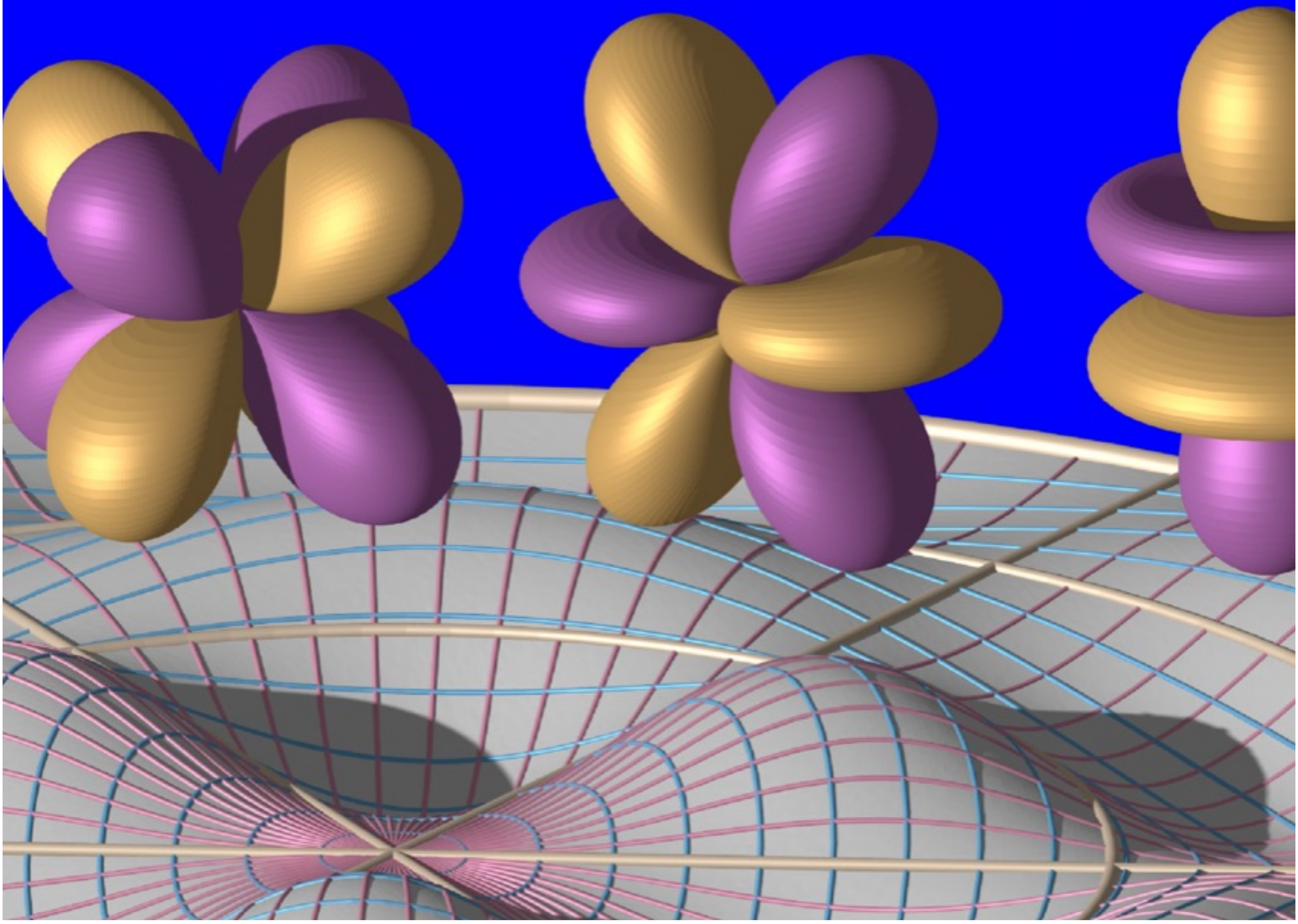
Mathematisches Seminar

Spezielle Funktionen

5. Elliptische Funktionen



Inhalt

1. Ellipsengeometrie

Kreis: durch Radius (und Mittelpunkt 0) vollständig bestimmt.

Kreisgleichung: $x^2+y^2=r^2$ oder $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$

$\Longrightarrow$ vorteilhaft mit "standardisierten" Koordinaten $c=\frac{x}{r}$ und $s=\frac{y}{r}$ arbeiten: $c^2+s^2=1$.

Jedes Paar von Funktionen $s(t), c(t)$ mit $s(t)^2+c(t)^2=1$ können zur Parametrisierung von Kreisen verwendet werden, z.B. $\sqrt{1-t^2}$ und t. Besonders praktisch sind aber $\sin(t)$ und $\cos(t)$, das Argument hat hier die besonders einfache geometrische Bedeutung der Bogenlänge.

Eine Ellipse besteht aus den Punkten, die die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

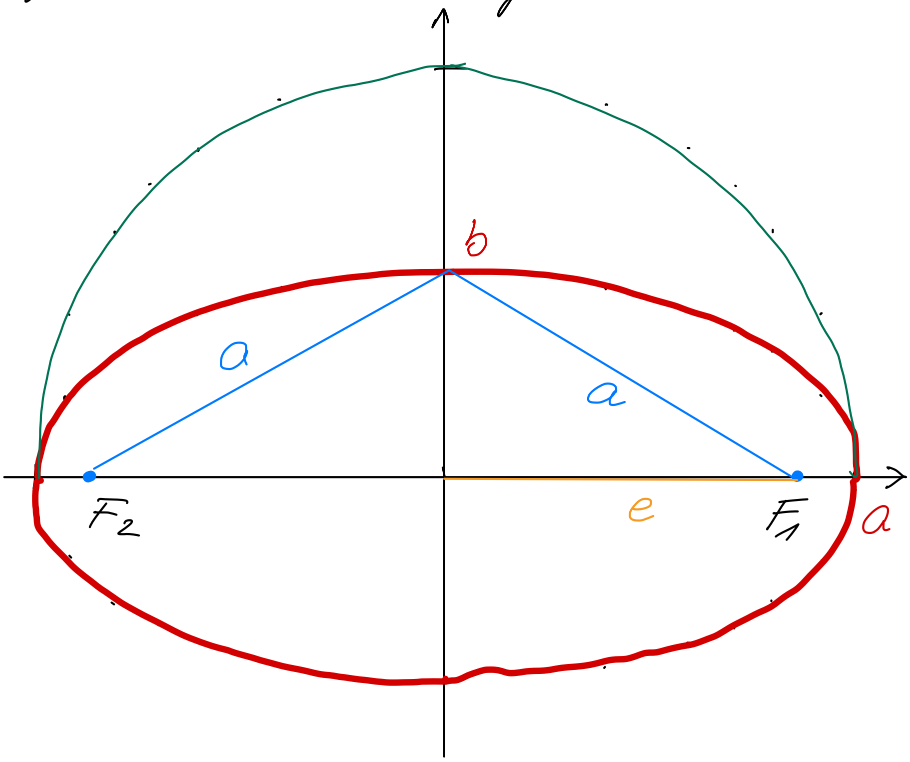
erfüllen. Durch Erweitern des 2. Summanden erhält man

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(ay/b)^2}{a^2}=1 \Longrightarrow \left(x, \frac{a}{b}y\right)$$

parametrisiert einen Kreis mit Radius.

$\Rightarrow$ $x(t) = a\,c(t)$, $y = b\,s(t)$ ist eine Parametrisierung der Ellipse, aber t hat jetzt keine einfache geometrische Bedeutung mehr!

Gegenüber dem Kreis hat eine Ellipse einen zusätzlichen "Formparameter", z. B. $\frac{b}{a}$, dieser Parameter ist aber wenig geeignet für andere Kegelschnitte.



$$e^2 + b^2 = a^2$$

$$F_1 = (e, 0)$$

$$F_2 = (-e, 0)$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - e^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$$

Satz: Die Ellipse besteht aus den Punkten P, für die $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ gilt.

Definition: e heisst lineare Exzentrizität, das dimensionslose Verhältnis $\varepsilon = e/a$ heisst numerische Exzentrizität.

2. Länge eines Ellipsenbogens

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{1-x^2}\,, \quad y' = \frac{b}{a}\,\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Bogenlänge:

$$\ell = \int \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \int \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{a^2-(a^2-b^2)x^2}{a^2(1-x^2)}}\,dx = \int \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

Dieses Integral hat keine geschlossene Stammfunktion, sogenanntes elliptisches Integral

"Trigonometrische" Parametrisierung: $(a\sin t, b\cos t)$

$$\ell = \int \sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt = \int \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$

$$= \int a\sqrt{1-\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2}\sin^2 t}\,dt$$

$$= a\int \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt$$

elliptisches Integral in Legendre-Form.

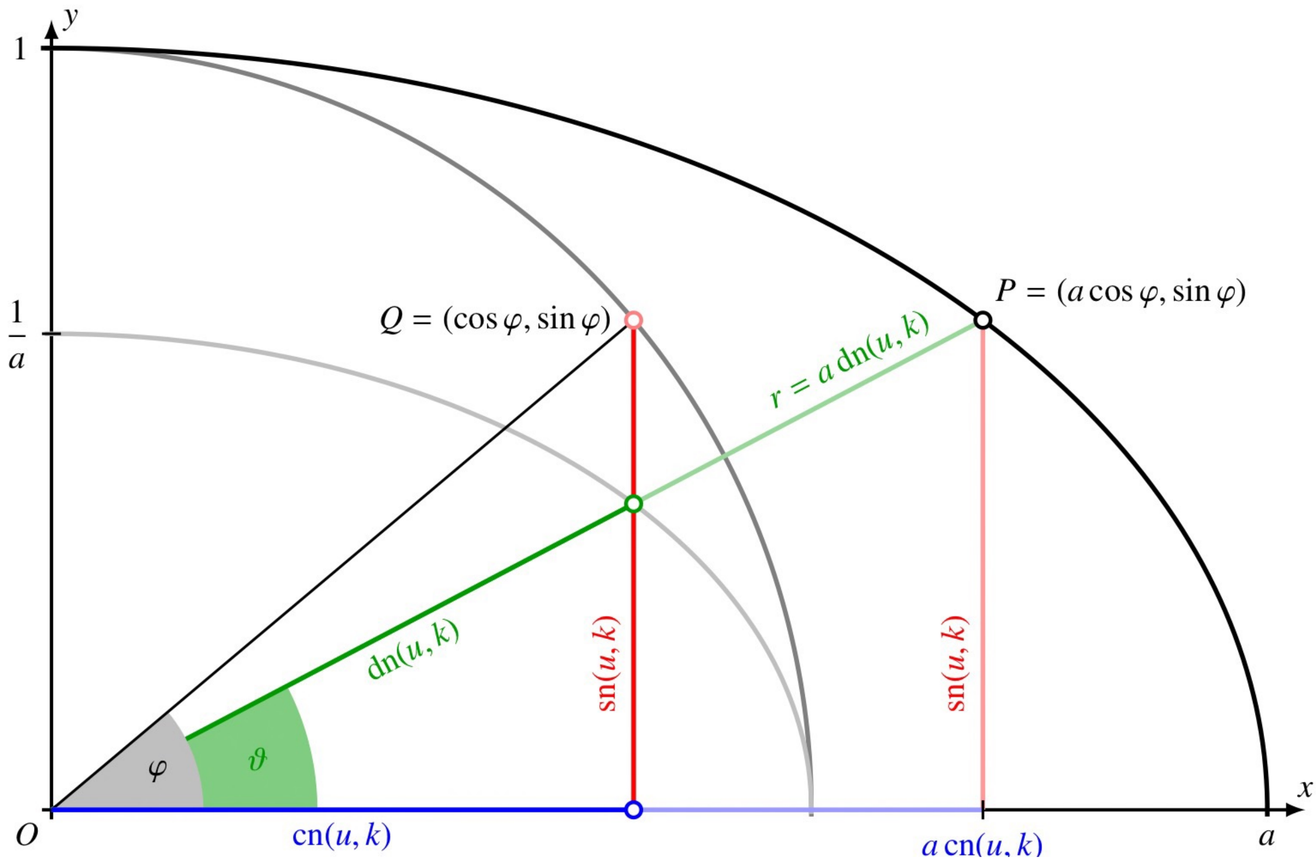
$\rightsquigarrow$ neue spezielle Funktionen ...

3. Jacobische elliptische Funktionen als Trigonometrie

"Trigonometrie" an einer "Standardellipse" mit Formparameter $k=\varepsilon$: Wähle $b=1$, und $a>1$, dann ist

$$k^2=\varepsilon^2=\frac{a^2-1}{a^2}=1-\frac{1}{a^2}$$

Komplementärer Parameter $k'^2=1-k^2$, d.h. $k'^2=1/a^2=b^2/a^2$.



$x=a\cos\varphi$

$y=\sin\varphi$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\cos\varphi=\frac{x}{a}$

$\sin\varphi=y$

<u>Definition</u>: Die Jacobischen elliptischen Funktionen sind

$$sn(u,k) = y = \sin\varphi \quad \text{sinus amplitudinis}$$
$$cn(u,k) = x/a = \cos\varphi \quad \text{cosinus amplitudinis}$$
$$dn(u,k) = r/a \quad \text{delta amplitudinis}$$

wobei der Parameter u später definiert wird

Relationen zwischen den elliptischen Funktionen:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \Rightarrow sn(u,k)^2 + cn(u,k)^2 = 1$$

Pythagoras:

$$sn(u,k)^2 + a^2 \underbrace{cn(u,k)^2}_{1-sn(u,k)^2} = a^2 dn(u,k)^2$$

$$a^2 - (a^2-1) sn(u,k)^2 = a^2 dn(u,k)^2 \qquad |:a^2$$

$$\Rightarrow dn(u,k)^2 + \frac{a^2-1}{a^2} sn(u,k)^2 = 1$$

$$dn(u,k)^2 + k^2 sn(u,k)^2 = 1$$

Oder wegen $sn(u,k)^2 = 1 - cn(u,k)^2$

$$dn(u,k)^2 + k^2 - k^2 cn(u,k)^2 = 1$$
$$\Rightarrow dn(u,k)^2 - k^2 cn(u,k)^2 = 1 - k^2$$

Zusammenfassung:

$$\operatorname{sn}(u,k)^2 + \operatorname{cn}(u,k)^2 = 1$$
$$\operatorname{dn}(u,k)^2 + k^2 \operatorname{sn}(u,k)^2 = 1$$
$$\operatorname{dn}(u,k)^2 - k^2 \operatorname{cn}(u,k)^2 = k'^2$$

Konsequenz: Jede Funktion lässt sich durch jede andere ausdrücken.

4. Ableitungen der Jacobische ell. Funktionen

<u>Ziel:</u> Parameter φ ersetzen durch einen Parameter u derart, dass die Ableitungsformeln möglichst einfach werden

Gesucht: $u(\varphi)$ oder $\varphi(u)$

Ableitung nach φ: für $sn(u,k)$

$$\frac{d}{d\varphi} sn(u,k) = \frac{dy}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \cos\varphi = cn(u,k)$$

Für $cn(u,k) = \frac{x}{a}$

$$\frac{dx}{d\varphi} = a\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = a(-\sin\varphi) = -a\,sn(u,k)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varphi} cn(u,k) = \frac{1}{a}\frac{dx}{d\varphi} = -sn(u,k)$$

Für $dn(u,k) = \frac{r}{a} = \frac{1}{a}\frac{d}{d\varphi}\sqrt{x^2+y^2}$

$$= \frac{1}{ar}\left(x\frac{dx}{d\varphi} + y\frac{dy}{d\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{ar}\left(x(-ay) + y\cdot\frac{x}{a}\right) = \frac{xy}{r}\Bigg(\underbrace{\frac{-a^2+1}{a^2}}_{-k^2}\Bigg)$$

$$= -k^2\frac{(x/a)y}{r/a} = -k^2\frac{sn(u,k)\,cn(u,k)}{dn(u,k)}$$

Zusammenfassung:

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{sn}(u,k) = \mathrm{cn}(u,k)\,\frac{d\varphi}{du}$$

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{cn}(u,k) = -\mathrm{sn}(u,k)\,\frac{d\varphi}{du}$$

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{dn}(u,k) = -k^2\,\frac{\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{cn}(u,k)}{\mathrm{dn}(u,k)}\,\frac{d\varphi}{du}$$

Ableitung von $\mathrm{dn}(u,k)$ ist sehr viel komplizierter. "Gleichmässig" kompliziert, wenn man

$$\frac{d\varphi}{du} = \mathrm{dn}(u,k)$$

wählt.

Satz: Ableitungen der Jacobischen elliptischen Funktionen:

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{sn}(u,k) = \mathrm{cn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k)$$

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{cn}(u,k) = -\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k)$$

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{dn}(u,k) = -k^2\,\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{cn}(u,k)$$

5. Berechnung von u

u war so gewählt, dass $d\varphi/du = \mathrm{dn}(u,k)$.
Wie kann man u aus dem Parameter ϑ der Ellipse (Polarwinkel des Punktes $P=(x,y)$) bestimmen?

Aus

$$\tan\vartheta = \frac{1}{a}\tan\varphi$$

folgt durch Ableiten nach φ

$$\frac{1}{\cos^2\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{1}{a}\,\frac{\cos^2\vartheta}{\cos^2\varphi} = \frac{\mathrm{cn}(u,k)^2/\mathrm{dn}(u,k)^2}{a\,\mathrm{cn}(u,k)^2}$$

$$= \frac{1}{a\,\mathrm{dn}(u,k)^2}$$

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{d\vartheta}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{a\,\mathrm{dn}(u,k)} = \frac{1}{a}\,\frac{a}{r} = \frac{1}{r}$$

Umstellen und integrieren:

$$u = \int_0^{\vartheta} r\,d\vartheta$$

Fall Kreis: $u =$ Bogenlänge.

6. Die abgeleiteten Jacobischen ell. Funktionen

Ausser den grundlegenden trigonometrischen Funktionen $\sin t$ und $\cos t$ gibt es die Quotienten:

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \csc t = \frac{1}{\sin t}$$

Dasselbe kann man für die Jacobischen ell. Funktionen machen:

<u>Definition:</u> abgeleitete Jacobische Funktionen

$$\mathrm{ns}(u,k) = \frac{1}{\mathrm{sn}(u,k)}, \quad \mathrm{nc}(u,k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(u,k)}, \quad \mathrm{nd}(u,k) = \frac{1}{\mathrm{dn}(u,k)}$$

$$\mathrm{sc}(u,k) = \frac{\mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{cn}(u,k)} \qquad \mathrm{sd}(u,k) = \frac{\mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{dn}(u,k)} \qquad \mathrm{cd}(u,k) = \frac{\mathrm{cn}(u,k)}{\mathrm{dn}(u,k)}$$

$$\mathrm{cs}(u,k) = \frac{\mathrm{cn}(u,k)}{\mathrm{sn}(u,k)} \qquad \mathrm{ds}(u,k) = \frac{\mathrm{dn}(u,k)}{\mathrm{sn}(u,k)} \qquad \mathrm{dc}(u,k) = \frac{\mathrm{dn}(u,k)}{\mathrm{cn}(u,k)}$$

Aus den Relationen zwischen den grundlegenden Jacobischen elliptischen Funktionen kann man weitere Relationen für die abgeleiteten Funktionen finden. Insbesondere lässt sich jede Funktion durch jede andere ausdrücken

Beispiel: Drücke $sn(u,k)$ durch $cd(u,k)$ aus.

$$cd(u,k)^2 = \frac{cn(u,k)^2}{dn(u,k)^2} = \frac{1-sn(u,k)^2}{1-k^2 sn(u,k)^2} \qquad (*1)$$

$$cd(u,k)^2 - k^2 sn(u,k)^2 cd(u,k)^2 = 1 - sn(u,k)^2$$

$$\left(1-k^2 cd(u,k)^2\right) sn(u,k)^2 = 1 - cd(u,k)^2$$

$$sn(u,k)^2 = \frac{1-cd(u,k)^2}{1-k^2 cd(u,k)^2} \qquad (*2)$$

Man beachte: (*1) und (*2) gehen durch die Vertauschung $sn(u,k) \longleftrightarrow cd(u,k)$ ineinander über $\bigcirc$

Die Ableitungen aller abgeleitete Jacobischen elliptischen Funktionen können sofort mit den bekannten Regeln für die Ableitung berechnet werden:

Beispiel:

$$\frac{d}{du} cd(u,k) = \frac{d}{du} \frac{cn(u,k)}{dn(u,k)}$$

$$= \frac{cn'(u,k)\, dn(u,k) - cn(u,k)\, dn'(u,k)}{dn(u,k)^2}$$

$$= \frac{-sn(u,k)\, dn(u,k)^2 + k^2 sn(u,k)\, cn(u,k)^2}{dn(u,k)^2}$$

$$= \operatorname{sn}(u,k) \frac{\operatorname{dn}(u,k)^2 - k^2 \operatorname{cn}(u,k)^2}{\operatorname{dn}(u,k)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sn}(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)} \frac{k'^2}{\operatorname{dn}(u,k)} = k'^2 \operatorname{sd}(u,k) \operatorname{nd}(u,k)$$

$\bigcirc$

Durchführung der Rechnung für alle Fkt. zeigt, dass die Ableitung einer Jacobischen elliptischen Funktionen im als Produkt zweier solcher Funktionen geschrieben werden kann:

$$zr'(u,k) = \alpha \; pr(u,k)\, qr(u,k)$$

wobei $z, r, p, q \in \{s, c, d, n\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. Differentialgleichung der Jacobischen ell. Fkt

Die Ableitung von $sn(u,k)$ ist

$$\frac{d}{du} sn(u,k) = cn(u,k)\, dn(u,k) \qquad (*)$$

$cn(u,k)$ und $dn(u,k)$ lassen sich durch $sn(u,k)$ ausdrücken:

$$cn(u,k)^2 = 1 - sn(u,k)^2$$
$$dn(u,k)^2 = 1 - k^2 sn(u,k)^2$$

Quadrieren von $(*)$ und Einsetzen dieser Identitäten ergibt

$$\left(\frac{d}{du} sn(u,k)\right)^2 = (1 - sn(u,k)^2)(1 - k^2 sn(u,k)^2)$$

Damit ist gezeigt:

<u>Satz</u>: $y(u) = sd(u,k)$ ist eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung

$$(y')^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)$$
$$= 1 - (1+k^2)y^2 + k^2y^4$$

Die Differentialgleichung erster Ordnung für $sn(u,k)$ lässt sich durch nochmaliges Ableiten in eine Differentialgleichung 2. Ordnung umformen:

$$\frac{d}{du}(y')^2 = \frac{d}{du}\left(1-(1+k^2)y^2+k^2y^4\right)$$

$$2y'y'' = -2(1+k^2)yy' + 4k^2y^3y'$$

$$y'' = -(1+k^2)y + 2k^2y^3$$

Allgemein gilt für jede elliptische Funktion, abgekürzt $zn(u,k)$:

① $\frac{d}{du} zn(u,k) = \gamma\ pr(u,k)\, qr(u,k)$

mit $pr(u,k)$ und $qr(u,k)$ elliptische Funktionen.

② Sowohl $pr(u,k)^2$ als auch $qr(u,k)^2$ können durch $zn(u,k)^2$ ausgedrückt werden.

$\Rightarrow$ Jede elliptische Funktion erfüllt eine Differentialgleichung der Form

$$\left(\frac{d}{du} zn(u,k)\right)^2 = P(zn(u,k)^2)$$

P eine rationale Funktion.

Satz: Jede elliptische Funktion erfüllt eine DGl 1. Ordnung der Form

$$(y')^2 = \alpha y^4 + \beta y^2 + \gamma = P(y^2)$$

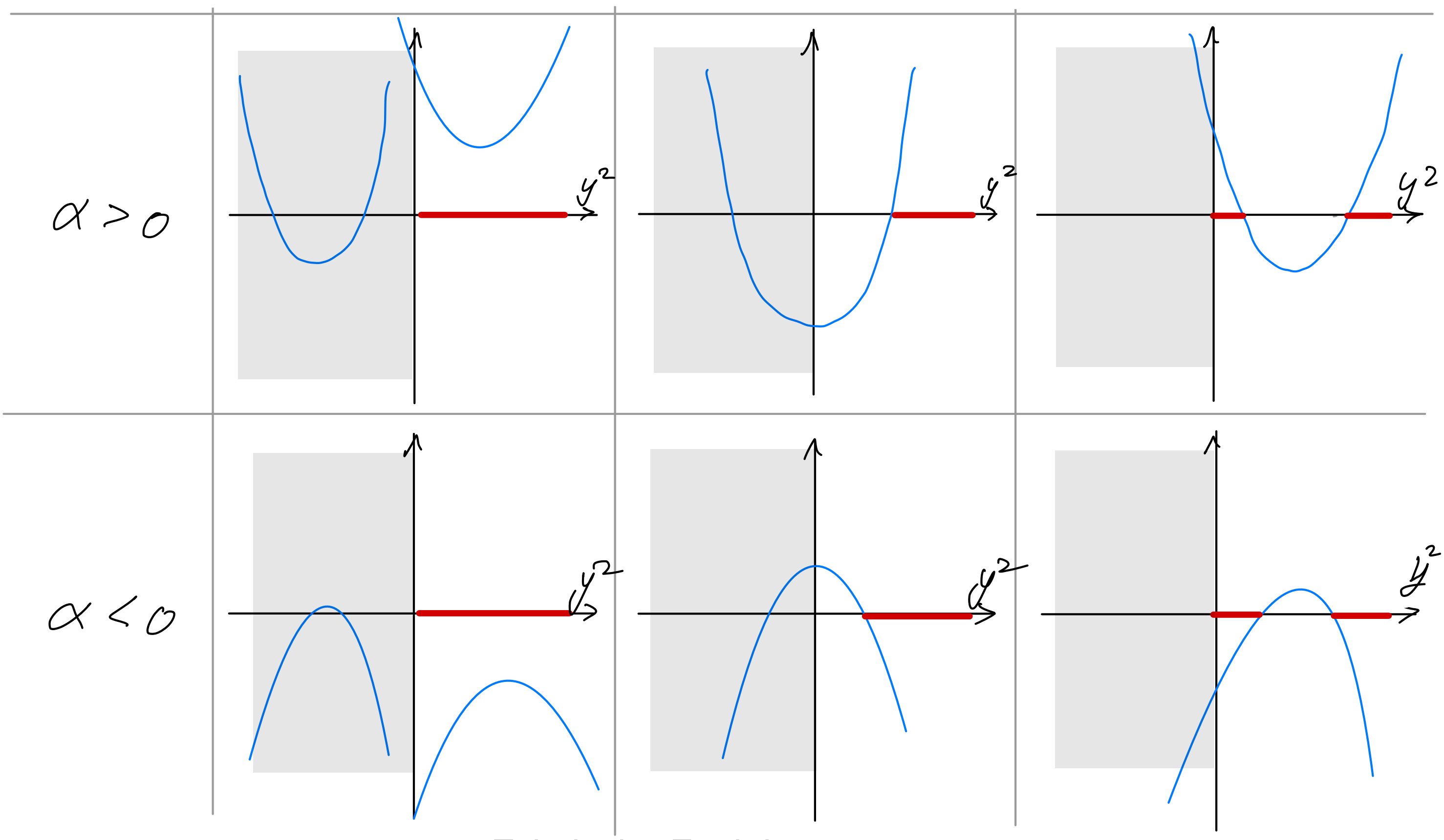
Eine Lösung kann nur existieren, wenn die rechte Seite ≥ 0 ist. P ist ein quadratisches Polynom mit Scheitel $x_S = -\frac{\beta}{2\alpha}$

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$= \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

$$= \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \boxed{\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}} \quad = y_S$$

— Bereich, in dem sich die Lösung bewegen kann —



Zugehörige Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$(y')^2 = \alpha\left(y^2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha y - \beta^2}{4\alpha}$$

ableiten nach u

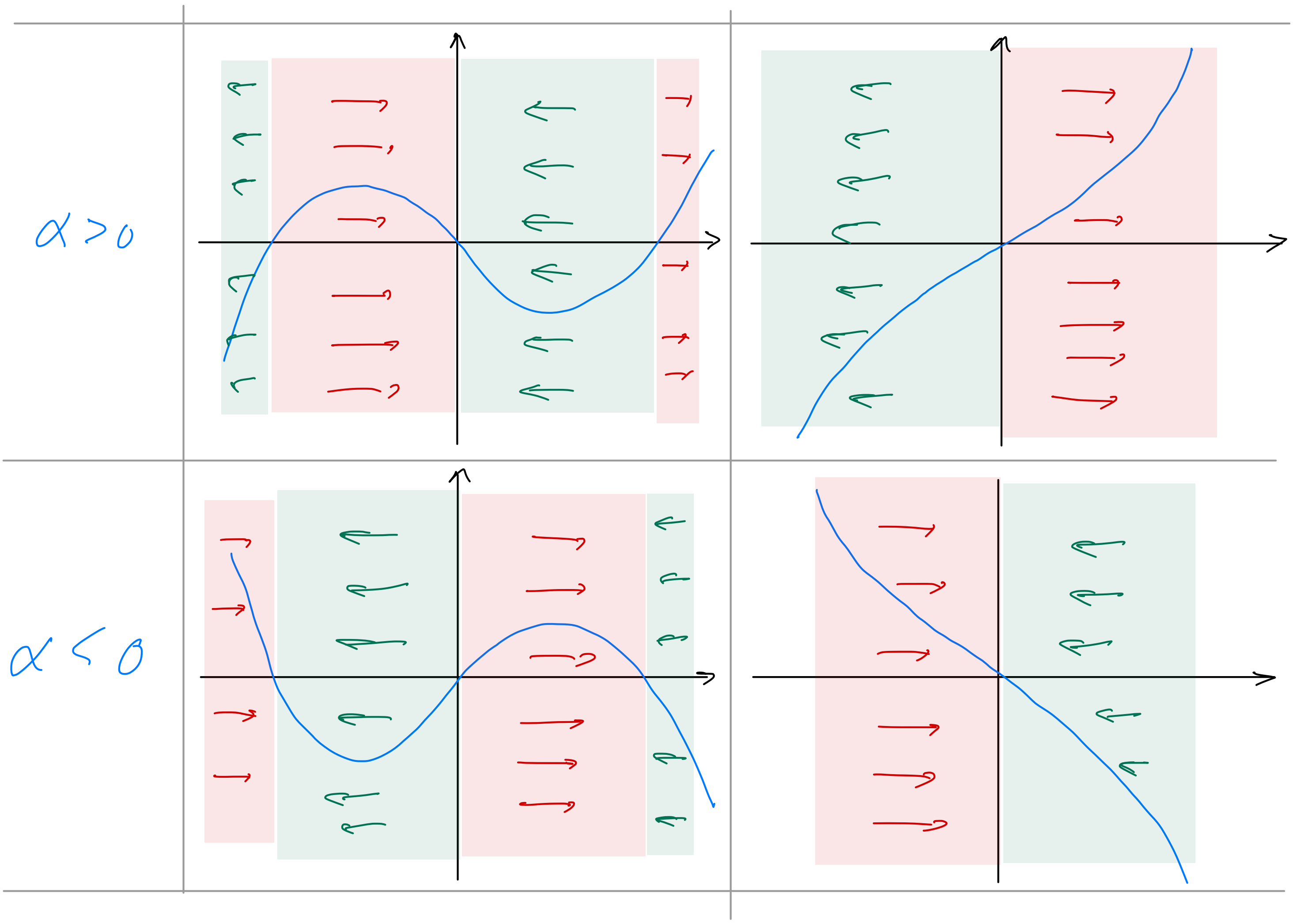
$$2y'y'' = 2\alpha\left(y^2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)2yy'$$

DGl. 2. Ordnung

$$\Rightarrow \quad \boxed{y'' = 2\alpha y^3 + 2\beta y = 2(\alpha y^2 + \beta)y = F(y)}$$

Mechanische Interpretation: 2. Ableitung = Kraft, d.h.

$F(y) > 0$ Kraft nach "rechts"
$F(y) < 0$ Kraft nach "links"



8. Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen

Differentialgleichungen der Form

$$(y')^2 = P(y^2) \qquad P \text{ ein Polynom, } \deg P = 2$$

Lösungsansätze:

a) Separierung:

$$y' = \sqrt{P(y^2)} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{P(y^2)}} = \int du$$

$$\Rightarrow u = \int \frac{dy}{\sqrt{P(y^2)}} = f(y+C)$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(u) - C$$

d.h. Lösungen dieser Gleichung sind inverse Funktionen eines Integrals von $1/P(y^2)$ $\longrightarrow$ elliptische Integrale (später)

b) Die Lösung muss von der Form

$$y(x) = A \, zn(Bx + C; k)$$

sein. Die Ableitung ist:

$$\frac{dy}{dx} = AB \, zn'(Bx+C, k)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$zn'(Bx+C,k)^2 = \frac{1}{(AB)^2} P(A^2 zn(Bx+C,k)^2)$$

Ausgehend von $P(z) = az^2 + bz + c$

wird die Differentialgleichung zu

$$zn'(\cdot,k)^2 = \frac{1}{(AB)^2}\left(aA^4 zn(\cdot,k)^4 + bA^2 zn(\cdot,k) + c\right)$$

$$= \frac{aA^2}{B^2} zn(\cdot,k)^4 + \frac{b}{B^2} zn(\cdot,k)^2 + \frac{c}{A^2B^2} \quad (*)$$

Man braucht daher eine Tabelle der DGl für alle Funktionen $zn(\cdot,k)$ und muss dann A, B, C so wählen, dass $(*)$ die DGl der Funktion $zn(\cdot,k)$ wird.

- C ist eine reine "Zeitverschiebung", die die Differentialgleichung nicht ändert (autonome DGl) $\Rightarrow$ C muss aus Anfangsbedingung bestimmt werden.

- Wenn $(zn')^2 = \alpha zn^4 + \beta zn^2 + \gamma$ die DGl von zn ist, dann muss man A, B und k so wählen, dass

$$\frac{aA^2}{B^2} = \alpha \qquad \frac{b}{B^2} = \beta \qquad \frac{c}{A^2B^2} = \gamma$$

(α, β, γ hängen von k ab)

Tabelle der Differentialgleichungen (nach Schwalm)

zn	α	β	γ
sn	k^2	$-(1+k^2)$	1
cn	$-k^2$	$-(1-2k^2)$	$1-k^2$
dn	-1	$2-k^2$	$-(1-k^2)$
ns	1	$-(1+k^2)$	k^2
nc	$1-k^2$	$-(1-2k^2)$	$-k^2$
nd	$-(1-k^2)$	$2-k^2$	-1
sc	$1-k^2$	$2-k^2$	1
cs	1	$2-k^2$	$1-k^2$
sd	$-k^2(1-k^2)$	$-(1-2k^2)$	1
ds	1	$-(1-2k^2)$	$-k^2(1-k^2)$
cd	k^2	$-(1+k^2)$	1
dc	1	$-(1+k^2)$	k^2

Symmetrien:

① $pq(u,k) \longleftrightarrow qp(u,k)$ rot / grün

② sn und cd unterscheiden sich nur um eine Phasenverschiebung (kann man auch aus der geom. Definition ablesen).

9. Elliptische Integrale

$\mathrm{sn}(u,k)$ ist Lösung der DGl

$$(y')^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2),$$

durch Separation

$$u + C = \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

d.h. y ist die Umkehrfunktion von

$$x \longmapsto \int^x \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

Ähnliches Integral wie bei der Berechnung des Ellipsenbogens in Abschnitt 2:

<u>Definition:</u> unvollständige elliptische Integrale

1\. Art: $$F(x,k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

2\. Art: $$E(x,k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt$$ Ellipsenbogen!

3\. Art: $$\Pi(n,x,k) = \int_0^x \frac{dt}{(1-nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

Vollständige elliptische Integrale

$$K(k) = F(1,k)$$

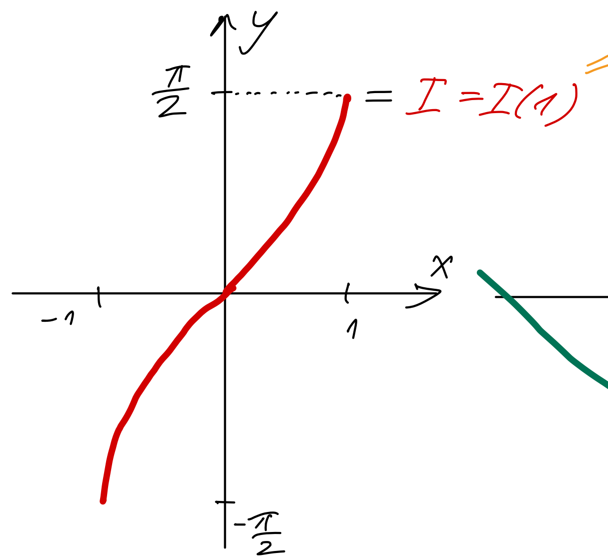
$$E(k) = E(1,k)$$ Viertelsellipse

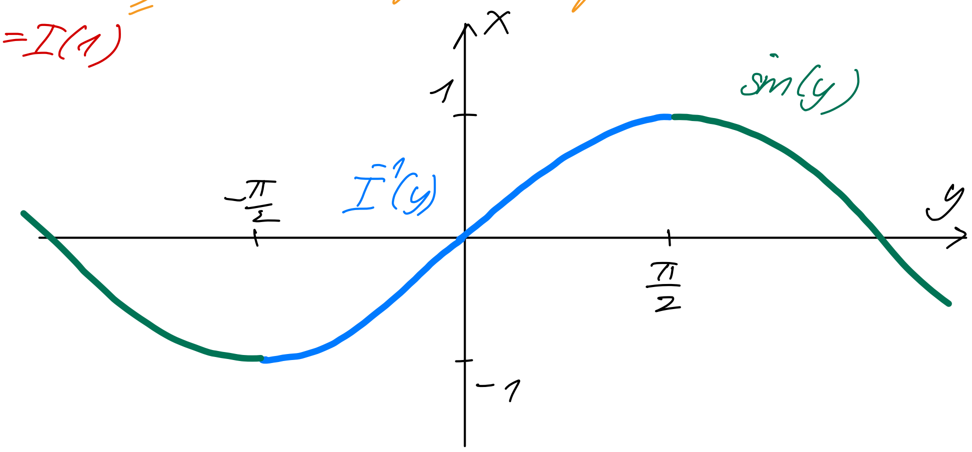
$$\Pi(n,k) = \Pi(n,1,k)$$

Zur Erinnerung: "unvollst. trigo. Integral"

$$I(x) = \boxed{\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}} = \arcsin x$$

d.h. sin() ist die Umkehrfunktion des Integrals. Aber das Integral ist nur reell für $x \in [-1,1]$ und nimmt Werte im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ an. Die "vollständige" Funktion sin() erhält man also durch periodische Fortsetzung:



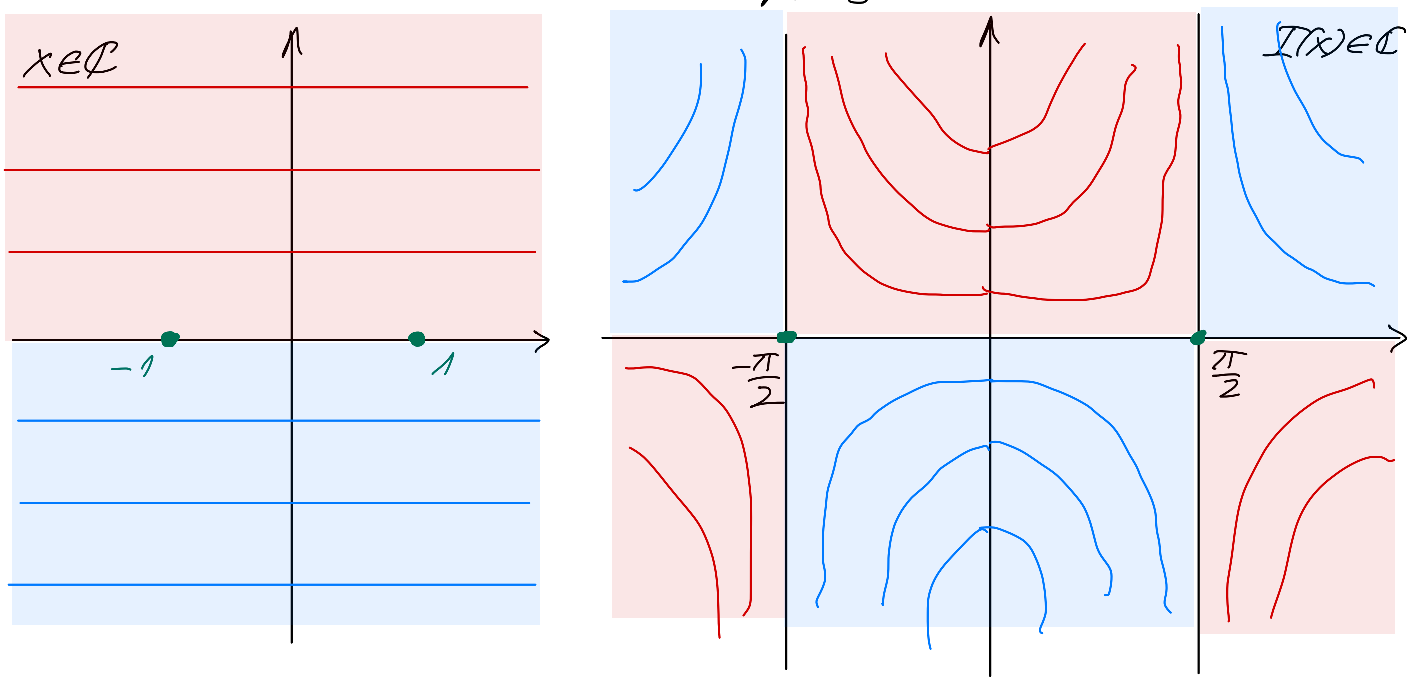


$\Longrightarrow$ Periode der sin-Funktion: $4 \cdot I$.

<u>Idee:</u> Dieselbe Analyse für elliptische Integrale liefert Periodizität der elliptischen Funktionen.

<u>Erweiterung:</u> was passiert für $|x|>1$?

Abbildung $x \mapsto I(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ für $x \in \mathbb{C}$



Für $|x| > 1$: $I'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ rein imaginär,

d.h. die Kurve $x \mapsto I(x), |x|>1$ ist eine vertikale Gerade!

Die Streifen für $|y|$ entstehen durch periodische Fortsetzung.

Regeln:

① Orientierung kann sich nicht ändern (holomorphe Fkt sind lokal Drehstreckungen)

② $(1-t^2) > 0 \Rightarrow$ Rand horizontal

$(1-t^2) < 0 \Rightarrow$ Rand vertikal

$\Rightarrow$ bei jeder Nullstelle des Integranden ein "Knick" um $\frac{\pi}{2}$.

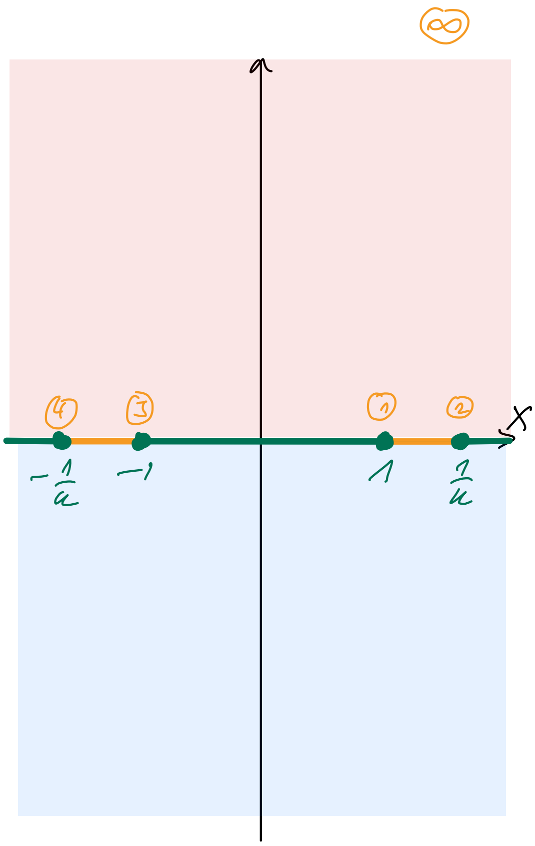
Wertebereich des unvollständigen elliptischen Integrals 1. Art:

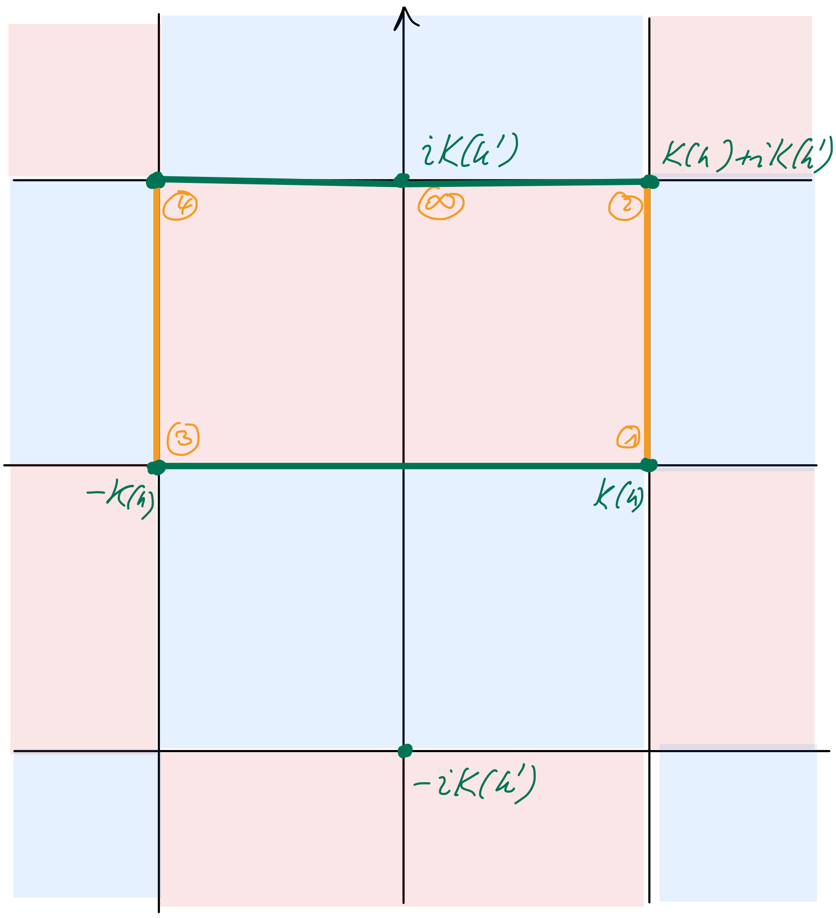
$$x \longmapsto F(x,k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

Nullstellen / Vorzeichenwechsel des Radikanden:

	$\lvert x\rvert < 1$	Rand horizontal
$t = \pm 1$		
	$1 < \lvert x\rvert < \frac{1}{k}$	Rand vertikal
$t = \pm \frac{1}{k}$		
	$\lvert x\rvert > \frac{1}{k}$	Rand horizontal

$\Longrightarrow$ Bildbereich ist ein Rechteck:





$\Longrightarrow$ $sn(u,k)$ ist doppelt periodisch

Berechnung der vertikalen Periode:

$$K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{-(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

Substitution: $t = \sqrt{1-k'^2s^2}/k$

$$s = \sqrt{1-k^2t^2}/k'$$

$$\Rightarrow 1-k^2t^2 = 1-(1-k'^2s^2) = \boxed{k'^2s^2}$$

$$1-t^2 = 1-(1-k'^2s^2)/k^2$$

$$= (k^2-1+k'^2s^2)/k^2$$

$$= -(k'^2-k'^2s^2)/k^2 = \boxed{-\frac{k'^2}{k^2}(1-s^2)}$$

$$dt = \boxed{\frac{-k'^2s}{\sqrt{1-k'^2s^2}} \quad \frac{1}{k}\,ds}$$

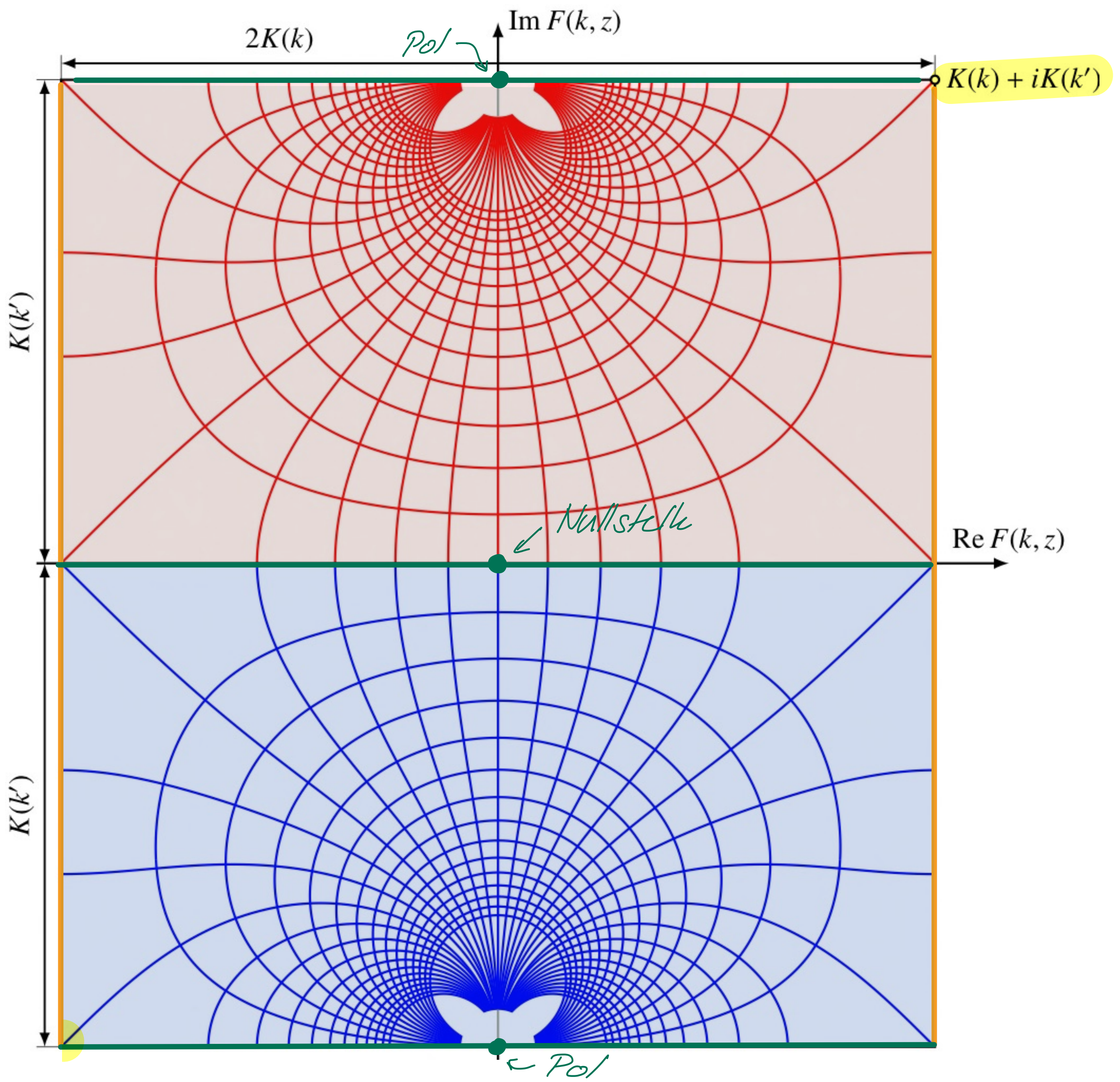
$$t=1 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{1-k^2}/k' = \boxed{1}$$

$$t = \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad s = \boxed{0}$$

$$\Rightarrow K'(k) = \boxed{-}\int_{\boxed{1}}^{\boxed{0}} \frac{1/\cancel{k'}\cancel{s}}{\sqrt{(1-s^2)(1-k'^2s^2)}} \frac{\cancel{k}}{\cancel{k'}} \frac{\cancel{k'^2}\cancel{s}}{\cancel{k}}\,ds$$

$$= \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k'^2s^2)}} = K(k')$$

Resultat: Jacobische elliptische Funktionen sind doppelt periodisch mit Perioden $4K(k)$ und $2iK(k')$



<u>Fundamentalbereich</u>: Die Jacobischen elliptischen Funktionen sind festgelegt durch die Werte auf dem Rechteck mit Ecken $\pm K(k) \pm iK(k')$.

Genau eine Nullstelle (in 0) und genau ein Pol (in $\pm K(k')$).

10. Integrale von $R(x, \sqrt{P(x)})$

Integrale der Form $\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx$ mit einem quadratischen Polynom $P(x)$ lassen sich mit den trigonometrischen Substitutionen auf Integranden der Form $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ und $\sqrt{x^2-a^2}$ die sich mit elementaren Funktionen berechnen lassen.

<u>Satz</u>: Integrale der Form

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx$$

mit einem quadratfreien Polynom $P(x)$ vom Grad 3 oder 4 lassen sich auf Integrale rationaler Funktionen und die unvollst. elliptischen Funktionen 1.-3. Art zurückführen