen führt. Da $e^{-t} \rightarrow 1$ für $t \rightarrow 0$ darf t^{x-1} nicht zu schnell anwachsen.

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{1}{x} t^x \right]_0^1 = \frac{1}{x} (1 - 0) = \frac{1}{x}$$

d.h. das Integral konvergiert für $x > 0$.

Satz: Die Eulersche Integralformel (*) liefert eine in $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ holomorphe Funktion

Berechnung der Ableitung: Ableitung unter dem Integral

$$\begin{aligned}\Gamma'(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dz} \left(t^{z-1} e^{-t} \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \log(t) t^{z-1} e^{-t} dt\end{aligned}$$

konvergiert für $\operatorname{Re} z > 1$, d.h. als Methode zur Berechnung der Ableitung nicht für ganze \mathbb{C} geeignet.

\Rightarrow $\Gamma(z)$ und $\Gamma'(z)$ berechenbar als Integral für $\operatorname{Re}(z) > 1$.

Für $\operatorname{Re} z \leq 1$: Funktionalgleichung verwenden:

$$\begin{aligned}\Gamma(z+n) &= (z+n-1)\Gamma(z+n-1) \\ &= (z+n-1)(z+n-2)\Gamma(z+n-2) \\ &\quad \vdots \\ &= (z+n-1) \cdots z \Gamma(z) = (z)_n \Gamma(z)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{Integral konvergiert } \operatorname{Re} z \geq -n \\ \leftarrow \text{Polynom in } z \\ \quad (\text{Grad } n) \end{array} \right.$$

Das Pochhammer-Symbol

$$(z)_n = z \cdot (z+1) \cdots (z+n-1)$$

hat die Nullstellen $0, -1, -2, \dots, -n+1$,
daher sind die negative ganzen Zahlen und 0
Pole der Gamma-Funktion.

Die Formel $\Gamma(z) = \Gamma(z+n) / (z)_n$
liefert die analytische Fortsetzung der
Gamma-Funktion auf

$$\mathbb{C} \setminus \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\}.$$

Residuum in den Polstellen

In der Nähe von $-n$ ist für $k > n$

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+k)}{(z)_k} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \\ &= \frac{1}{z+n} \cdot \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \end{aligned}$$

Residuum ←

für $z = -n$:

$$\frac{\Gamma(-n+n+1)}{-n(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n(n-1)\cdots 1} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \text{Res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

8. Beta-Verteilung und Beta-Integrale

Motivation: Binomialverteilung $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Verallgemeinerung: Beta-Verteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$B(x, y) = t^{x-1} (1-t)^{y-1}, t \in (0, 1) \quad (x=y=1: \text{Gleichverteilung})$$

Normierungskonstante

Definition: Beta-Integral oder Beta-Funktion:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

Kann nicht in geschlossener Form ausgewertet werden.

- Ziel:
- Rekursionsformeln für $B(x, y)$
 - Zusammenhang zwischen $B(x, y)$ und $\Gamma(x) \dots$
 - Symmetrie von $B(x, y) = B(y, x)$ liefert Symmetrieeigenschaften der Gamma-Funktion (ähnlich wie bei der $\zeta(z)$ -Funktion)

9. Rekursionsformeln für $B(x, y)$

Startwerte: $B(1, 1) = \int_0^1 t^{1-1} (1-t)^{1-1} dt = \int_0^1 dt = 1$

$$B(x, 1) = B(1, x) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{1-1} dt \\ = \int_0^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{t^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{x}$$

Rekursionsformel 1: Partielle Integration

$$B(x, y+1) = \int_0^1 \underbrace{t^{x-1}}_{\uparrow} \underbrace{(1-t)^y}_{\downarrow} dt \\ = \underbrace{\left[\frac{t^x}{x} (1-t)^y \right]_0^1}_{=0} + \frac{y}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt \\ \text{innere Ableitung} \\ B(x+1, y)$$

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x} B(x+1, y). \quad (R_1)$$

Rekursionsformel 2: Faktorisierung

$$B(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt \\ = \int_0^1 t^{x-1} (1-t) (1-t)^{y-1} dt \\ = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt - \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt$$

$$B(x, y+1) = B(x, y) - B(x+1, y) \quad (R_2)$$

Abgeleitete Rekursionsformeln:

$$(R_1^*) \quad B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$$

$$(R_2^*) \quad B(x+1, y) = B(x, y) - B(x, y+1)$$

$$(R_1^*) = (R_2^*):$$

$$B(x, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1) + B(x, y+1) = \frac{x+y}{y} B(x, y+1)$$

Iteration:

$$B(x, y) = \frac{x+y}{y} B(x, y+1)$$

$$= \frac{x+y}{y} \cdot \frac{x+y+1}{y+1} B(x, y+2)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & = \frac{x+y}{y} \frac{x+y+1}{y+1} \dots \frac{x+y+n-1}{y+n-1} B(x, y+n) \end{aligned}$$

$$B(x, y) = \frac{(x+y)_n}{(y)_n} B(x, y+n)$$

10. Beta-Funktion und Gamma-Funktion

$$B(x, y) = \frac{(x+y)_n}{(y)_n} B(x, y+n)$$

Verbindung zur Gamma-Funktion: Erweiterungstrick

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x+y)_n}{n! n^{x+y-1}} \frac{n! n^{y-1}}{(y)_n} \int_0^1 n^x t^{x-1} (1-t)^{y+n-1} dt \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(x+y)} \cdot \Gamma(y) \int_0^1 n^x \left(\frac{s}{n}\right)^{x-1} \left(1-\frac{s}{n}\right)^{y+n-1} \frac{ds}{n}
 \end{aligned}$$

Substitution $t = \frac{s}{n}$

$$\begin{aligned}
 B(x, y) &= \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n s^{x-1} \underbrace{\left(1-\frac{s}{n}\right)^{y-1}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1-\frac{s}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{-s}} dt \\
 &= \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}
 \end{aligned}$$

Satz: $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Anwendung: $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Satz (Legendre): Verdoppelungssatz

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2})$$

Beweis: $B(z, z)$ ausrechnen, nach $\Gamma(2z)$ auflösen

$$B(z, z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} \Rightarrow \Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)^2}{B(z, z)}$$

$$= \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{z-1} dt$$

"Symmetrischerer" Integrand: $t = \frac{1+s}{2}, s \in (-1, 1)$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{2}\right)^{z-1} \left(\frac{1-s}{2}\right)^{z-1} \frac{ds}{2}$$

$$= \frac{1}{2^{2z-1}} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{z-1} ds$$

$$\begin{aligned} s^2 &= u \\ 2s ds &= du \\ 2 ds &= u^{-\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^1 (1-s^2)^{z-1} ds$$

$$= \int_0^1 (1-u)^{z-1} u^{-\frac{1}{2}} du = B\left(\frac{1}{2}, z\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z)}{\Gamma(z + \frac{1}{2})}$$

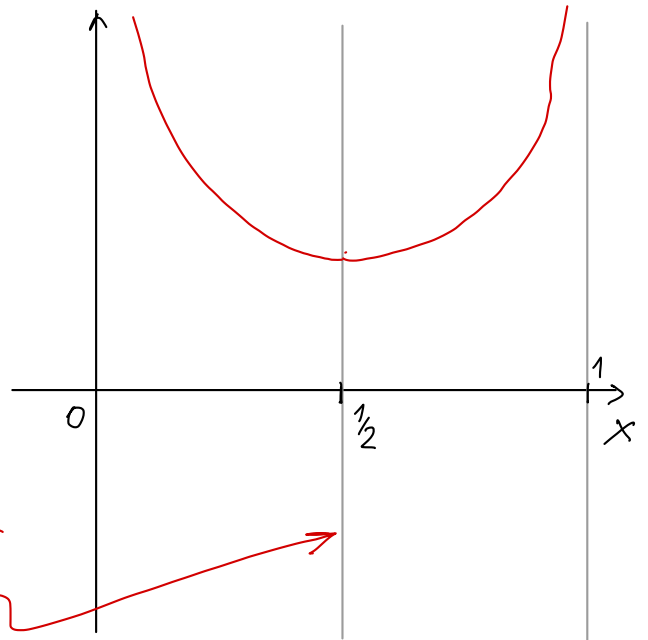
$$\Gamma(2z) = \cancel{\Gamma(z)} \cdot 2^{2z-1} \frac{\Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\cancel{\Gamma(z)}} = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2})$$

Kontrolle: $z = \frac{1}{2} \Rightarrow \Gamma(1) \stackrel{?}{=} \frac{2^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(1) \quad \checkmark$

11. Spiegelsatz

Satz: Für $0 < x < 1$ gilt

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$



Symmetrisch bezüglich der Geraden $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$

$\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = B(x, 1-x)$, d.h. es ist nur der Wert von $B(x, 1-x)$ zu berechnen.

$$B(x, 1-x) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{-x} dt$$

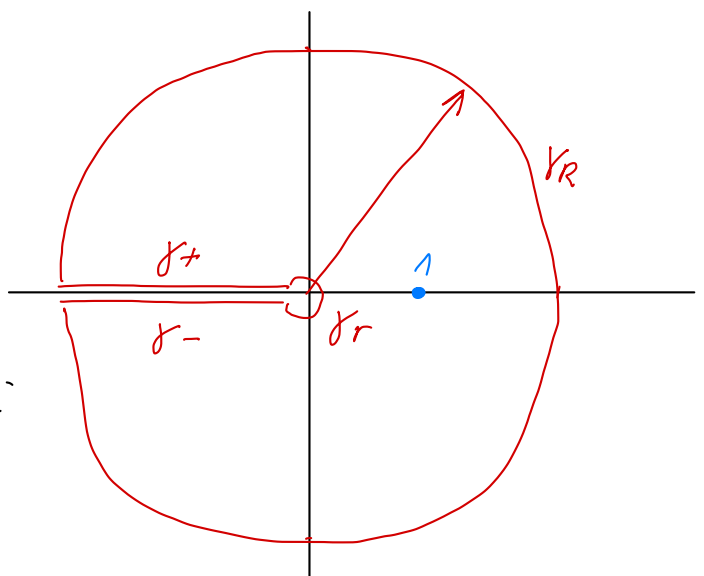
Substitution: $t = \frac{s}{s+1}$, $s \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} B(x, 1-x) &= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x-x}} \cdot \frac{1}{(s+1)^{-x}} \cdot \frac{1}{(s+1)^{x+1}} ds \\ &= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{s+1} ds \end{aligned}$$

Dieses Integral kann mit Cauchys Integralformel aus

$$-\oint_{\gamma} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = 2\pi i$$

berechnet werden.



Berechnung der einzelnen Pfadteile: mit der Parametrisierung $z(t) = Re^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$

$$I_R = \oint_{\gamma_R} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^{x-1} e^{it(x-1)}}{1-Re^{it}} iRe^{it} dt$$

$$= i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^x e^{itx}}{1-Re^{it}} dt$$

Für $R \rightarrow \infty$:

$$I_R = i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^{x-1} e^{itx}}{\underbrace{1/R}_{\rightarrow 0} - e^{it}} dt$$

$0 < x < 1$

$$= i \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(x-1)} dt \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} R^{x-1} \stackrel{< 0}{=} 0$$

Für $r \rightarrow \infty$:

$$I_r = i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overbrace{r^x}^{\rightarrow 0} e^{itx}}{1 - \underbrace{re^{it}}_{\rightarrow 0}} dt \rightarrow 0$$

Die Segmente γ_{\pm} : z^{x-1} muss für γ_+ und γ_- verschieden berechnet werden:

$$\gamma_{\pm}(t) = te^{\pm i\pi} \quad z^{x-1} = t^{x-1} e^{\pm i\pi(x-1)}$$

$$\int_{\gamma_{\pm}} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = - \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1} e^{\pm i\pi(x-1)}}{1-te^{\pm i\pi}} dt$$

$$= - \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \cdot e^{\pm i\pi(x-1)}$$

γ_1 wird von $-\infty$ nach 0 durchlaufen
 γ_2 von 0 nach $-\infty$, d.h.

$$\oint \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = + \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \cdot e^{i\pi(x-1)}$$

$$- \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \cdot e^{-i\pi(x-1)}$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \left(e^{i\pi(x-1)} - e^{-i\pi(x-1)} \right)$$

$$= - \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \cdot 2i \cdot \underbrace{\frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i}}_{\sin \pi x}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = - \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \cdot \frac{\sin \pi x}{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \square$$

Anwendung: $z = \frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$