1 Ungleichungen S31

Bernoulli	$1+na$	$\leq$	$(1+a)^n$
Binomische	$\lvert ab\rvert$	$\leq$	$\frac{1}{2}(a^2+b^2)$
Dreiecks	$\lvert a+b\rvert$	$\leq$	$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$

Mittel ($\forall j : a_j \geq 0, n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{array}{ccccc} \texttt{HM} & \leq & \texttt{GM} & \leq & \texttt{AM} \\ \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right]^{-1} & \leq & \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j} & \leq & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \end{array}$$

Integral

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

2 Zahlenfolgen und Reihen

2.1 Konvergenz S679

Hinweise: Induktion, Einschließungsprinzip, Bolzano-Weierstrass.

$$\exists g \in \mathbb{R} : g = \lim_{n\to\infty}\langle f_n\rangle \iff \langle f_n\rangle \text{ konvergiert}$$

2.2 Divergenz S472

Divergent heißt nicht konvergent:

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n\rangle = \pm\infty \implies \langle f_n\rangle \text{ divergiert } \textit{bestimmt}$$
$$\nexists \lim_{n\to\infty}\langle f_n\rangle \implies \langle f_n\rangle \text{ divergiert}$$

2.3 Binomischer Satz S12

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.4 Folgen S470

Arithmetisch	$a_{n+1} = a_n + d$	$d = a_{n+1} - a_n$
Geometrisch	$a_{n+1} = qa_n$	$q = a_{n+1}/a_n$

Monotonie der Folge			
$d > 0$	$q > 1$	$\implies$	$\langle a_n\rangle \Uparrow$
$d \geq 0$	$q \geq 1$	$\implies$	$\langle a_n\rangle \uparrow$
$d < 0$	$q \in (0;1)$	$\implies$	$\langle a_n\rangle \Downarrow$
$d \leq 0$	$q \in (0;1]$	$\implies$	$\langle a_n\rangle \downarrow$

2.5 Reihen S20,477,1075

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)\ (r \neq 1)$$

3 Funktionen S49

$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f \quad x \mapsto f(x)$$

3.1 Lineare Transformationen

Seien $\mu, \lambda, \ell, o \geq 0$. Mit < 0 Werte: Streckungen sind Spiegelungen und Verschiebungen sind in Gegenrichtung.

$$\mathfrak{T}\{f\} = \mu f(\lambda x + \ell) + o$$

Wobei μ = y-Streckung, λ = x-Streckung, ℓ = Verschiebung nach links, o = Verschiebung nach oben.

3.2 Monotonie S51,453

Zeichen	Bedeutung	Bedingung ($\forall\varepsilon > 0$)
$f \Uparrow$	streng wachsend	$f(x) < f(x+\varepsilon)$
$f \uparrow$	wachsend	$f(x) \leq f(x+\varepsilon)$
$f \Downarrow$	streng fallend	$f(x) > f(x+\varepsilon)$
$f \downarrow$	fallend	$f(x) \geq f(x+\varepsilon)$

Monotonie	$f'' \neq 0$	$f^{(n)} \neq 0$ und n gerade
$f \Uparrow$	$f' > 0$	$f^{(n-1)} > 0$
$f \uparrow$	$f' \geq 0$	$f^{(n-1)} \geq 0$
$f \Downarrow$	$f' < 0$	$f^{(n-1)} < 0$
$f \downarrow$	$f' \leq 0$	$f^{(n-1)} \leq 0$

NB: Gilt auch für Zahlenfolgen ($f(x) \rightsquigarrow f_n, f(x+\varepsilon) \rightsquigarrow f_{n+1}$)

3.3 Symmetrien S52

f	Bedingung	Bedeutung
gerade	$f(-x) = f(x)$	y-Symmetrisch
ungerade	$f(-x) = -f(x)$	Nullpunkt-Symmetrisch
periodisch	$f(x) = f(x \pm p)$	Period $p \in \mathbb{D}_f$

3.4 Beschranktheit S52,676

Eine funktion heißt nach unten oder oben beschränkt, wenn ihre Werte nicht größer oder kleiner als eine bestimmte Zahl K bzw. k sind. f ist beschränkt wenn $\exists \sup f \wedge \exists \inf f \iff \forall x : k < f(x) < K$.

$$K = \sup f \iff \exists K \in \mathbb{R} : \forall x : f(x) < K$$
$$k = \inf f \iff \exists k \in \mathbb{R} : \forall x : f(x) > k$$

3.5 Stetigkeit S60

Eine funktion heißt *stetig* wenn:

$$\forall x \in \mathbb{D}_f : \lim_{u^-\to x} f(u) = \lim_{u^+\to x} f(u) = f(x)$$

3.6 Nullstellen S40,47,48

3.7 Extremstellen S455

3.8 Wendepunkte S256

3.9 Konvexität S253

Auch als Krümmungsverhalten bekannt. Sei $P = (x, f(x))$ und kein Wendepunkt, d.h. $f''(x) \neq 0$.

$$f''(x) > 0 \implies \text{nach oben konkav, streng konvex}$$
$$f''(x) < 0 \implies \text{nach unten konkav, streng konkav}$$

3.10 Wendepunkte S256

3.11 Asymptoten S260

Sei $a(x) = kx + b$ die allgemeine Asymptot von $f(x)$, d.h. $\lim_{x\to\infty} f(x) - a(x) = 0$. Dann

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty} f'(x) \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

3.12 Umkehrfunktion S53

Umkehrbarkeit Bedingungen:

$$f^{-1} : \mathbb{W}_f \to \mathbb{D}_f \quad f(x) \mapsto x$$
$$\exists f^{-1} \iff (f \Downarrow) \vee (f \Uparrow)$$

3.13 Polynomen S65

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \prod_{i=1}^{n} (x - r_i)$$

Nullstellen S40 (Wurzeln) r_i können mithilfe von Faktorisierung, der Quadratische Formel $r = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$ oder dem Hornerschema S966 gelöst werden.

$$P_n(x) = (x - u)P_{n-1}(x) + P_n(u)$$

Seien a_i die Koeffizienten von $P_n(x)$, b_i von $P_{n-1}(x)$ und $u \in \mathbb{D}_P$. Wenn $P_n(u) = 0$, dann ist $u = r$ d.h. eine Nullstelle.

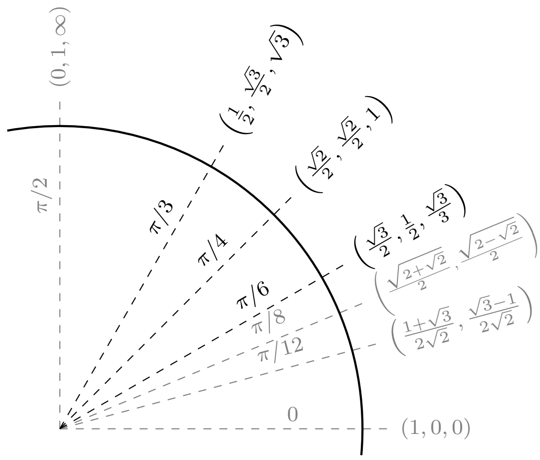
	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0	
$\times u$		ub_{n-1}	$\cdots$	ub_1	ub_0	$+$
	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_0	$P_n(u)$	

3.14 Gebrochene Funktionen S14

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{p_m x^m + \cdots + p_0}{q_n x^n + \cdots + q_0}$$

3.14.1 Partialbruchzerlegung S15

3.15 Trigonometrische S77,80,147,165



Definitionen der grundsätzlichen Winkelfunktionen.

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Beziehungen und Identitäten.

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\begin{array}{llll}
\cos(\alpha + 2\pi) = & \cos(\alpha) & \sin(\alpha + 2\pi) = & \sin(\alpha) \\
\cos(-\alpha) = & \cos(\alpha) & \sin(-\alpha) = & -\sin(\alpha) \\
\cos(\pi - \alpha) = & -\cos(\alpha) & \sin(\pi - \alpha) = & \sin(\alpha) \\
\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = & \sin(\alpha) & \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = & \cos(\alpha) \\
\hline
\cos(\alpha + \beta) & = & \multicolumn{2}{l}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \\
\sin(\alpha + \beta) & = & \multicolumn{2}{l}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} \\
\hline
\cos(2\alpha) & = & \multicolumn{2}{l}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \\
 & = & \multicolumn{2}{l}{1 - 2\sin^2\alpha} \\
 & = & \multicolumn{2}{l}{2\cos^2\alpha - 1} \\
\sin(2\alpha) & = & \multicolumn{2}{l}{2\sin\alpha\cos\alpha} \\
\tan(2\alpha) & = & \multicolumn{2}{l}{(2\tan\alpha)(1 + \tan^2\alpha)^{-1}}
\end{array}$$

4 Grenzwert S55

Bedingungen für die Existenz einer Grenzwert:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = g \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Formell lautet der $\delta - \varepsilon$ Kriterium:

$$\lim_{x\to a} f(x) \iff \forall\varepsilon > 0 : \exists a : |f(a) - g| < \varepsilon$$

4.1 Unbestimmte Formen

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

4.2 Enschließungsprinzip S56

Auch als “Sandwitch” bekannt. $\forall x : a(x) \leq f(x) \leq b(x)$

$$\exists \left(\lim_{x\to\pm\infty} a(x) = \lim_{x\to\pm\infty} b(x) = g \right) \implies \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = g$$

NB: gilt auch für folgen a_n, b_n, f_n

4.3 Bolzano-Weierstrass S701

$$\left.\begin{array}{l} \exists \sup f \wedge f \Uparrow \\ \exists \inf f \wedge f \Downarrow \end{array}\right\} \implies f \text{ konvergiert}$$

4.4 Bemerkenswerte Grenzwerte

$$\begin{array}{ll}
\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 & \displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \\
\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a & \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0 \\
\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2} = 1 & \displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{p} = 1 \\
\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 & \displaystyle\lim_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{x} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1)
\end{array}$$

4.5 Bernoulli-l’Hôpitalsche Regel S57

Wenn $f(x)/g(x) \to \pm\infty/\pm\infty$ oder $f/g \to 0/0$ dann gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Hinweise:

$$\begin{array}{ll}
\varphi\psi = \dfrac{\varphi}{\psi^{-1}} = \dfrac{\psi}{\varphi^{-1}} & 0\cdot\infty \rightsquigarrow \dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty} \\
\varphi - \psi = \dfrac{\psi^{-1} - \varphi^{-1}}{(\varphi\psi)^{-1}} & \infty - \infty \rightsquigarrow \dfrac{0}{0} \\
\varphi^\psi = e^{\psi\ln\varphi} & (\varphi > 0)
\end{array}$$

5 Differentialrechnung S444,446

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = D_x f = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

5.1 Differenzierbarkeit S444,445

Beide f'_+ und f'_- mussen existieren und gleich sein.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_+ \stackrel{!}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_-$$

5.2 Ableitungsregeln S445,450

$$(af)' = af' \qquad (u(v(x)))' = u'(v)v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\sum u_i\right)' = \sum u_i' \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

5.3 Tangente und Normale Funktion

Zur Funktion $f(x)$ im Punkt $(p_x, p_y) = (z, f(z))$

$$t(x) = f'(p_x)(x - p_x) + p_y \qquad n(x) = \frac{p_x - x}{f'(p_x)} + p_y$$

5.4 Schnittwinkel

Der Schnittpunkt $S = (z, f(z)) = (z, g(z))$ findet man mit $f(z) = g(z)$. Der Schnittwinkel ist dann

$$\tan\vartheta = \frac{g'(z) - f'(z)}{1 + f'(z)g'(z)}$$

5.5 Mittlewertsatz (der DR) S454

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (\xi \in (a;b))$$

5.6 Taylor Polynom und Reihe S484

Der Taylor-Polynom approximiert eine Funktion um einen Entwicklungspunkt a.

$$\begin{aligned} T_n(x,a) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Die Restgliede sind

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)} \qquad (\xi \in (x;a))$$

Wenn $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ dann $f(x) \stackrel{!}{=} T(x,a)$, d.h. die Taylor Rehie zu f identisch ist. Sonst berechnet man der *worst case* Fehler $\epsilon \geq |R_n|$ und der dazugehörig $\hat{\xi} = \arg\max_{\xi} |R_n|$:

$$\epsilon = \max |R_n| = \max \left[\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x-a|^{(n+1)} \right]$$

5.7 Fehlerrechnung S862,866 und Fortpflanzung S869

Sei $\mathbf{y}$ eine direkte Messerung von eine Funktion y von x. Ist dann Δy der *absolute* Fehler und δy der *relative* Fehler.

$$\mathbf{y} = y \pm \Delta y = y(1 \pm \delta y)$$

Der Messerungsfehler kann mithilfe von einer lineare Approximation fortgepflanzt werden.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \stackrel{!}{=} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \implies \Delta y \approx y'\Delta x$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{y'\Delta x}{y} = k\delta x$$

6 Integralrechnung S493

6.1 Riemann Itegrierbarkeit S507

Sei f in $[a;b]$ stetig, $x_0 = a, \ldots, x_n = b$ und $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$.

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \Re\mathfrak{i}\{f\} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i}$$

Bedingungen für f: stetig oder monoton oder beschränkt und an höchstens endlich vielen Stellen unstetig.

6.2 Aufwendungen

Flächeninhalt	$A = \int_a^b \lvert f(x) \rvert\,\mathrm{d}x$
Bogenlänge	$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

6.3 Bestimmte Integral S509

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

6.4 Mittlewertsatzt S510

Sei $f(x)$ in $[a;b]$ stetig, dann $\exists \xi \in (a;b) : f(\xi) = \mu$ (Mittelwert).

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi) = \mu \qquad (\xi \in (a,b))$$

6.5 Differenzierbarkeit S509

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

Literatur

[1] `An1E` Vorlesungen an der Hochschule für Technik Rapperswil und der dazugehoerige Skript, *Dr. Bernhard Zgraggen*, Herbstsemester 2019

[2] Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage, 2016 (1977), *Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig*, `ISBN 978-3-8085-5789-1`

Notation

Rot markierte Zahlen wie zB S477 sind Hinweise auf die Seiten in der "Bronstein": "Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage". `ISBN 978-3-8085-5789-1`

License