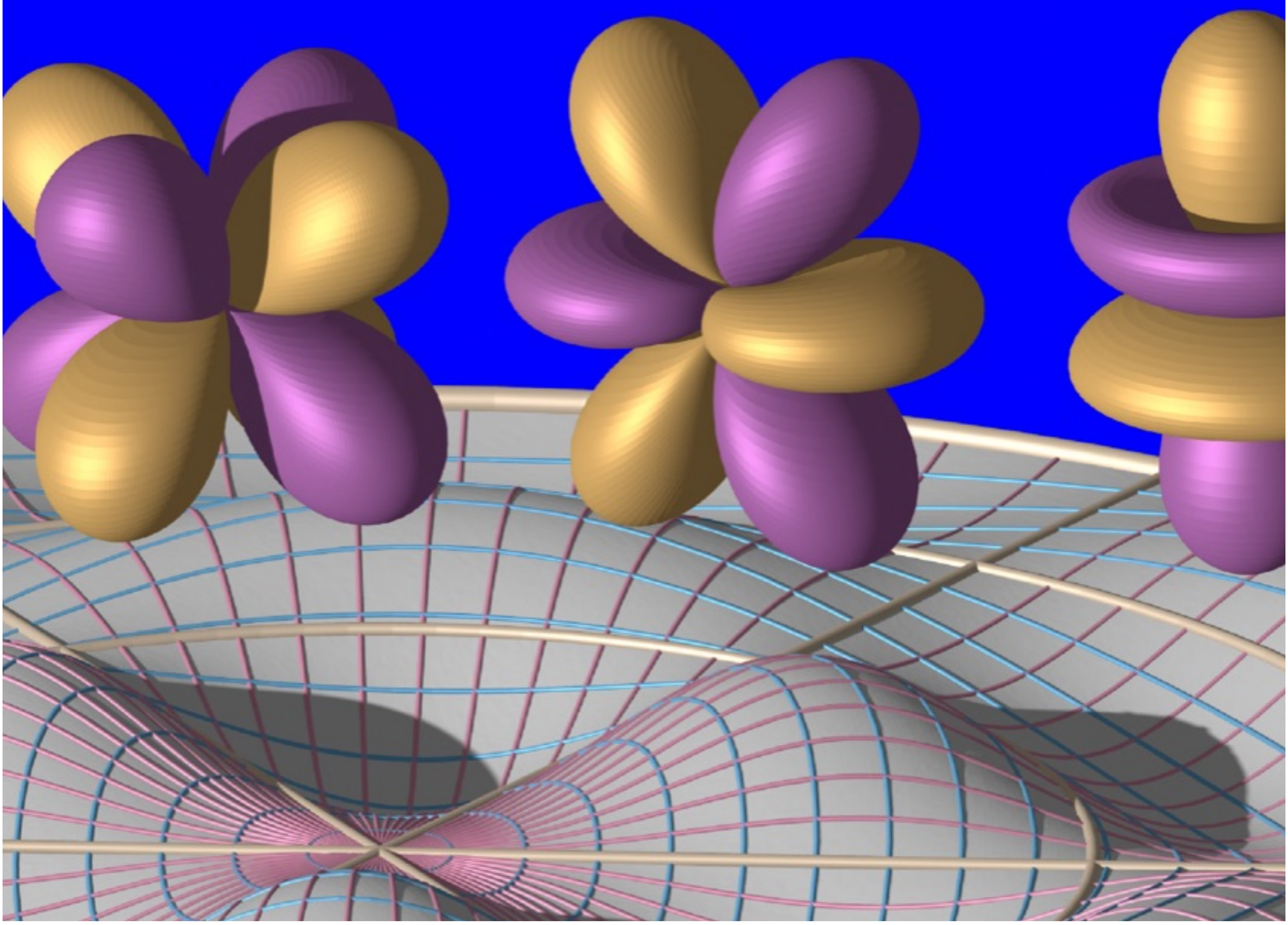
Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

3. Differentialgleichungen



Inhalt

1. Der Satz von Cauchy-Kovalewskaya

"Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten haben analytische Lösungen"

<u>Satz:</u> F und f_j analytische Funktionen nahe 0, hat das Cauchy-Problem

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u = F\left(x, t, \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u\right)$$

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} u(x,0) = f_j(x) \quad , \quad 0 \le j < k$$

in einer Umgebung von 0 eine analytische Lösung, wenn $j < k$ und $|\alpha| + j \le k$.

ohne Beweis

Notation: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u = \partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} u$$

Spezialfall: $n = 0$, F linear in den Ableitungen, dann hat das Cauchy-Problem die Form

$$\frac{d^k u}{dt^k} = a_{k-1}(t) \frac{d^{k-1} u}{dt^{k-1}} + \dots + a_1(t) \frac{du}{dt} + a_0(t)$$

$$\frac{d^{k-1} u}{dt^{k-1}}(0) = u_{k-1,0} , \dots \frac{du}{dt}(0) = u_{1,0}, \quad u(0) = u_{0,0}$$

mit $a_i(t)$ analytisch. $\Longrightarrow$ DGl hat eine analytische Lösung.

2. Potenzreihenmethode

Cauchy-Kovalevskaya $\Rightarrow$ Lösung als Potenzreihe suchen.

<u>Beispiel 1:</u> $y' = -y\,,\quad y(0) = y_0$

1. **Ansatz:** $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
2. Ableitung: $y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1}$

Einsetzen:

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$-y(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots$$

3. **Koeffizientenvergleich:**

$$a_1 = -a_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_1$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} a_2$$

$$\vdots$$

4. **Rekursionsformel:** $a_k = -\frac{1}{k}\, a_{k-1}$

5. **Anfangsbedingung:** $y(0) = a_0 = y_0$

einsetzen:

$$a_1 = -a_0 = -y_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} y_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} a_2 = -\frac{1}{2\cdot 3} y_0 = -\frac{1}{3!} y_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4} a_3 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} y_0 = \frac{1}{4!} y_0$$

6. **Lösung:** $y(x) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = y_0 e^{-x} = y_0\, {}_0F_0(-x)$

Beispiel 2: Potenzreihe von $y(x) = (1+x)^\alpha$

Differentialgleichung für y bestimmen:

$$y' = \alpha (1+x)^{\alpha-1} \qquad | \cdot (1+x)$$

$$(1+x) y' = \alpha (1+x)^\alpha = \alpha y$$

d.h. gesuchte Potenzreihe ist Lösung der DGl

$$(1+x)y' = \alpha y \quad , \quad y(0) = 1$$

1. Ansatz: $\quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Ableitung: $\quad y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1}$

2. Einsetzen:

$$(1+x)y' = a_1 + (2a_2 + a_1)x + (3a_3 + 2a_2)x^2 + \ldots$$

$$\alpha y = \alpha a_0 + \alpha a_1 \, x + \alpha a_2 \, x^2 + \ldots$$

3. Koeffizientenvergleich:

$$a_1 = \alpha a_0$$

$$2a_2 + a_1 = \alpha a_1$$

$$3a_3 + 2a_2 = \alpha a_2$$

$$\vdots$$

$$(k+1)a_{k+1} + k a_k = \alpha a_k \Rightarrow (k+1) a_{k+1} = (\alpha - k) a_k$$

4. Rekursionsformel: $\quad a_{k+1} = \dfrac{\alpha - k}{k+1} a_k \quad \forall k$

5. Anfangsbedingung

$$y(0) = 1 \implies a_0 = 1$$

$$\implies \quad a_1 = \alpha$$

$$a_2 = \frac{\alpha-1}{2} a_1 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}$$

$$a_3 = \frac{\alpha-2}{3} a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\implies \quad a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

verallgemeinerter Binomialkoeffizient

6. Lösung: $y(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$

Beobachtung: Die Koeffizienten, die diese Methode findet, sind typischerweise von der Form

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = f(k), \quad f \text{ eine rationale Fkt}$$

Beispiel 1: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \frac{1}{k+1}$

Beispiel 2: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha-k}{k+1}$

Definition: Eine analytische Fkt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ heisst hypergeometrisch, wenn

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = f(k), \text{ rationale Fkt von } k$$

3. Hypergeometrische Funktionen

Definition: hypergeometrische Reihe

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} ; x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!} $$

Beispiele:

① $$ {}_0F_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x $$

② $$ {}_1F_0(\alpha; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{1} \frac{x^k}{k!} $$

$$ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!}(-1)^k \cdot (-x)^k $$

$$ = \binom{\alpha}{n} $$

$$ = (1-x)^{\alpha} $$

Rechtfertigung des Namens: Wie folgt aus $a_{k+1}/a_k = f(k)$ eine hypergeometrische Reihe?

$$ f(k) = \frac{p(k)}{q(k)} = \frac{(k-\alpha_1)\cdots(k-\alpha_n)}{(k-\beta_1)\cdots(k-\beta_m)} $$

wobei a_i = Nullstellen des Zählerpolynoms $p(k)$
und b_j = Nullstellen des Nennerpolynoms $q(k)$

Berechnung der Koeffizienten aus a_0

$$ a_1 = f(0)a_0 = \frac{(-\alpha_1)\cdots(-\alpha_n)}{(-\beta_1)\cdots(-\beta_m)} a_0 $$

$$a_2 = f(1)\,a_1 = \frac{(-\alpha_1)(1-\alpha_1)\cdots(-\alpha_n)(1-\alpha_n)}{(-\beta_1)(1-\beta_1)\cdots(-\beta_m)(1-\beta_m)}\, a_0 r^2$$

$$a_3 = f(2)\,a_2 = \frac{(-\alpha_1)(1-\alpha_1)(2-\alpha_1)\cdots}{(-\beta_1)(1-\beta_1)(2-\beta_1)\cdots}\, a_0 r^3$$

$$= \frac{(-\alpha_1)(-\alpha_1+1)(-\alpha_1+2)\cdots}{(-\beta_1)(-\beta_1+1)(-\beta_1+2)\cdots}\, a_0 r^3$$

$$= \frac{(-\alpha_1)_3\,(-\alpha_2)_3\cdots(-\alpha_n)_3}{(-\beta_1)_3\,(-\beta_2)_3\cdots(-\beta_m)_3}\, r^3$$

$\vdots$

$$a_k = \frac{(-\alpha_1)_k\cdots(-\alpha_n)_k}{(-\beta_1)_k\cdots(-\beta_m)_k}\, a_0 r^k$$

Wenn der Nenner $\beta_m = 0$ als Nullstelle hat, dann ist die Reihe:

$$a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_1)_k\cdots(-\alpha_n)_k\,(1)_k}{(-\beta_1)_k\cdots(-\beta_{m-1})_k}\,\frac{x^k r^k}{k!}$$

wegen $(1)_k = k!$

$$= {}_{n+1}F_m\left(\begin{matrix}-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n, 1\\ -\beta_1, \ldots, -\beta_m\end{matrix}; xr\right) a_0$$

d.h. Potenzreihenlösungen analytischer DGl werden im allgemeinen hypergeometrische Reihen sein.

Beispiele:

① Eine Lösung der Kummerschen DGl

$$z^2 w''(z) + (b-z)w'(z) - aw(z) = 0$$

ist $w(z) = {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}; z\right) = {}_1F_1(a; b; z)$

② Eine Lösung der "hypergeometrischen DGl"

$$z(1-z)\, w''(z) + (c-(a+b+1)z)w'(z) - ab\,w(z) = 0$$

ist die hypergeometrische Funktion

$$w(z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right) = {}_2F_1(a, b; c; z)$$

Weitere Fakten zu hypergeometrischen Fkt:

- ${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z\right)$ ist Lösung einer DGl, deren Koeffizienten durch $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ festgelegt sind.

- Durch Substitution können die bekannten DGl spezieller Funktionen in die Form der DGl gebracht werden.

- Die meisten speziellen Funktionen können durch hypergeom. Reihen ausgedrückt werden.

(Details im Buch)

4. Besselsche Differentialgleichung

Die Besselsche Differentialgleichung ist

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0$$

"Einigermassen natürlich"

- Taucht bei der Separation des Laplace-Operators in Polarkoordinaten auf
- Masseinheiten

$$[y'] = \frac{[y]}{[x]} \Rightarrow [xy'] = [y]$$

$$[y''] = \frac{[y]}{[x]^2} \Rightarrow [x^2y''] = [y]$$

d.h. Masseinheiten der Ableitungsterme "passen"

Potenzreihenansatz: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$$\cancel{x^2}\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k\cancel{-2}} + \cancel{x}\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k\cancel{-1}}$$

$$+(x^2-\nu^2)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \left(k(k-1)a_k + ka_k - \nu^2 a_k + a_{k-2}\right)x^k$$

$$+ \quad (1-\nu^2)a_1 x - \nu^2 a_0 = 0$$

Koeffizientenvergleich:

$$-\nu^2 a_0 = 0 \implies a_0 = 0 \quad \text{falls } \nu \neq 0$$
$$(1-\nu^2) a_1 = 0 \implies a_1 = 0 \quad \text{falls } \nu \neq \pm 1$$

$$(k(k-1) + k - \nu^2) a_k + a_{k-2} = 0 \qquad \forall k \geq 2$$

$$\implies a_k = \frac{a_{k-2}}{k^2 - \nu^2} = 0 \quad \forall k \geq 2$$

Lösung: $y(x) = 0$ d.h. die Potenzreihenmethode ist nicht in der Lage, eine Lösung zu finden!

<u>Ursache:</u> Differentialgleichung ist an der Stelle $x=0$ singulär:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

$\implies$ Lösung hat ebenfalls eine Singularität bei $x=0$, aber eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ kann bei $x=0$ keine Singularität haben!

Eine Potenzreihe ist eine zu wenig allgemeine Ansatzfunktion!

5. Verallgemeinerte Potenzreihen

Ziel: Potenzreihenansatz derart verallgemeinern, dass auch Singularitäten bei $x=0$ dargestellt werden können.

Beispiel: Pole können mit einer Laurent-Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k x^k = \frac{a_{-n}}{x^n} + \frac{a_{-n+1}}{x^{n-1}} + \dots$$

dargestellt werden.

Laurent-Reihen können aber "milde" Singularitäten wie $f(x)=\sqrt{x}$ nicht darstellen, bei denen f stetig ist, aber eine Ableitung divergiert.

Definition: Verallgemeinerte Potenzreihe:

$$f(x) = x^{\varrho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\varrho}$$

mit $a_0 \neq 0$

$a_0 \neq 0$ lässt sich immer erreichen: Wenn $a_k x^{k+\varrho}$ der erste Term $\neq 0$ ist, ersetzt man ϱ durch $\varrho + k$ und a_i durch a_{i-k} um eine verallg. Potenzreihe zu erhalten

6. Lösung der Besselschen Differentialgleichung

Lösungsansatz mit verallgemeinerter Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho}$$

→ zusätzlich muss jetzt auch noch die neue Unbekannte ρ bestimmt werden.

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) a_k x^{k+\rho-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) a_k x^{k+\rho-2}$$

Einsetzen:

$$0 = x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) a_k x^k$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \nu^2 x^{k+\rho}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \Big(\big((k+\rho)(k+\rho-1) + (k+\rho) - \nu^2\big) a_k + a_{k-2}\Big) x^{k+\rho}$$

$$+ \big((1+\rho)\rho + (1+\rho) - \nu^2\big) a_1 x \qquad \text{Fall } k=1$$

$$+ \big(\rho(\rho-1) + \rho - \nu^2\big) a_0 = 0$$

Fall $k=0$

Koeffizientenvergleich:

$k=0$: $$((\rho-1)\rho+\rho-\nu^2)a_0=(\rho^2-\nu^2)a_0=0$$

wegen $a_0\neq 0$ (Definition einer verallg. Potenzreihe) muss

$$\boxed{\rho^2-\nu^2=0 \quad \text{Indexgleichung}}$$

sein $\Longrightarrow \quad \rho=\pm\nu.$

$k=1$: $$((1+\rho)\rho+(1+\rho)-\nu^2)a_1$$
$$=(\underbrace{\rho^2-\nu^2}_{=0}+2\rho+1)a_1=(2\rho+1)a_1=0$$

Im Fall $\rho=-\frac{1}{2}$ gibt es Lösungen mit $a_1\neq 0$, im Allgemeinen folgt $a_1=0$.

$k\geq 2$: $$((k+\rho)(k+\rho\cancel{-1})+\cancel{(k+\rho)}-\nu^2)a_k+a_{k-2}=0$$

$$\Longrightarrow \quad a_k=-\frac{a_{k-2}}{(k+\rho)^2-\nu^2}$$
$$=-\frac{a_{k-2}}{k^2+2k\rho+\underbrace{\rho^2-\nu^2}_{=0}}$$

Rekursionsformel: $$a_k=\frac{-1}{k(k+2\rho)}a_{k-2}$$
$$=\frac{-1}{k(k\pm 2\nu)}a_{k-2}$$

Beobachtung: der Quotient

$$\frac{a_k}{a_{k-2}} = \frac{-1}{k(k\pm 2\nu)}$$

ist eine rationale Fkt. von k, d.h. die Lösungsfunktion wird eine hypergeometrische Reihe in x^2 sein!

Berechnung der Koeffizienten zu $a_0 = 1$

$$a_2 = \frac{-1}{2(2\pm 2\nu)}$$

$$a_4 = \frac{1}{2(2\pm 2\nu)4(4\pm 2\nu)}$$

$$a_6 = \frac{-1}{2(2\pm 2\nu)4(4\pm 2\nu)6(6\pm 2\nu)}$$

$$\vdots$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(1\pm\nu)2(2\pm\nu)\cdots k(k\pm\nu)}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{2k}\, k!\, \underbrace{(\pm\nu+1)(\pm\nu+2)\cdots(\pm\nu+k)}_{(\pm\nu+1)_k}}$$

Lösung:

$$y(x) = x^{\pm\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(\pm\nu+1)_k}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k$$

$$= x^{\alpha}\,{}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \alpha+1\end{matrix};\, -\frac{x^2}{4}\right), \quad \alpha = \pm\nu$$

7. Bessel-Funktionen

Bessel-Funktionen verwenden eine andere Normierung, basierend auf

$$\Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+k)\Gamma(\alpha+(k-1)+1)$$
$$= (\alpha+k)(\alpha+k-1)\Gamma(\alpha+(k-2)+1)$$
$$\vdots$$
$$= \underbrace{(\alpha+k)(\alpha+k-1)\cdots(\alpha+1)}_{\text{bereits im Nenner}}\Gamma(\alpha+1)$$

$$y(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}_{J_\alpha(x)} \quad \Gamma(\alpha+1) \quad 2^{\alpha}$$

Definition: Bessel-Funktion der Ordnung α

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}$$

Die oben gefundene Lösung ist

$$y(x) = 2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)\, J_\alpha(x)$$

Die Bessel-Funktionen sind hypergeometrische Reihen:

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} {}_0F_1\left({- \atop \alpha+1} ; -\frac{x^2}{4} \right)$$

Dgl für ${}_0F_1$ kann in Bessel-DGl umgeformt werden.

Eigenschaften der Bessel-Funktionen:

① $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

d.h. wir haben nur <u>eine</u> Lösung einer DGl 2. Ordnung, es muss noch eine <u>zweite</u> geben!

② Die Rekursionsformel zur Bestimmung der Koeffizienten der verallg. Potenzreihe funktioniert nicht mehr, wenn 2ν eine ganze Zahl ist, da $k \pm 2\nu = 0$ werden kann
$\Rightarrow$ auch in diesem Fall würde nur eine Lösungsfunktion (statt 2) gefunden.

Verallgemeinerungen: Differentialgleichungen der Form

$$x^2 y'' + p(x) x y' + q(x) y = 0$$

(Bessel-DGl: $p(x) = 1$, $q(x) = x^2 - \nu^2$), mit $p(x)$ und $q(x)$ analytisch: $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$, $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$

- Indexgleichung: $\varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0 = 0$
- Nenner der Rekursionsformel ist
  $$F(X) = X(X+1) + p_0 X + q_0, \quad X = k + \varrho$$
  d.h. Lösung ist hypergeometrische Reihe
- Nullstellen von $F(X)$ haben "fehlende" Lösungen zur Folge

8. Erzeugende Funktion der Bessel-Funktionen

Erzeugende Funktion der Folge $a_0, a_1, a_2 \dots$ ist

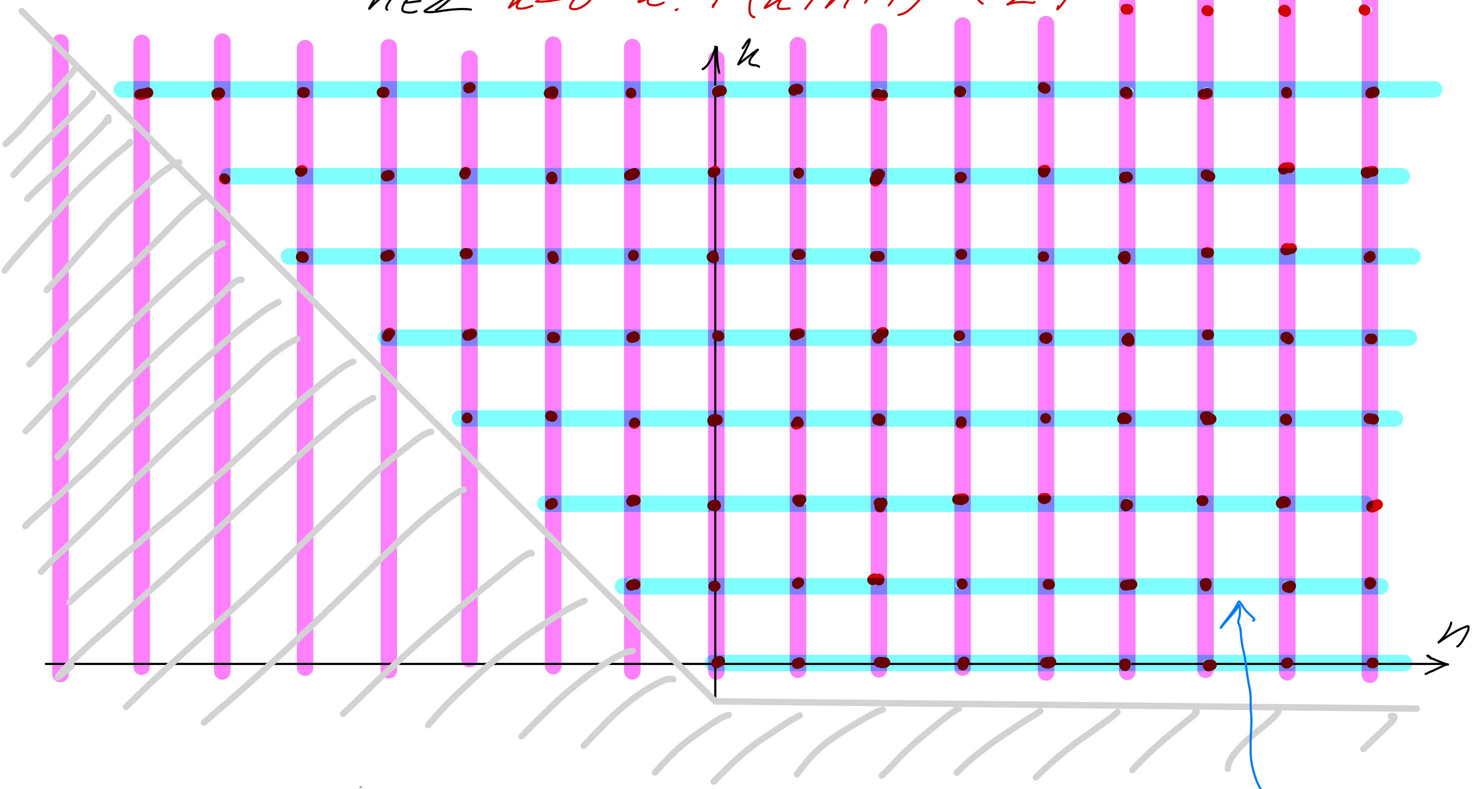
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

Für die Bessel-Funktionen $J_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$ ist die erzeugende Funktion

"vertikale" Summen

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x) z^n$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} z^n$$



$k+n+1 \leq 0 \Rightarrow \Gamma(k+n+1) = \infty$, diese Terme der Potenzreihe verschwinden

"horizontale" Summen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} z^n$$

Umformung der blauen Summen mit dem Ziel, dass k und $n+k$ Laufvariablen werden

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+k} z^{n+k} z^{-k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k z^{-k}}_{=\exp\left(-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{z}\right)} \sum_{n+k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+k} z^{n+k}$$

setze $k+n =: m$

$$= \exp\left(-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{z}\right) \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{\Gamma(m+1)}_{=m!}} \left(\frac{x}{2}\right)^m z^m}_{\exp\left(\frac{x}{2}\cdot z\right)}$$

$$= \exp\left(\frac{x}{2}\cdot\left(-\frac{1}{z}+z\right)\right).$$

<u>Satz</u>: Die erzeugende Funktion der Bessel-Funktionen ist

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x) z^n = \exp\left(\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

9. Additionstheorem

Die Tatsache, dass die erzeugende Funktion der Bessel-Funktionen eine Exponentialfunktion ist, hat eine interessante Konsequenz:

$$(*) \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x) z^n \cdot \sum_{m\in\mathbb{Z}} J_m(y) z^n$$

$$= \exp\left(\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{y}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{x+y}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} J_k(x+y) z^k$$

$\Longrightarrow$ $J_k(x+y)$ durch $J_n(x)$ und $J_m(y)$ ausdrücken!

$$(*) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} J_n(x) J_m(y) z^{\overbrace{n+m}^{=k}} \qquad m = k-n$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x) J_{k-n} \right) z^k$$

Koeffizientenvergleich liefert das Additionstheorem

<u>Satz</u> (Additionstheorem):

$$J_k(x+y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x) J_{k-n}(y)$$

10. Separation in Polar-Koordinaten

Laplace-Differentialgleichung $\Delta u = -u$
in Polarkoordinaten:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Separationsansatz: $u(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$
einsetzen:

$$\Delta u = R''(r)\,\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\,\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\,\Phi''(\varphi)$$

Division durch $R(r)\,\Phi(\varphi)$:

$$\frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -u$$

Separation: Multiplikation mit r^2

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r) + r^2 R(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu^2$$

$$r^2 R'' + r R' + (r^2 - \nu^2) R = 0$$

Besselsche Differentialgleichung

$$\Phi'' = -\nu^2 \Phi$$

$\Rightarrow$ Die Bessel-Funktionen "leben" in Polarkoordinaten

11. Fourier-Transformation und Bessel-Funktionen

Ausgangspunkt: 2-dimensionale Fourier-Transformation in kartesischen Koordinaten

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto f(x,y)$$

$$\mathcal{F}f(u,v) = F(u,v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) e^{i(xu+yv)} \, dx\, dy$$

Wellen in $\mathbb{R}^2$ sind Lösungen der Wellen-Gleichung $\partial_t^2 u = \Delta u$, Fouriertheorie stellt jede Welle als Überlagerung ebener Wellen

$$(x,y) \longmapsto e^{i(xu+yv)}$$

mit Wellenzahlvektor $k = (u,v)$ dar.

In Polarkoordinaten wird jede Welle als Überlagerung von Wellen der Form

$$J_n(\varrho r)\, e^{i\varphi\vartheta}$$

mit Parameter (ϱ, ϑ) darstellbar. Daher muss es eine Formel geben, die J_n mit Integralen über Geraden trigonometrischer Funktionen verbindet.

Koordinatenumrechnung:

$$x = r\cos\varphi \qquad u = R\cos\vartheta$$
$$y = r\sin\varphi \qquad v = R\sin\vartheta$$
(Ort) (Wellenzahlvektor)

Skalarprodukt:

$$xu + yv = rR(\cos\varphi\cos\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta)$$
$$= rR\cos(\varphi - \vartheta)$$

Fourier-Transformation in Polarkoordinaten

$$F(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$\times\, e^{irR\cos(\varphi-\vartheta)}\, r\, d\varphi\, dr$$

Die Funktion $(r,\varphi) \mapsto f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ ist 2π-periodisch in φ, hat daher eine konv. Fourier-Reihe mit Fourier-Koeffizienten $f_n(r)$:

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(r)e^{in\varphi}$$

Einsetzen in die Fourier-Transformation

$$F(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(r)e^{in\varphi + irR\cos(\varphi-\vartheta)}\, r\, d\varphi\, dr$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty f_n(r)\, r\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi + irR\cos(\varphi-\vartheta)}\, d\varphi\, dr$$

Inneres Integral auswerten:

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in(\varphi+\vartheta) + irR\cos\varphi}\, d\varphi$$

$\varphi \to \varphi + \vartheta$ dank Periodizität

$$= \frac{1}{2\pi}\, e^{in\vartheta} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi + i\overset{\xi}{rR}\cos\varphi}\, d\varphi$$

$$= e^{in\vartheta}\, \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi + i\xi\cos\varphi}\, d\varphi}_{F_n(\xi)}$$

Lemma: $F_n(\xi)$ sind die komplexen Fourier-Koeffizienten der Funktion $\varphi \mapsto e^{i\xi\cos\varphi}$, d.h.

$$e^{i\xi\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\xi)\, e^{in\varphi}$$

$$= F_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(F_n(\xi)e^{in\varphi} + F_{-n}(\xi)e^{-in\varphi}\right)$$

Berechnung von $F_n(\xi)$:

als Potenzreihe entwickeln

$$F_n(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi}\, e^{i\xi\cos\varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \xi^k}{k!} \cos^k\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k\xi^k}{k!} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{in\varphi}\cos^k\varphi\, d\varphi}_{\sim \text{ Fourier-Koeffizient der Funktion } \cos^k\varphi}$$

Strategie:

1. $\cos\varphi$ durch Exponentialfunktion ausdrücken
2. $\cos^k\varphi$ durch Exponentialfunktion ausdrücken
3. Integral berechnen

Schritt 1: $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$

Schritt 2: $\cos^k\varphi = \frac{1}{2^k}\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} e^{i\varphi(m-(k-m))}$

$$= \frac{1}{2^k} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m} e^{i\varphi(2m-k)}$$

Schritt 3: Integral berechnen

$$\int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \cos^k\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2^k}\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(n+2m-k)} d\varphi$$

Fälle unterscheiden: $n+2m-k=0$ oder nicht

Fall $\ell = n+2m-k \neq 0$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi\ell} d\varphi = \left[\frac{1}{\ell} e^{i\varphi\ell}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Fall $\ell = n+2m-k = 0$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi\ell} d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi = 2\pi$$

Somit muss nur $m = \frac{1}{2}(k-n)$ ausgewertet werden:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi}\cos^k\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2^k}\binom{k}{\frac{1}{2}(k-n)}$$

Zusammensetzen:

$$F_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \xi^k}{k!\,2^k}\binom{k}{\boxed{\frac{1}{2}(k-n)}}$$

muss ganzzahlig sein!

$$m = \frac{1}{2}(k-n) \Longrightarrow k = 2m+n$$

$$F_n(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m+n}}{(2m+n)!}\binom{2m+n}{m}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+n}$$

Umformung in etwas, was der Besselfunktion ähnelt:

$$F_n(\xi) = i^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\cancel{(2m+n)!}} \frac{\cancel{(2m+n)!}}{m!\,(m+n)!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+n}$$

$$= i^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+n}$$

$$= i^n J_n(\xi)$$

$$F_{-n}(\xi) = i^{-n} J_{-n}(\xi) = (-i)^n(-1)^n J_n(\xi)$$
$$= i^n J_n(\xi) = F_n(\xi)$$

Lemma:

$$e^{i\xi\cos\varphi} = J_0(\xi) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\xi)\cos n\varphi$$

Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$e^{i\xi\cos\varphi} = \cos(\xi\cos\varphi) + i\sin(\xi\cos\varphi)$$

Rechte Seite: alles reell ausser i^n, d.h. gerade Terme → Realteil, ungerade Terme → Imaginärteil

$$\cos(\xi\cos\varphi) = J_0(\xi) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(\xi)\cos 2k\varphi$$

$$\sin(\xi\cos\varphi) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(\xi)\cos(2k+1)\varphi$$

(beide Funktionen sind gerade Fkt. von φ, haben daher eine Fourier-Cosinus-Reihe)

<u>Lemma:</u> Die Bessel-Funktionen sind im Wesentlichen die Fourier-Koeffizienten der Funktionen $\varphi \longmapsto \cos(\xi\cos\varphi)$ und $\varphi \longmapsto \sin(\xi\cos\varphi)$

12. Fourier und erzeugende Funktionen

zur Erinnerung: erzeugende Funktion der Bessel-Funktionen ist

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(\xi) z^n = \exp\left(\frac{\xi}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

Setze $z = ie^{i\varphi}$

$$\left.\begin{aligned} z &= ie^{i\varphi} \\ \frac{1}{z} &= -ie^{-i\varphi} \end{aligned}\right\} \quad z \quad \frac{1}{z} = i\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

$$= -2\,\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$= -2\cos\varphi$$

RHS: $\exp(-\xi\cos\varphi)$

LHS: $f(ie^{i\varphi}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(\xi)\, i^n e^{in\varphi}$

$$= J_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(J_n(\xi)\, i^n e^{in\varphi} + J_{-n}(\xi)\, i^{-n} e^{-in\varphi}\right)$$

$$= J_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\xi)\left(i^n e^{in\varphi} + (-1)^n i^{-n} e^{-in\varphi}\right)$$

$$= J_0(\xi) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\xi)\cos n\varphi$$

13. Integraldarstellung der Bessel-Funktionen

Ausgangspunkt: $F_n(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\xi\cos\varphi} e^{in\varphi}\, d\varphi$

Substitution: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \lambda$, $d\varphi = -d\lambda$

$$F_n(\xi) = \frac{-1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} e^{i\xi \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2}-\lambda)}_{=\sin\lambda}} e^{-in\lambda} \underbrace{e^{in\frac{\pi}{2}}}_{=i^n}\, d\lambda$$

$$= \frac{i^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi\sin\lambda} e^{-in\lambda}\, d\lambda$$

$$= i^n \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{-in\lambda + i\xi\sin\lambda}\, d\lambda + \int_0^{\pi} e^{in\lambda - i\xi\sin\lambda}\, d\lambda\right)$$

$$i^n J_n(\xi) = i^n \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\lambda - \xi\sin\lambda)\, d\lambda$$

Satz (Integraldarstellung der Bessel-Funktionen

$$J_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\lambda - \xi\sin\lambda)\, d\lambda$$

14. Frequenzmodulation

Ein Träger mit Frequenz f_c wird mit der Frequenz f_m frequenzmoduliert, dabei entsteht das Signal

$$f(t) = \cos(\omega_c t + \beta \cos(\omega_m t)),$$

wobei β die Modulationsstärke ist.

Additionstheoreme verwenden

$$f(t) = \cos(\omega_c t)\cos(\beta \cos(\omega_m t)) - \sin(\omega_c t)\sin(\beta\cos(\omega_m t))$$

Im ersten Term Identität für $\cos(\beta\cos(\varphi))$ verwenden:

$$f(t) = J_0(\beta)\cos(\omega_c t) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(\beta)\cos(2k\omega_m t)\cos(\omega_c t) - 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(\beta)\cos((2k+1)\omega_m t)\sin(\omega_c t)$$

Produkte von trig. Fkt durch eine Fkt ausdrücken mit Hilfe von

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))$$

$$
\begin{aligned}
f(t) = {} & J_0(\beta)\cos(\omega_c t) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta)\Big(\cos(\omega_c + 2k\omega_m)t \\
& \qquad\qquad + \cos(\omega_c - 2k\omega_m)t\Big) \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\beta)\Big(\sin(\omega_c + (2k+1)\omega_m)t \\
& \qquad\qquad - \sin(\omega_c - (2k+1)\omega_m)t\Big)
\end{aligned}
$$

Daraus kann man das Spektrum des Signals $f(t)$ ablesen.

Die Fourier-Transformation von $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ ist

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} \cos \omega t &= \pi(\delta_\omega + \delta_{-\omega}) \\
\mathcal{F} \sin \omega t &= -i\pi(\delta_\omega - \delta_{-\omega})
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} f = {} & \pi J_0(\beta)(\delta_{\omega_c} + \delta_{-\omega_c}) \\
& + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta)\left(\delta_{\omega_c + 2k\omega_m} + \delta_{-\omega_c - 2k\omega_m}\right) \\
& + i\pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\beta)\left(\delta_{\omega_c + (2k+1)\omega_m} - \delta_{-\omega_c - (2k+1)\omega_m}\right)
\end{aligned}
$$

d.h. der Fourier-Koeffizient der Frequenz $\pm(\omega_c + k\omega_m)$ hat den Betrag $|J_k(\beta)|$.