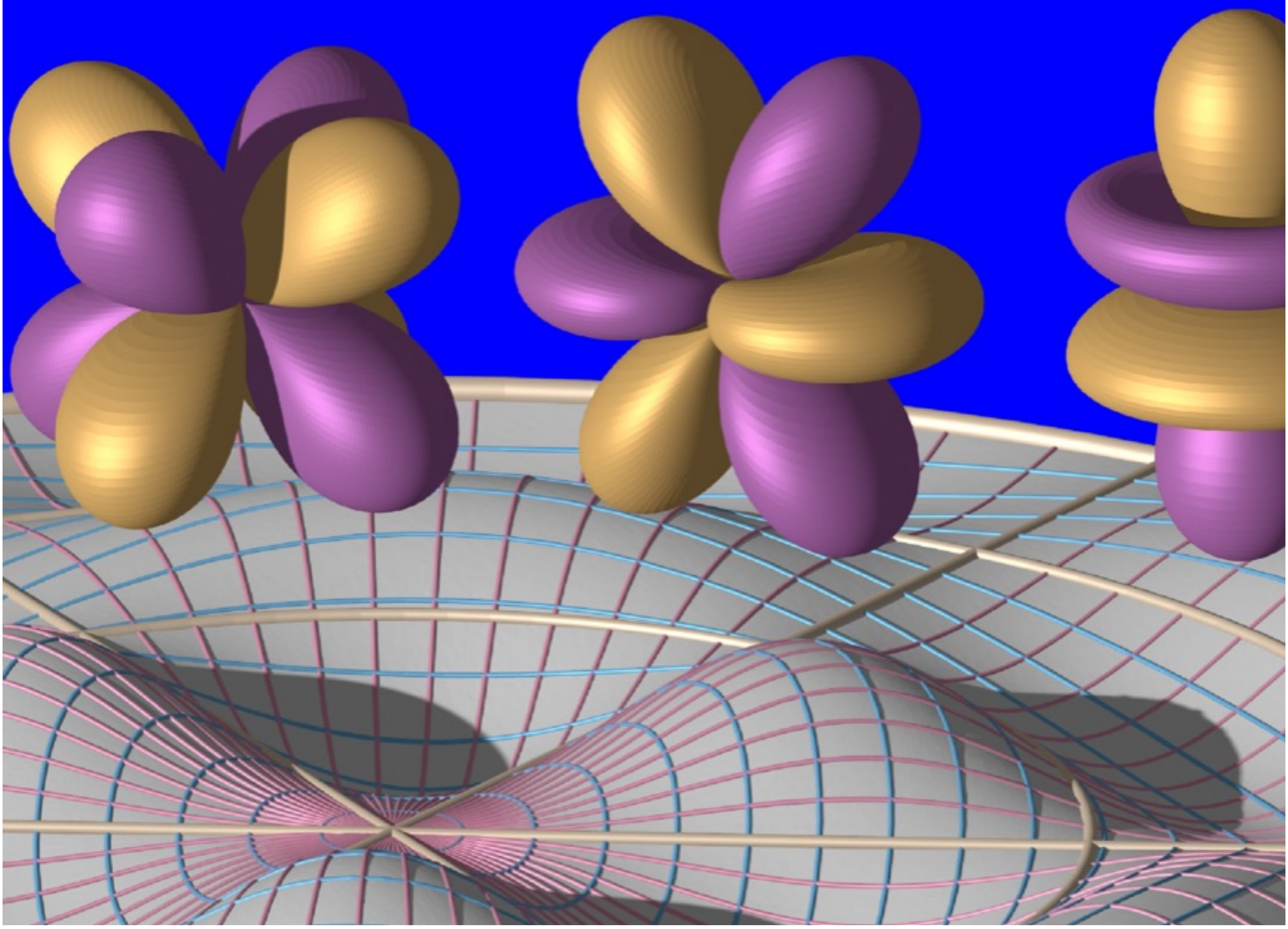
Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

4. Hypergeometrische Funktionen



Inhalt

1. Hypergeometrische Funktionen (Recap)

<u>Definition</u>: Analytische Funktion $f(z)$ mit Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ heisst **hypergeometrisch**, wenn a_{k+1}/a_k eine rationale Funktion von k ist.

<u>Folgerung</u>: die Potenzreihe von f hat die Form einer **hypergeometrischen Reihe**

$$f(z) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} ; z\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \ldots (a_p)_k}{(b_1)_k \ldots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

<u>Beispiele</u>:

① $${}_0F_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

② $${}_1F_0(\alpha; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = (1+z)^k$$

③ Bessel-Funktionen

$$J_\alpha(x) = \frac{(x/2)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \alpha+1 \end{matrix} ; -\frac{1}{4}x^2\right)$$

Hypergeometrische Funktionen scheinen "Universalfunktionen zu sein"

2. Funktionen durch $_pF_q$ ausdrücken

Die Cosinus-Funktion lässt sich durch $_0F_1$ ausdrücken

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

$$\Longrightarrow a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{1}{2!},\ a_3 = 0,\ a_4 = \frac{1}{4!}$$

cos(x) ist nicht eine hypergeometrische Funktion, weil a_{k+1}/a_k nicht für alle k definiert ist.

Beobachtungen:

① In einer hypergeometrischen Reihe sind alle Koeffizienten $\neq 0$.

② In einer hypergeometrischen Reihe gibt es keine expliziten Vorzeichen

$\Longrightarrow$ "Lücken" und Vorzeichen durch eine Substitution des Arguments einführen

$$\cos x = 1 + \frac{1}{2!}(-x^2) + \frac{1}{4!}(-x^2)^2 + \frac{1}{6!}(-x^2)^3 + \ldots$$
$$= f(-x^2)$$

mit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^k, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+2)!}{(2k)!} = (2k+2)(2k+1)$$

$\Longrightarrow$ f(z) ist hypergeometrisch!

$f(z)$ als hypergeometrische Reihe schreiben

Der Quotient aufeinanderfolgender Koeffizienten

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{(k+1)(k+\frac{1}{2})}$$

hat Pole -1 und $-\frac{1}{2}$, daher kann man erwarten, dass

$$f(z) = {}_1F_2\left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \quad \frac{1}{2}\end{matrix} ; \frac{z}{4}\right) = {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}\end{matrix} ; \frac{z}{4}\right)$$

Meist ist es aber einfacher, die Koeffizienten direkt durch Pochhammer-Symbole auszudrücken:

$$\frac{1}{(2k)!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-1)(2k)}$$

$$= \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)\cdot \underbrace{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2k)}_{2^k\cdot k! = 2^k (1)_k}}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)_k = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\cdots\frac{2k-1}{2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2k)!} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)_k 2^k \; k!\, 2^k}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)_k} \frac{(z/4)^k}{k!} = {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}\end{matrix} ; \frac{z}{4}\right)$$

Resultat: $\boxed{\cos(x) = {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; -\frac{x^2}{4}\right)}$

Die hyperbolische Funktion $\cosh(x)$ unterscheidet sich von $\cos(x)$ nur durch das fehlende Vorzeichen in den Koeffizienten, daher

$$\boxed{\cosh(x) = {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{x^2}{4}\right)}$$

Aufgabe: $\sin(x)$ und $\sinh(x)$ durch ${}_0F_1$ ausdrücken

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

Da hypergeometrische Funktionen immer den konstanten Term 1 haben, muss x ausgeklammert werden, d.h.

$$\begin{aligned} \boxed{\sin(x) =} \; x g(-x^2) \; & \boxed{= {}_0F_1(;\tfrac{3}{2};-x^2/4)} \\ \boxed{\sinh(x) =} \; x g(x^2) \; & \boxed{= {}_0F_1(;\tfrac{3}{2};x^2/4)} \end{aligned}$$

$$g(z) = 1 + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!}z^2 + \frac{1}{7!}z^3 + \dots$$

$$a_k = \frac{1}{(2k+1)!} = \frac{1}{\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\cdots\frac{2k+1}{2}\,2^k \quad k!\,2^k}$$

$$= \frac{1}{(\frac{3}{2})_k\, k!\, 4^k} \implies g(z) = {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \frac{3}{2} \end{matrix}; \frac{z}{4}\right)$$

Logarithmus: $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

$$= x \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}(-x) + \frac{1}{3}(-x)^2 + \frac{1}{4}(-x)^3 \ldots\right)}_{h(-x)}$$

$$h(z) = 1 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{4} z^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1}$$

$$\frac{1}{k+1} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k+1)} = \frac{(1)_k}{(2)_k}$$

$$\Rightarrow h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k}{(2)_k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k}{(2)_k} \frac{z^k}{k!}$$

$$= {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} ; z\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\log(1+x) = x \; {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} ; -x\right)}$$

"Alle" bekannten speziellen Funktionen können mit Hilfe der hypergeometrischen Funktionen dargestellt werden.

3. Ableitung und Stammfunktion

<u>Satz</u>: Die Ableitung einer Funktion ${}_pF_q$ ist wieder eine Funktion ${}_pF_q$

$$\frac{d}{dz}\, {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_p \\ b_1,\dots,b_q \end{matrix};z\right) = \frac{a_1\cdots a_p}{b_1\cdots b_q}\, {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1+1,\dots,a_p+1 \\ b_1+1,\dots,b_q+1 \end{matrix};z\right)$$

Beweis: durch Nachrechnen

$$\frac{d}{dz}\, {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_p \\ b_1,\dots,b_q \end{matrix};z\right) = \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \qquad \begin{matrix} n=k-1 \\ n+1=k \end{matrix}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{n+1}\cdots(a_p)_{n+1}}{(b_1)_{n+1}\cdots(b_q)_{n+1}}\frac{z^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1(a_1+1)\cdots(a_1+n)\cdots a_p(a_p+1)\cdots(a_p+n)}{b_1(b_1+1)\cdots(b_1+n)\cdots b_q(b_q+1)\cdots(b_q+n)}\frac{z^n}{n!}$$

$$= \frac{a_1\cdots a_p}{b_1\cdots b_q}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1+1)_n\cdots(a_p+1)_n}{(b_1+1)_n\cdots(b_q+1)_n}\frac{z^n}{n!}$$

$$= \frac{a_1\cdots a_p}{b_1\cdots b_q}\, {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1+1,\dots,a_p+1 \\ b_1+1,\dots,b_q+1 \end{matrix};z\right) \qquad \square$$

<u>Satz:</u> Stammfunktion einer hypergeometrischen Funktion ${}_pF_q$

$$\int {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z\right) dz$$
$$= \frac{(a_1-1)\cdots(a_p-1)}{(b_1-1)\cdots(b_q-1)}\left({}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1-1, \dots, a_p-1 \\ b_1-1, \dots, b_q-1 \end{matrix}; z\right) - 1\right) + C$$

Beweis: durch Nachrechnen

$$\int {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z\right) dz$$
$$= \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!} dz$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \qquad n = k+1$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_1)_{n-1} \cdots (a_p)_{n-1}}{(b_1)_{n-1} \cdots (b_q)_{n-1}} \frac{z^n}{n!}$$
$$= \frac{(b_1-1)\cdots(b_q-1)}{(a_1-1)\cdots(a_p-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_1-1)_n \cdots (a_p-1)_n}{(b_1-1)_n \cdots (b_q-1)_n} \frac{z^n}{n!}$$
$$= \frac{(b_1-1)\cdots(b_q-1)}{(a_1-1)\cdots(a_p-1)}\left({}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1-1, \dots, a_p-1 \\ b_1-1, \dots, b_q-1 \end{matrix}; z\right) - 1\right) \qquad \square$$

Funktioniert für $a_1 \neq 1, \dots a_p \neq 1$.

4. Differentialgleichungen für hypergeometrische Funktionen

Alle vorgestellten Funktionen können durch Differentialgleichungen charakterisiert werden:

① ${}_0F_0(x)$ ist Lösung von $y' = y$

② ${}_1F_0(\alpha;x) = (1+x)^\alpha$ ist Lösung der Differentialgleichung $(1+x)y' = \alpha y$

$$y' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$(1+x)y' = \alpha(1+x)^\alpha = \alpha y$$
$$y' = -xy' + \alpha y = -\left(x\frac{d}{dx} - \alpha\right)y$$

⑧ Bessel-Funktionen: Besselsche Differentialgleichung

<u>Vermutung</u>: Für $p, q, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ gibt es eine Differentialgleichung derart, dass ${}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z)$ eine Lösung ist.

Plan:

- Eulersche hypergeometrische DGl für ${}_2F_1$
- Allgemeine DGl für ${}_pF_q$
- Von der DGl für ${}_0F_1$ zur Bessel-DGl

<u>Satz</u>: Die eulersche hypergeometrische DGl

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(c-(a+b+1)x)\frac{dy}{dx}-aby=0$$

hat die Lösung

$$y_1(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}; x\right).$$

Falls $c-2 \notin \mathbb{N}$, dann ist

$$y_2(x) = x^{1-c}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}a-c+1, b-c+1\\ 2-c\end{matrix}; x\right)$$

ein zweite, linear unabhängige Lösung

Beweis: Die Ableitungen von y_1 sind

$$y_1'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$y_1''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!}$$

DGl:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k-1}}{(k-2)!} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k}}{(k-2)!}$$

$$+ c\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} - (a+b+1)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k}}{(k-1)!}$$

$$-ab\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}} \frac{x^k}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(k-2)!}$$

$$+ c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}} \frac{x^k}{k!} - (a+b+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(k-1)!}$$

$$- ab \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}$$

Fall $k=0$: $$c \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}} - ab \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}$$

$$= c \frac{ab}{c} - ab = 0 \quad \checkmark$$

Fall $k=1$: $$\frac{(a)_2(b)_2}{(c)_2} + c \frac{(a)_2(b)_2}{(c)_2} + (a+b+1) \frac{ab}{c}$$

$$- ab \frac{ab}{c} = \frac{(a)_2(b)_2}{c} - (a+b+1+ab) \frac{ab}{c}$$

$$= \frac{ab}{c} \Big((a+1)(b+1) - (a+b+1+ab) \Big) = 0$$

Fall $k \geq 2$: $$\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \left(\frac{(a+k)(b+k)}{c+k} k - k(k-1) \right.$$

$$\left. + \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)} c - (a+b+1)k - ab \right)$$

$$= \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \Big((a+k)(b+k) - k^2 + k - ak - bk + k - ab \Big)$$

$$= \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \Big(\cancel{ab} + \cancel{ak} + \cancel{bk} + \cancel{k^2} - \cancel{k^2} - \cancel{ak} - \cancel{bk} - \cancel{ab} \Big) = 0$$

$\square$

Satz: Die Funktion ${}_pF_q\left({a_1, \dots a_p \atop b_1, \dots b_q}; z\right)$ ist Lösung der Differentialgleichung

$$D_{a_1} \cdots D_{a_p}\, y = \frac{d}{dz} D_{b_1-1} \cdots D_{b_q-1}\, y$$

mit $D_{a_i} = z\frac{d}{dz} + a_i$.

Beweis: D_{a_i} erhöht a_i um 1:

$$D_{a_i}\, {}_pF_q = \left(z\frac{d}{dz} + a_i\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} (k + a_i) \frac{z^k}{k!}$$

$$= a_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_i+1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}$$

$$= a_i\, {}_pF_q\left({a_1, \dots, a_i+1, \dots a_p \atop b_1, \dots\dots\quad b_q}; z\right)$$

D_{b_j-1} erniedrigt b_j um 1:

$$D_{b_j-1}\, {}_pF_q = \left(z\frac{d}{dz} + b_j - 1\right) {}_pF_q$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} (k + b_j - 1) \frac{z^k}{k!}$$

$$= (b_j - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_j-1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}$$

$$= (b_j - 1)\, {}_pF_q\left({a_1, \dots, a_p \atop b_1, \dots, b_j-1, \dots b_q}; z\right)$$

Linke Seite:

$$D_{a_1} \cdots D_{a_p}\, y = a_1 \cdots a_p \; {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1+1, \dots, a_p+1 \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z\right)$$

Rechte Seite:

$$D_{b_1-1} \cdots D_{b_q-1}\, y = (b_1-1)\cdots(b_q-1)\; {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1-1, \dots, b_q-1 \end{matrix}; z\right)$$

$$\frac{d}{dz} D_{b_1-1} \cdots D_{b_q-1}\, y = (b_1-1)\cdots(b_q-1) \cdot \frac{a_1 \cdots a_p}{(b_1-1)\cdots(b_q-1)}$$

$$\cdot \; {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1+1, \dots, a_p+1 \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z\right)$$

$\Rightarrow$ beide Seiten stimmen überein. $\square$

<u>Spezialfälle:</u>

① $p=q=0 \Rightarrow \qquad y = \frac{d}{dz} y \Rightarrow y = e^x$

② $p=2, q=1$

$$\left(z\frac{d}{dz}+a\right)\left(z\frac{d}{dz}+b\right) - \frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}+c-1\right)$$

$$= z^2\frac{d^2}{dz^2} + (a+b+1)z\frac{d}{dz} + ab - z\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - (c-1)\frac{d}{dz}$$

$$= z(z-1)\frac{d^2}{dz^2} - (c-(a+b+1)z)\frac{d}{dz} + ab$$

dies ist die eulersche hypergeometrische Differentialgleichung

Anwendung: Aus der hypergeometrischen DGl für ${}_0F_1$ wird die Bessel-DGl für $w(z) = x^\alpha\, {}_0F_1(;\alpha+1;-x^2/4)$.

__Schritt 1:__ DGl für $y(z) = {}_0F_1(;b;z)$

keine D_{α_i}, aber D_{b-1}, d.h. DGl ist

$$y = \frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} + b - 1\right) y$$

$$= zy'' + y' + (b-1)y' = zy'' + by'$$

$$\Longrightarrow \boxed{zy'' + by' - y = 0}$$

__Schritt 2:__ $w(x) = x^\alpha \underbrace{{}_0F_1(;\alpha+1;-x^2/4)}_{=y(-x^2/4)}$ $\quad b = \alpha+1$

$$\Longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{x^\alpha} w}$$

$$w'(x) = \alpha x^{\alpha-1} y(-x^2/4) - x^\alpha \frac{x}{2} y'(-x^2/4)$$

$$= \frac{\alpha}{x} w(x) - \frac{1}{2} x^{\alpha+1} y'(-x^2/4)$$

$$\Longrightarrow \boxed{y' = \frac{2}{x^{\alpha+1}}\left(-w' + \frac{\alpha}{x} w\right)}$$

$$w''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} y(-x^2/4) + \alpha x^{\alpha\cancel{+1}} y'(-x^2/4)\left(-\frac{\cancel{x}\,1}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}(\alpha+1)x^\alpha y'(-x^2/4) + \frac{1}{4} x^{\alpha+2} y''(-x^2/4)$$

$$= \alpha(\alpha-1)\frac{1}{x^2} w - \frac{2\alpha+1}{2} x^\alpha y' + \frac{1}{4} x^{\alpha+2} y''$$

$$\Longrightarrow \quad y'' = \frac{4}{x^{\alpha+2}} w'' - \frac{4\alpha(\alpha-1)}{x^{\alpha+4}} w + \frac{2(2\alpha+1)}{x^2} y'$$

$$= \frac{4}{x^{\alpha+2}} w'' + \frac{4\alpha+2}{x^2} \frac{2}{x^{\alpha+1}} \left(-w' + \frac{\alpha}{x} w\right)$$

$$- \frac{4\alpha(\alpha-1)}{x^{\alpha+4}} w$$

$$4\alpha\left(2\alpha+1 - (\alpha-1)\right) = 4\alpha(\alpha+2)$$

$$\boxed{y'' = \frac{4}{x^{\alpha+2}} w'' - \frac{8\alpha+4}{x^{\alpha+3}} w' + \frac{4\alpha(\alpha+2)}{x^{\alpha+4}} w}$$

Schritt 3: Einsetzen in die DGl für y

$$0 = \boxed{-\frac{x^2}{4} y''} + \boxed{(\alpha+1) y'} \boxed{- y}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{x^\alpha} w'' + \frac{2\alpha+1}{x^{\alpha+1}} w' - \frac{\alpha(\alpha+2)}{x^{\alpha+2}} w}$$

$$\boxed{+ \frac{2(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}} \left(-w' + \frac{\alpha}{x} w\right)} \quad - \boxed{\frac{w}{x^\alpha}}$$

$$= -\frac{1}{x^\alpha} w'' - \frac{1}{x^{\alpha+1}} w' - \left(-\frac{\alpha^2}{x^{\alpha+2}} + \frac{1}{x^\alpha}\right) w$$

$$= -\frac{1}{x^{\alpha+2}} \left(x^2 w'' + x w' + (x^2 - \alpha^2) w\right)$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 w'' + x w' + (x^2 - \alpha^2) w = 0$$

Besselsche Differentialgleichung!

5. Singularitäten von Differentialgleichungen

Beobachtung: Die DGl der hypergeometrischen Funktionen ${}_pF_q$ haben immer eine Singularität an der Stelle $x=0$!

Beispiele

① Eulersche hypergeometrische DGl für ${}_2F_1$

$$x(1-x)y'' + (c-(a+b+1)x)y' - aby = 0$$

kann an der Stelle $x=0$ nicht nach y'' aufgelöst werden

$$y'' = \frac{(a+b+1)x-c}{⚡x(1-x)}y' + \frac{ab}{⚡x(1-x)}$$

② DGl für ${}_0F_1$: $\quad zy'' + by' - y = 0$

kann an der Stelle $z=0$ nicht nach y'' aufgelöst werden:

$$y'' = -\frac{b}{⚡z}y' + \frac{1}{⚡z}y$$

③ Besselsche Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\alpha^2)y = 0$$

$$y'' = -\frac{1}{⚡x}y' - \left(1 - \frac{\alpha^2}{⚡x^2}\right)y$$

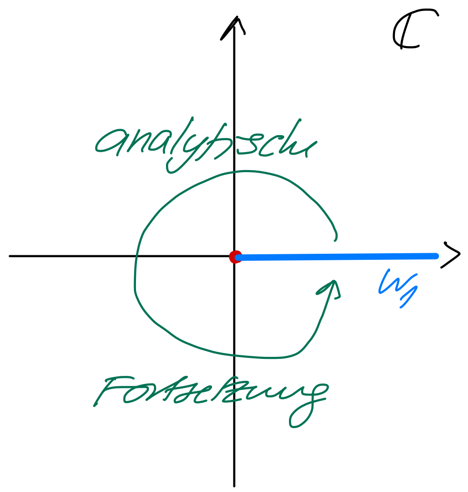
Lösungsansatz bis jetzt: verallgemeinerte Potenzreihe (erfolgreich z.B. für Bessel-Funktionen)

Schwierigkeiten:

- oft lassen sich so doch nicht genug Lösungen finden, z.B. Bessel-DGl für $\alpha \in \mathbb{N}$: $J_{\pm n}(x)$ sind linear abhängig, d.h. es muss noch eine weitere Lösung geben, die nicht als verallgemeinerte Potenzreihe geschrieben werden kann.
- Woher weiss man, dass Singularitäten der Form x^α die einzigen sind, die in Frage kommen?

Voraussetzungen: Differentialgleichung 2. Ordnung mit einer Singularität bei $z=0$. $w_1(x)$ und $w_2(x)$ linear unabhängige Lösungen in einer Umgebung von 0.

Plan: das Verhalten der Lösung bei analytischer Fortsetzung entlang eines Weges um die Singularität studieren



Definition: $\mathbb{L}$ = Lösungsraum der Differentialgleichung.

$$@ : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L} : y \longmapsto @y$$

$@y$ ist die Lösung, die sich nach analytischer Fortsetzung entlang eines Weges um den Nullpunkt ergibt.

$@$ ist eine umkehrbare lineare Abbildung
Umkehrbarkeit: Wronski-Determinante ....

$w_1(z), w_2(z) \in \mathbb{L}$ ist eine Basis des Lösungsraumes $\Rightarrow$ jede Lösung $y(z)$ kann als Linearkombination

$$y(z) = \alpha_1 w_1(z) + \alpha_2 w_2(z) \quad \text{d.h.} \quad y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} (w_1 \quad w_2)$$

geschrieben werden. Der $@$-Operator lässt sich als Matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ schreiben.

Seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A. Weil A invertierbar ist, ist $\lambda_i \neq 0$.

Satz: Wenn A diagonalisierbar ist, dann hat die DGl zwei lin. unabhängige Lösungen, die sich beide als verallgemeinerte Potenzreihen schreiben lassen

Beweis: w_1, w_2 so wählen, dass $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$

d.h. $@ w_i = \lambda_i w_i$.

Wenn $\lambda_i \neq 1$, dann lässt sich w_i nicht zu einer Funktion in einer Umgebung von $x=0$ fortsetzen, da die Werte "springen".

Setze: $\quad \rho_j = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda_j \qquad e^{2\pi i \rho_j} = \lambda_j$

Der Logarithmus ist nur bis auf ein Vielfaches von $2\pi i$ bestimmt, d.h. ρ_j ist nur bis auf eine ganze Zahl bestimmt.

Die Funktion

$$z \mapsto z^{\rho_j} = e^{\rho_j \log(z)}$$

hat ebenfalls die Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} @ z^{\rho_j} &= e^{\rho_j (\log(z) + 2\pi i)} \\ &= e^{\rho_j \log(z)} \cdot e^{\log \lambda_j} \\ &= \lambda_j z^{\rho_j} \end{aligned}$$

Somit ~~ist~~ hat die Funktion $z^{-\rho_j} w_j(z)$ die Eigenschaft:

$$@ z^{-\rho_j} w_j(z) = \lambda_j^{-1} @ w_j(z) = \lambda_j^{-1} \lambda_j w_j(z) = w_j(z)$$

$\Longrightarrow$ $z^{-\rho_j} w_j(z)$ ist eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von $z=0$

Als holomorphe Funktion kann $z^{-\varrho_j} w_j(z)$ als Laurent-Reihe geschrieben werden:

$$z^{-\varrho_j} w_j(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$$

$$\Longrightarrow w_j(z) = z^{\varrho_j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$$

d.h. w_j hat eine verallgemeinerte Potenzreihe. $\square$

Wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist A diagonalisierbar. Wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ und A nicht diagonalisierbar, dann lässt sich A in Jordan-Normalform

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

bringen, d.h.

$$@ w_1 = \lambda w_1 \qquad\qquad \text{Setze } \varrho = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda$$
$$@ w_2 = \lambda w_2 + w_1$$

Wie im diagonalisierbaren Fall folgt, dass $w_1(x)$ durch eine verallgemeinerte Potenzreihe darstellbar ist. Ebenso ist

$$\begin{aligned} @(z^{-\varrho} w_2) &= \lambda (@ z^{-\varrho}) w_2 + (@ z^{-\varrho}) w_1 \\ &= \lambda \lambda^{-1} z^{-\varrho} w_2 + \lambda^{-1} z^{-\varrho} w_1 \\ &= z^{-\varrho} w_2 + \lambda^{-1} z^{-\varrho} w_1 . \end{aligned}$$

wobei $z^{-\varrho} w_1(z)$ eine Laurent-Reihe hat.

Die Funktion $\frac{1}{2\pi i} \log(z)$ hat die Eigenschaft

$$@ \frac{1}{2\pi i} \log(z) = \frac{1}{2\pi i} \log(z) + 1$$

Betrachte das Verhältnis w_2 / w_1

$$@\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = \frac{\lambda w_2 + w_1}{\lambda w_1} = \frac{w_2}{w_1} + \frac{1}{\lambda}$$

$$@\left(\frac{\log(z)}{2\pi i \lambda}\right) = \frac{\log(z)}{2\pi i \lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

Daher hat die Differenz die Eigenschaft

$$@\left(\frac{w_2}{w_1} - \frac{\log(z)}{2\pi i \lambda}\right) = \frac{w_2}{w_1} - \frac{\log(z)}{2\pi i \lambda}$$

Somit hat diese Funktion eine Laurent-Reihe:

$$\frac{w_2(z)}{w_1(z)} = \frac{\log(z)}{2\pi i \lambda} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k z^k$$

Da $w_1(z)$ eine verallgemeinerte Potenzreihe ist folgt, dass es eine lin. unabh. Lösung der

$$w_1(z) \log(z) + z^{\varrho} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$$

gibt.

Satz: Falls $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ist können die Lösungen der DGl in der Form

$$w_1(z) = z^{\varrho} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$$

$$w_2(z) = a\, w_1(z) \log(z) + z^{\varrho} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$$

gefunden werden.

6. Bessel-Funktionen 2. Art

Für ganzzahliges n liefert der Potenzreihenansatz nur eine Lösung $J_n(x)$, eine zweite Lösung muss daher in der Form

$$y(x) = J_n(x)\log(x) + z^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k$$

gefunden werden.

$$y'(x) = J_n'(x)\log(x) + \frac{1}{x}J_n(x) + \sum_k (n+k)c_k z^{n+k-1}$$

$$y''(x) = J_n''(x)\log(x) + \frac{2}{x}J_n'(x) - \frac{1}{x^2}J_n(x) + \sum_k (n+k)(n+k-1)z^{n+k-2}$$

Einsetzen in die Besselsche DGl

$$0 = x^2y'' + xy + (x^2-n^2)y$$

$$= \Big[\underbrace{x^2J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2-n^2)J_n(x)}_{\text{Bessel DGl} \Rightarrow\ =0}\Big]\log(x)$$

$$+ 2xJ_n'(x) - \cancel{J_n(x)} + \sum(n+k)(n+k-1)c_k x^{n+k}$$

$$+ \cancel{J_n(x)} + \sum_k (n+k)c_k x^{n+k}$$

$$+ (x^2-n^2)\sum_k c_k x^{n+k}$$

$$-2xJ_n'(x) = \sum_k \Big[\big((n+k)(n+k-1) + (n+k) - n^2\big)c_k + c_{k-2}\Big]x^{n+k}$$

$$= \sum_k \big((2nk+k^2)c_k + c_{k-2}\big)x^{n+k}$$

$$-J_n'(x) = \sum_k \big((2nk+1)k\,c_k + c_{k-2}\big)x^{n+k-1}$$

mit $$J_n'(x) = \sum_m \frac{(-1)^m(2m+n)}{m!\,\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n-1}$$

können die Koeffizienten durch Koeffizienten-Vergleich gefunden werden.

Die folgende spezielle Form für die zweite Lösung ist üblich und heisst Bessel-Funktion 2. Art:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\pi\alpha) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)}$$

Falls $\alpha \in \mathbb{Z}$ ist $\sin(\pi\alpha) = 0$, in diesem Fall muss $Y_n(x) = \lim_{\alpha\to n} Y_\alpha(x)$ verwendet werden.