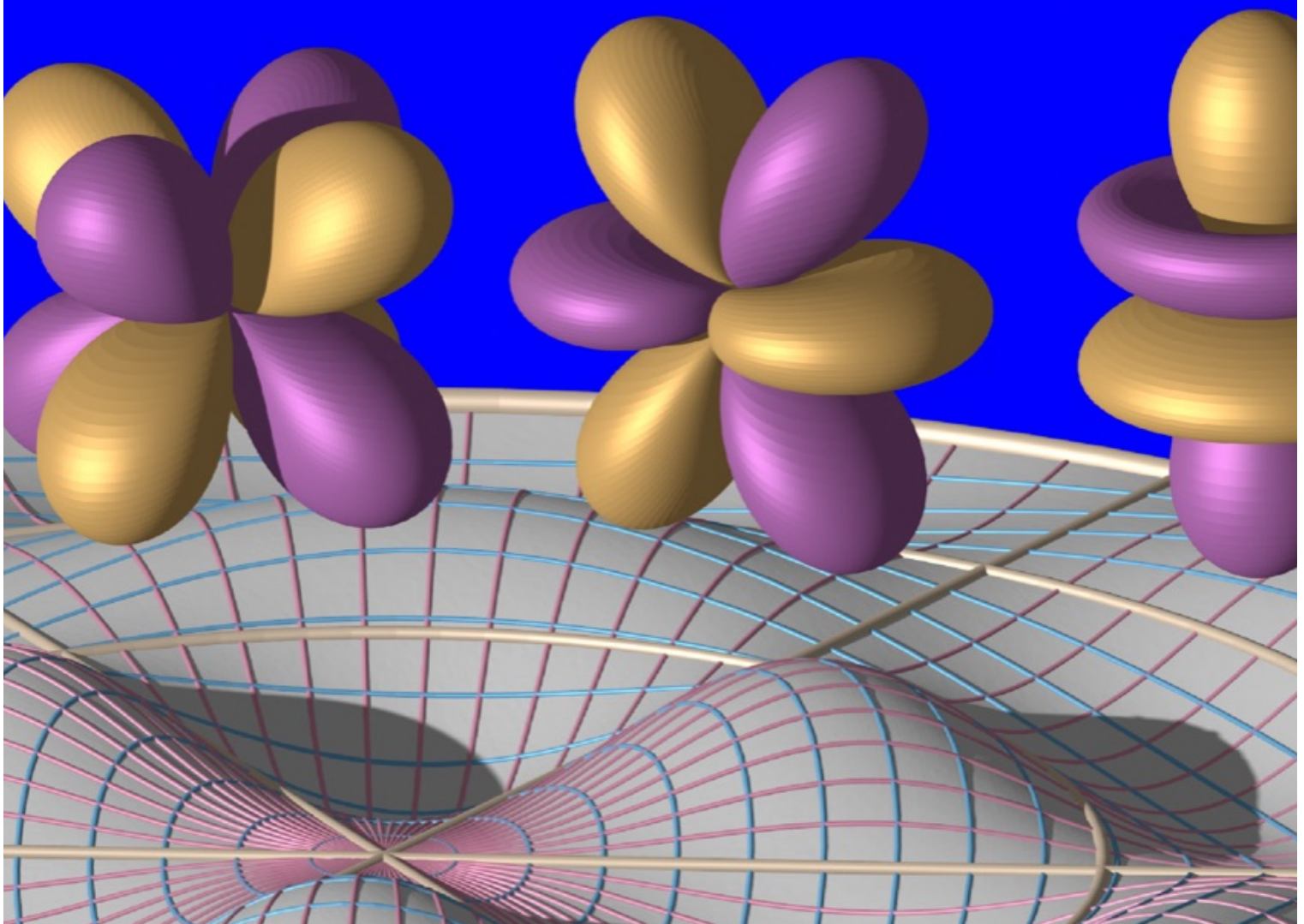


Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

3. *Differentialgleichungen*



Inhalt

1. Der Satz von Cauchy - Kowalewskaya	2
2. Potenzreihenmethode	3
3. Hypergeometrische Funktionen	6
4. Besselsche Differentialgleichung	9
5. Verallgemeinerte Potenzreihe	11
6. Lösung der Besselschen Differentialgleichung	12
7. Bessel-Funktionen	15
8. Erzeugende Funktion der Bessel-Funktionen	17
9. Additionstheorem	19
10. Separation in Polarkoordinaten	20
11. Fourier-Transformation und Bessel-Funktionen	21
12. Fourier-Transformation und erzeugende Funktion	27
13. Integraldarstellung der Bessel-Funktionen	28
14. Frequenzmodulation	29

1. Der Satz von Cauchy-Kovalevskaya

"Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten haben analytische Lösungen"

Satz: F und f_j analytische Funktionen nahe 0 , hat das Cauchy-Problem

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u = F\left(x, t, \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u\right)$$

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} u(x, 0) = f_j(x), \quad 0 \leq j < k$$

in einer Umgebung von 0 eine analytische Lösung, wenn $j < k$ und $|\alpha| + j \leq k$.

ohne Beweis

Notation: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u = \partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u$$

Spezialfall: $n=0$, F linear in den Ableitungen, dann hat das Cauchy-Problem die Form

$$\frac{d^k u}{dt^k} = a_{k-1}(t) \frac{d^{k-1} u}{dt^{k-1}} + \dots + a_1(t) \frac{du}{dt} + a_0(t)$$

$$\frac{d^{k-1} u}{dt^{k-1}}(0) = u_{k-1,0}, \dots, \frac{du}{dt}(0) = u_{1,0}, u(0) = u_{0,0}$$

mit $a_i(t)$ analytisch. \Rightarrow DGI hat eine analytische Lösung.

2. Potenzreihenmethode

Cauchy-Kovalevshaya \Rightarrow Lösung als Potenzreihe suchen.

Beispiel 1: $y' = -y$, $y(0) = y_0$

1. Ansatz: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

2. Ableitung: $y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1}$

Einsetzen: $y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

$$-y(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots$$

3. Koeffizientenvergleich:

$$a_1 = -a_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_1$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} a_2$$

\vdots

4. Rekursionsformel:

$$a_k = -\frac{1}{k} a_{k-1}$$

5. Anfangsbedingung:

$$y(0) = a_0 = y_0$$

einsetzen:

$$a_1 = -a_0 = -y_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} y_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} a_2 = -\frac{1}{2 \cdot 3} y_0 = -\frac{1}{3!} y_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4} a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} y_0 = \frac{1}{4!} y_0$$

6. Lösung: $y(x) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = y_0 e^{-x} = y_0 \cdot f_0(x)$

Beispiel 2: Potenzreihe von $y(x) = (1+x)^\alpha$

Differentialgleichung für y bestimmen:

$$y' = \alpha (1+x)^{\alpha-1} \quad | \cdot (1+x)$$

$$(1+x)y' = \alpha (1+x)^\alpha = \alpha y$$

d.h. gesuchte Potenzreihe ist Lösung der DGL

$$(1+x)y' = \alpha y, \quad y(0) = 1$$

1. **Ansatz**: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Ableitung: $y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1}$

2. **Einsetzen**:

$$(1+x)y' = a_1 + (2a_2 + a_1)x + (3a_3 + 2a_2)x^2 + \dots$$

$$\alpha y = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \dots$$

3. **Koeffizientenvergleich**:

$$a_1 = \alpha a_0$$

$$2a_2 + a_1 = \alpha a_1$$

$$3a_3 + 2a_2 = \alpha a_2$$

⋮

$$(k+1)a_{k+1} + ka_k = \alpha a_k \implies (k+1)a_{k+1} = (\alpha - k)a_k$$

4. **Rekursionsformel**: $a_{k+1} = \frac{\alpha - k}{k+1} a_k \quad \forall k$

5. Anfangsbedingung

$$y(0) = 1 \implies a_0 = 1$$

$$\implies a_1 = \alpha$$

$$a_2 = \frac{\alpha-1}{2} a_1 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}$$

$$a_3 = \frac{\alpha-2}{3} a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\implies a_k = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

verallgemeinerter Binomialkoeffizient

6. Lösung:

$$y(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Beobachtung: Die Koeffizienten, die diese Methode findet, sind typischerweise von der Form

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = f(k), \quad f \text{ eine rationale Fkt}$$

Beispiel 1: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \frac{1}{k+1}$

Beispiel 2: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha-k}{k+1}$

Definition: Eine analytische Fkt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ heisst hypergeometrisch, wenn

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = f(k), \quad \text{rationale Fkt von } k$$

3. Hypergeometrische Funktionen

Definition: hypergeometrische Reihe

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} ; x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!}$$

Beispiele:

$$\textcircled{1} \quad {}_0F_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad {}_1F_0(\alpha; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{1} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} (-1)^k \cdot (-x)^k \\ &= (1-x)^\alpha \end{aligned}$$

Rechtfertigung des Namens: Wie folgt aus $a_{k+1}/a_k = f(k)$ eine hypergeometrische Reihe?

$$f(k) = \frac{p(k)}{q(k)} = \frac{(k-\alpha_1) \cdots (k-\alpha_n)}{(k-\beta_1) \cdots (k-\beta_m)}$$

wobei α_i = Nullstellen des Zählpolynoms $p(k)$
und β_j = Nullstellen des Nennerpolynoms $q(k)$

Berechnung des Koeffizienten aus a_0

$$a_1 = f(1) a_0 = \frac{(1-\alpha_1) \cdots (1-\alpha_n)}{(1-\beta_1) \cdots (1-\beta_m)} a_0$$

$$\begin{aligned}
 a_2 = f(2)a_1 &= \frac{(2-\alpha_1)(1-\alpha_1) \cdots (2-\alpha_n)(1-\alpha_n)}{(2-\beta_1)(1-\beta_1) \cdots (2-\beta_m)(1-\beta_m)} a_0 \\
 a_3 = f(3)a_2 &= \frac{(3-\alpha_1)(2-\alpha_1)(1-\alpha_1) \cdots}{(3-\beta_1)(2-\beta_1)(1-\beta_1) \cdots} a_0 \\
 &= \frac{(-\alpha_1+1)(-\alpha_1+1+1)(-\alpha_1+1+2) \cdots}{(-\beta_1+1)(-\beta_1+1+1)(-\beta_1+1+2) \cdots} a_0 \\
 &= \frac{(-\alpha_1+1)_3 \cdots (-\alpha_n+1)_3}{(-\beta_1+1)_3 \cdots (-\beta_m+1)_3} a_0 \\
 &\vdots \\
 a_k &= \frac{(-\alpha_1+1)_k \cdots (-\alpha_n+1)_k}{(-\beta_1+1)_k \cdots (-\beta_m+1)_k} a_0
 \end{aligned}$$

Wenn der Nenner $\beta_m = 0$ als Nullstelle hat, dann ist die Reihe:

$$\begin{aligned}
 a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_1+1)_k \cdots (-\alpha_n+1)_k}{(-\beta_1+1)_k \cdots (-\beta_{m-1}+1)_k} \frac{x^k}{k!} & \quad \text{wegen } (1)_k = k! \\
 = {}_n F_{m-1} \left(\begin{matrix} -\alpha_1+1, \dots, -\alpha_n+1 \\ -\beta_1, \dots, -\beta_{m-1} \end{matrix} ; x \right)
 \end{aligned}$$

d.h. Potenzreihenlösungen analytischer DGL werden im allgemeinen hypergeometrische Reihen sein.

Beispiele:

① Eine Lösung der Kummer'schen DGI

$$z^2 w''(z) + (b-z)w'(z) - aw(z) = 0$$

$$\text{Ist } w(z) = {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}; z\right) = {}_1F_1(a; b; z)$$

② Eine Lösung der "hypergeometrischen DGI"

$$z(1-z)w''(z) + (c - (a+b+1)z)w'(z) - abw(z) = 0$$

ist die hypergeometrische Funktion

$$w(z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right) = {}_2F_1(a, b; c; z)$$

Weitere Fakten zu hypergeometrischer Fkt:

- ${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z\right)$ ist Lösung einer DGI, deren Koeffizienten durch $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ festgelegt sind.
- Durch Substitution können die bekannten DGI spezieller Funktionen in die Form der DGI gebracht werden.
- Die meisten speziellen Funktionen können durch hypergeom. Reihen ausgedrückt werden.

(Details im Buch)

4. Besselsche Differentialgleichung

Die Besselsche Differentialgleichung ist

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

"Energieerhaltung natürlich"

- Taucht bei der Separation des Laplace-Operators in Polarkoordinaten auf
- Masseneinheiten

$$[y'] = \frac{[y]}{[x]} \Rightarrow [xy'] = [y]$$

$$[y''] = \frac{[y]}{[x]^2} \Rightarrow [x^2 y''] = [y]$$

d.h. Masseneinheiten der Ableitungsterme "passen"

Potenzreihenansatz: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$$\cancel{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \cancel{x} \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$+ (x^2 - \nu^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} (k(k-1) a_k + k a_k - \nu^2 a_k + a_{k-2}) x^k + (1 - \nu^2) a_1 x - \nu^2 a_0 = 0$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} -v^2 a_0 &= 0 \implies a_0 = 0 \text{ falls } v \neq 0 \\ (1-v^2)a_1 &= 0 \implies a_1 = 0 \text{ falls } v \neq \pm 1 \\ (k(k-1) + k - v^2)a_k + a_{k-2} &= 0 \quad \forall k \geq 2 \\ \implies a_k &= \frac{a_{k-2}}{k^2 - v^2} = 0 \quad \forall k \geq 2 \end{aligned}$$

Lösung: $y(x) = 0$ d.h. die Potenzreihenmethode ist nicht in der Lage, eine Lösung zu finden!

Ursache: Differentialgleichung ist an der Stelle $x=0$ singular:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)y = 0$$

\implies Lösung hat ebenfalls eine Singularität bei $x=0$, aber eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ kann bei $x=0$ keine Singularität haben!

Erne Potenzreihe ist eine zu wenig allgemeine Ansatzfunktion!

5. Verallgemeinerte Potenzreihen

Ziel: Potenzreihenansatz desart verallgemeinern, dass auch Singularitäten bei $x=0$ dargestellt werden können.

Beispiel: Pole können mit einer **Laurent-Reihe** der Form

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k x^k = \frac{a_{-n}}{x^n} + \frac{a_{-n+1}}{x^{n-1}} + \dots$$

dargestellt werden. ○

Laurent-Reihen können aber "milde" Singularitäten wie $f(x) = \sqrt{x}$ nicht darstellen, bei denen f stetig ist, aber eine Ableitung divergiert.

Definition: **Verallgemeinerte Potenzreihe**:

$$f(x) = x^{\varrho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\varrho}$$

mit $a_0 \neq 0$

$a_0 \neq 0$ lässt sich immer erreichen: Wenn $a_k x^{k+\varrho}$ der erste Term $\neq 0$ ist, ersetzt man ϱ durch $\varrho+k$ und a_i durch a_{i-k} um eine verallg. Potenzreihe zu erhalten.

6. Lösung der Besselschen Differentialgleichung

Lösungsansatz mit verallgemeinerte Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho}$$

→ zusätzlich muss jetzt auch noch die **neue Unbekannte ρ** bestimmt werden.

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) a_k x^{k+\rho-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) a_k x^{k+\rho-2}$$

Einsetzen:

$$0 = x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) a_k x^k$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \nu^2 x^{k+\rho}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left((k+\rho)(k+\rho-1) + (k+\rho) - \nu^2 \right) a_k + a_{k-2} x^{k+\rho}$$

$$+ \left((1+\rho)\rho + (1+\rho) - \nu^2 \right) a_1 x \quad \text{Fall } k=1$$

$$+ \left(\rho(\rho-1) + \rho - \nu^2 \right) a_0 = 0$$

Fall $k=0$

Koeffizientenvergleich:

$$k=0: ((\varrho-1)\varrho + \varrho - \nu^2)a_0 = (\varrho^2 - \nu^2)a_0 = 0$$

wegen $a_0 \neq 0$ (Definition einer versch. Potenzreihe) muss

$$\varrho^2 - \nu^2 = 0 \quad \text{Indexgleichung}$$

$$\text{sein} \Rightarrow \varrho = \pm \nu.$$

$$\begin{aligned} k=1: & ((1+\varrho)\varrho + (1+\varrho) - \nu^2)a_1 \\ & = (\underbrace{\varrho^2 - \nu^2}_{=0} + 2\varrho + 1)a_1 = (2\varrho + 1)a_1 = 0 \end{aligned}$$

Im Fall $\varrho = -\frac{1}{2}$ gibt es Lösungen mit $a_1 \neq 0$, im Allgemeinen folgt $a_1 = 0$.

$$k \geq 2: ((k+\varrho)(k+\varrho-1) + (k+\varrho) - \nu^2)a_k + a_{k-2} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_k &= -\frac{a_{k-2}}{(k+\varrho)^2 - \nu^2} \\ &= -\frac{a_{k-2}}{k^2 + 2k\varrho + \underbrace{\varrho^2 - \nu^2}_{=0}} \end{aligned}$$

Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{-1}{k(k+2\varrho)} a_{k-2} \\ &= \frac{-1}{k(k \pm 2\nu)} a_{k-2} \end{aligned}$$

Beobachtung: der Quotient

$$\frac{a_k}{a_{k-2}} = \frac{-1}{k(k \pm 2\nu)}$$

ist eine rationale Fkt. von k , d.h. die Lösungsfunktion wird eine **hypergeometrische** Reihe in x^2 sein!

Berechnung der Koeffizienten zu $a_0 = 1$

$$a_2 = \frac{-1}{2(2 \pm 2\nu)}$$

$$a_4 = \frac{1}{2(2 \pm 2\nu)4(4 \pm 2\nu)}$$

$$a_6 = \frac{-1}{2(2 \pm 2\nu)4(4 \pm 2\nu)6(6 \pm 2\nu)}$$

⋮

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} (1 \pm \nu) 2(2 \pm \nu) \dots k(k \pm \nu)}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \underbrace{(\pm \nu + 1)(\pm \nu + 2) \dots (\pm \nu + k)}_{(\pm \nu + 1)_k}}$$

Lösung:

$$y(x) = x^{\pm \nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (\pm \nu + 1)_k} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k$$

$$= x^\alpha {}_0F_1 \left(\alpha + 1 ; -\frac{x^2}{4} \right), \quad \alpha = \pm \nu$$

7. Bessel-Funktionen

Bessel-Funktionen verwenden eine andere Normierung, basierend auf

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+k+1) &= (\alpha+k)\Gamma(\alpha+(k-1)+1) \\ &= (\alpha+k)(\alpha+k-1)\Gamma(\alpha+(k-2)+1) \\ &\vdots \\ &= (\alpha+k)(\alpha+k-1)\cdots(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\end{aligned}$$

bereits im Nenner

$$y(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}_{J_\alpha(x)} \Gamma(\alpha+1) 2^\alpha$$

Definition: Bessel-Funktion der Ordnung α

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}$$

Die oben gefundene Lösung ist

$$y(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) J_\alpha(x)$$

Die Bessel-Funktionen sind hypergeometrische Reihen:

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha {}_0F_1\left(\alpha+1; -\frac{x^2}{4}\right)$$

Dgl für ${}_0F_1$ kann in Bessel-DGl umgeformt werden.

Eigenschaften der Bessel-Funktionen:

① $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

d.h. wir haben nur eine Lösung einer DGI 2. Ordnung, es muss noch eine zweite geben!

② Die Rekursionsformel zur Bestimmung der Koeffizienten der reellg. Potenzreihe funktioniert nicht mehr, wenn 2ν eine ganze Zahl ist, da $k \pm 2\nu = 0$ werden kann \Rightarrow auch in diesem Fall wurde nur eine Lösungsfunktion (statt 2) gefunden.

Verallgemeinerungen: Differentialgleichungen der Form $x^2 y'' + p(x)xy' + q(x)y = 0$

(Bessel-DGI: $p(x)=1, q(x)=x^2-\nu^2$), mit $p(x)$ und $q(x)$ analytisch: $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$

- Indexgleichung: $s(s-1) + sp_0 + q_0 = 0$

- Nenner der Rekursionsformel ist

$$F(X) = X(X+1) + p_0 X + q_0, \quad X = k + s$$

d.h. Lösung ist hypergeometrische Reihe

- Nullstellen von $F(X)$ haben "fehlende" Lösungen zur Folge

8. Erzeugende Funktion der Bessel-Funktionen

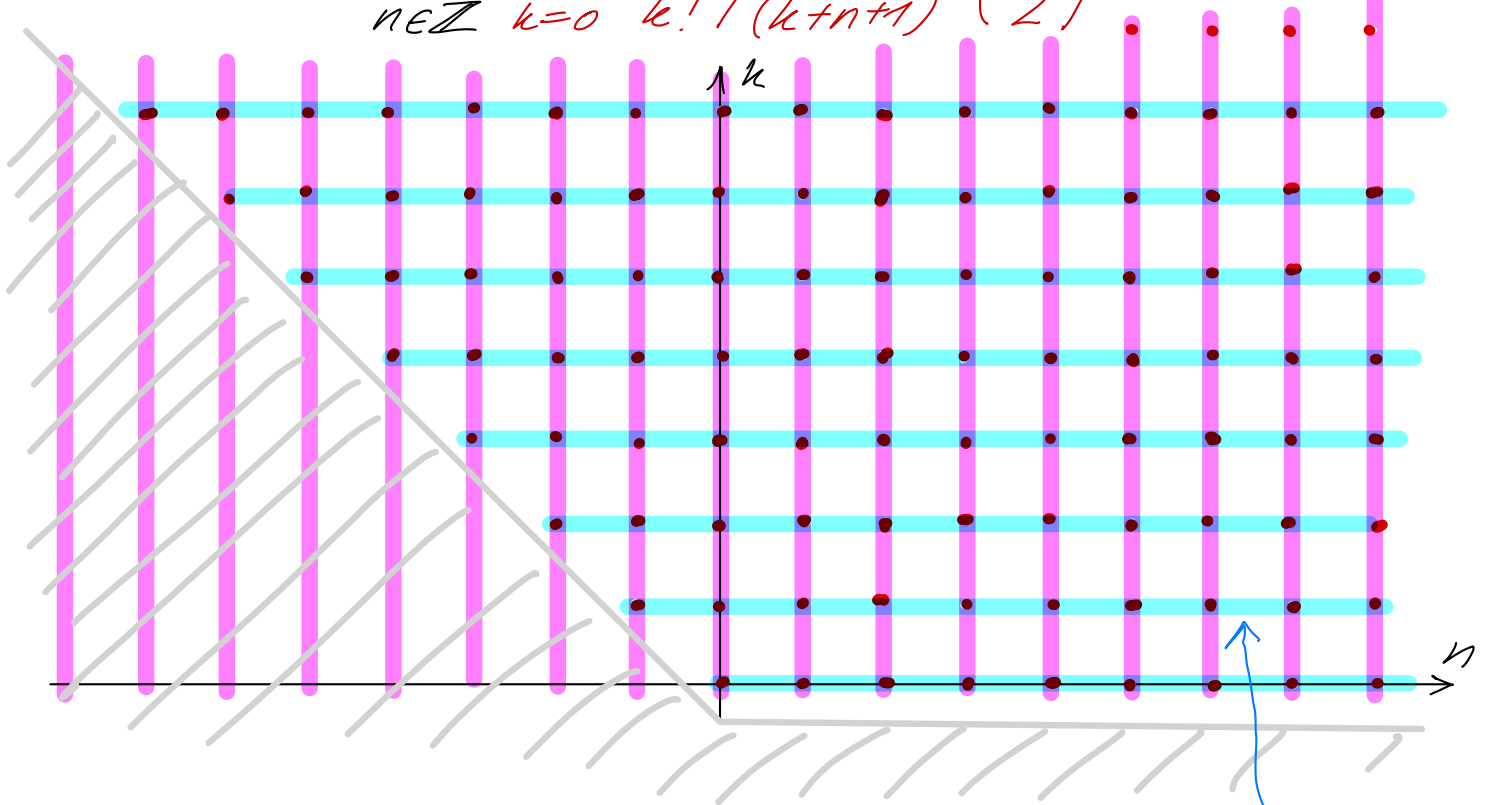
Erzeugende Funktion der Folge a_0, a_1, a_2, \dots ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

Für die Bessel-Funktionen $J_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$ ist die erzeugende Funktion

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) z^n$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} z^n$$



$k+n+1 \leq 0 \Rightarrow \Gamma(k+n+1) = \infty$, diese Terme der Potenzreihe verschwinden

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} z^n$$

Umformung der blauen Summen mit dem Ziel, dass k und $n+k$ Laufvariablen werden

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+k} z^{n+k} z^{-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k z^{-k} \sum_{n+k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+k} z^{n+k} \\
 &= \exp\left(-\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{z}\right) \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^m z^m}_{=m!} \\
 &= \exp\left(-\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{z}\right) \cdot \exp\left(\frac{x}{2} \cdot z\right) \\
 &= \exp\left(\frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{z} + z\right)\right).
 \end{aligned}$$

Satz: Die erzeugende Funktion der Bessel-Funktionen ist

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) z^n = \exp\left(\frac{x}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$$

9. Additionstheorem

Die Tatsache, dass die erzeugende Funktionen der Bessel-Funktionen eine Exponentialfunktion ist, hat eine interessante Konsequenz:

$$(*) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) z^n \cdot \sum_{m \in \mathbb{Z}} J_m(y) z^m \\ = \exp\left(\frac{x}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{y}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{x+y}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k(x+y) z^k$$

$\Rightarrow J_k(x+y)$ durch $J_n(x)$ und $J_m(y)$ ausdrücken!

$$(*) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} J_n(x) J_m(y) z^{\overbrace{n+m}^{=k}} \quad m = k - n \\ = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) J_{k-n}(y) \right) z^k$$

Koeffizientenvergleich liefert das Additionstheorem

Satz (Additionstheorem):

$$J_k(x+y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) J_{k-n}(y)$$

10. Separation in Polar-Koordinaten

Laplace-Differentialgleichung $\Delta u = -u$
in Polar koordinaten:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Separationsansatz: $u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$
einsetzen:

$$\Delta u = R''(r) \Phi(\varphi) + \frac{1}{r} R'(r) \Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2} R(r) \Phi''(\varphi)$$

Division durch $R(r) \Phi(\varphi)$:

$$\frac{R''(r) + \frac{1}{r} R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -u$$

Separation: Multiplikation mit r^2

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r) + r^2 R(r)}{R(r)} = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu^2$$

$$r^2 R'' + r R' + (r^2 - \nu^2) R = 0$$

Besselsche Differentialgleichung

$$\Phi'' = -\nu^2 \Phi$$

\Rightarrow Die Bessel-Funktionen "leben" in Polar-Koordinaten

11. Fourier-Transformation und Bessel-Funktionen

Angangspunkt: 2-dimensionale Fourier-Transformation in **kartesischen Koordinaten**

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto f(x, y)$$

$$\mathcal{F}f(u, v) = F(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{i(xu + yv)} dx dy$$

Wellen in \mathbb{R}^2 sind Lösungen der Wellen-Gleichung $\partial_t^2 u = \Delta u$, Fouriertheorie stellt jede Welle als Überlagerung ebener Wellen

$$(x, y) \mapsto e^{i(xu + yv)}$$

mit Wellenzahlvektor $k = (u, v)$ dar.

In **Polarkoordinaten** wird jede Welle als Überlagerung von Wellen der Form

$$J_n(\rho r) e^{i\varphi\theta}$$

mit Parameter (ρ, θ) darstellbar. Daher muss es eine Formel geben, die J_n mit Integralen über Gerade trigonometrischer Funktionen verbindet.

Koordinatenumrechnung:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

(Ort)

$$u = R \cos \vartheta$$

$$v = R \sin \vartheta$$

(Wellenzahlvektor)

Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} xu + yv &= rR (\cos \varphi \cos \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta) \\ &= rR \cos(\varphi - \vartheta) \end{aligned}$$

Fourier-Transformation in Polar koordinaten

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ &\quad \times e^{i r R \cos(\varphi - \vartheta)} r \, d\varphi \, dr \end{aligned}$$

Die Funktion $(r, \varphi) \mapsto f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ist 2π -periodisch in φ , hat daher eine konv. Fourier-Reihe mit Fourier-Koeffizienten $f_n(r)$:

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(r) e^{in\varphi}$$

Einsetzen in die Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(r) e^{in\varphi + i r R \cos(\varphi - \vartheta)} r \, d\varphi \, dr \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{\infty} f_n(r) r \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi + i r R \cos(\varphi - \vartheta)} d\varphi \, dr \end{aligned}$$

Innenes Integral auswerten:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(\varphi+\vartheta) + irR\cos\varphi} d\varphi && \varphi \rightarrow \varphi + \vartheta \\
 & && \text{dank Periodizität} \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{in\vartheta} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi + i\xi\cos\varphi} d\varphi \\
 &= e^{in\vartheta} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi + i\xi\cos\varphi} d\varphi}_{F_n(\xi)}
 \end{aligned}$$

Lemma: $F_n(\xi)$ sind die komplexen Fourier-Koeffizienten der Funktion $\varphi \mapsto e^{i\xi\cos\varphi}$, d.h.

$$\begin{aligned}
 e^{i\xi\cos\varphi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\xi) e^{in\varphi} \\
 &= F_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n(\xi) e^{in\varphi} + F_{-n}(\xi) e^{-in\varphi})
 \end{aligned}$$

Berechnung von $F_n(\xi)$:

$$\begin{aligned}
 F_n(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} e^{i\xi\cos\varphi} d\varphi && \text{als Potenzreihe} \\
 & && \text{entwickeln} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \xi^k}{k!} \cos^k \varphi d\varphi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \xi^k}{k!} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \cos^k \varphi d\varphi}_{\sim \text{Fourier-Koeffizient der Funktion } \cos^k \varphi}
 \end{aligned}$$

Strategie:

1. $\cos \varphi$ durch Exponentialfunktion ausdrücken
2. $\cos^k \varphi$ durch Exponentialfunktion ausdrücken
3. Integral berechnen

Schritt 1: $\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$

Schritt 2: $\cos^k \varphi = \frac{1}{2^k} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} e^{i\varphi(m - (k-m))}$
 $= \frac{1}{2^k} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m} e^{i\varphi(2m-k)}$

Schritt 3: Integral berechnen

$$\int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \cos^k \varphi d\varphi = \frac{1}{2^k} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(n+2m-k)} d\varphi$$

Fälle unterscheiden: $n+2m-k=0$ oder nicht

Fall $l = n+2m-k \neq 0$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi l} d\varphi = \left[\frac{1}{l} e^{i\varphi l} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Fall $l = n+2m-k = 0$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi l} d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = 2\pi$$

Somit muss nun $m = \frac{1}{2}(k-n)$ ausgewertet werden:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \cos^k \varphi d\varphi = \frac{1}{2^k} \binom{k}{\frac{1}{2}(k-n)}$$

Zusammen setzen:

$$F_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \xi^k}{k! 2^k} \binom{k}{\frac{1}{2}(k-n)} \leftarrow \text{muss ganzzahlig sein!}$$

$$m = \frac{1}{2}(k-n) \Rightarrow k = 2m+n$$

$$F_n(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m+n}}{(2m+n)!} \binom{2m+n}{m} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+n}$$

Umformung in etwas, was der Besselfunktion ähnelt:

$$\begin{aligned} F_n(\xi) &= i^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\cancel{(2m+n)!}} \frac{\cancel{(2m+n)!}}{m!(m+n)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+n} \\ &= i^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+n} \\ &= i^n J_n(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{-n}(\xi) &= i^{-n} J_{-n}(\xi) = (-i)^n (-1)^n J_n(\xi) \\ &= i^n J_n(\xi) = F_n(\xi) \end{aligned}$$

Lemma:

$$e^{i\xi \cos \varphi} = J_0(\xi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\xi) \cos n\varphi$$

Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$e^{i\xi \cos \varphi} = \cos(\xi \cos \varphi) + i \sin(\xi \cos \varphi)$$

Rechte Seite: alles reell ausser i^n , d.h.
gerade Terme \rightarrow Realteil, ungerade Terme
 \rightarrow Imaginärteil

$$\cos(\xi \cos \varphi) = J_0(\xi) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\xi) \cos 2k\varphi$$

$$\sin(\xi \cos \varphi) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\xi) \cos(2k+1)\varphi$$

(beide Funktionen sind gerade Fkt. von φ ,
haben daher eine Fourrier-Cosinus-Reihe)

Lemma: Die Bessel-Funktionen sind im
Wesentlichen die Fourrier-Koeffizienten der
Funktionen $\varphi \mapsto \cos(\xi \cos \varphi)$ und
 $\varphi \mapsto \sin(\xi \cos \varphi)$

12. Fourier und erzeugende Funktionen

zur Erinnerung: erzeugende Funktion der Bessel-Funktionen ist

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(\xi) z^n = \exp\left(\frac{\xi}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Setze } z = ie^{i\varphi} \\ \frac{1}{z} = -ie^{-i\varphi} \end{array} \right\} \begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= i(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \\ &= -2 \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \\ &= -2 \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\text{RHS: } \exp(-\xi \sin \varphi)$$

$$\text{LHS: } f(ie^{i\varphi}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(\xi) i^n e^{in\varphi}$$

$$= J_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(J_n(\xi) i^n e^{in\varphi} + J_{-n}(\xi) i^{-n} e^{-in\varphi} \right)$$

$$= J_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\xi) \left(i^n e^{in\varphi} + (-1)^n i^{-n} e^{-in\varphi} \right)$$

$$= J_0(\xi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\xi) \cos n\varphi$$

13. Integraldarstellung der Bessel-Funktionen

Ausgangspunkt: $F_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\xi \cos \varphi} e^{in\varphi} d\varphi$

Substitution: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \lambda$, $d\varphi = -d\lambda$

$$F_n(\xi) = \frac{-1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} e^{i\xi \cos(\frac{\pi}{2} - \lambda)} e^{-in\lambda} e^{in\frac{\pi}{2}} d\lambda$$

\parallel
 $\sin \lambda$

\parallel
 i^n

$$= \frac{i^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi \sin \lambda} e^{-in\lambda} d\lambda$$

$$= i^n \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} e^{-in\lambda + i\xi \sin \lambda} d\lambda + \int_0^{\pi} e^{in\lambda - i\xi \sin \lambda} d\lambda \right)$$

$$i^n J_n(\xi) = i^n \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\lambda - \xi \sin \lambda) d\lambda$$

Satz (Integraldarstellung der Bessel-Funktionen)

$$J_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\lambda - \xi \sin \lambda) d\lambda$$

14. Frequenzmodulation

Ein Träger mit Frequenz f_c wird mit der Frequenz f_m frequenzmoduliert, dabei entsteht das Signal

$$f(t) = \cos(\omega_c t + \beta \cos(\omega_m t)),$$

wobei β die Modulationsstärke ist.

Additionstheoreme verwenden

$$f(t) = \cos(\omega_c t) \cos(\beta \cos(\omega_m t)) - \sin(\omega_c t) \sin(\beta \cos(\omega_m t))$$

Im ersten Term Identität für $\cos(\beta \cos(\varphi))$ verwenden;

$$f(t) = J_0(\beta) \cos(\omega_c t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta) \cos(2k \omega_m t) \cos(\omega_c t) - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\beta) \cos((2k+1) \omega_m t) \sin(\omega_c t)$$

Produkte von trig. Fkt durch eine Fkt ausdrücken mit Hilfe von

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\cos(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\sin(x+y) - \sin(x-y))$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= J_0(\beta) \cos(\omega_c t) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta) \left(\cos(\omega_c + 2k\omega_m)t \right. \\
&\quad \left. + \cos(\omega_c - 2k\omega_m)t \right) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\beta) \left(\sin(\omega_c + (2k+1)\omega_m)t \right. \\
&\quad \left. - \sin(\omega_c - (2k+1)\omega_m)t \right)
\end{aligned}$$

Daraus kann man das Spektrum des Signals $f(t)$ ablesen.

Die Fourier-Transformation von $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ ist

$$\mathcal{F} \cos \omega t = \pi(\delta_{\omega} + \delta_{-\omega})$$

$$\mathcal{F} \sin \omega t = -i\pi(\delta_{\omega} - \delta_{-\omega})$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f &= \pi J_0(\beta) (\delta_{\omega_c} + \delta_{-\omega_c}) \\
&+ \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta) (\delta_{\omega_c + 2k\omega_m} + \delta_{-\omega_c - 2k\omega_m}) \\
&+ i\pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\beta) (\delta_{\omega_c + (2k+1)\omega_m} - \delta_{-\omega_c - (2k+1)\omega_m})
\end{aligned}$$

d.h. der Fourier-Koeffizient der Frequenz $\pm(\omega_c + k\omega_m)$ hat den Betrag $|J_k(\beta)|$.