

1 Ungleichungen S31

Bernoulli	$1 + na \leq (1 + a)^n$
Binomische	$ ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$
Dreiecks	$ a + b \leq a + b $

Mittel ($\forall j : a_j \geq 0, n \in \mathbb{N}$)

$$\text{HM} \leq \text{GM} \leq \text{AM}$$

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right]^{-1} \leq \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_j} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$$

Integral

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

2 Zahlenfolgen und Reihen

2.1 Konvergenz S679

Hinweise: Induktion, Einschließungsprinzip, Bolzano-Weierstrass.

$$\exists g \in \mathbb{R} : g = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n \rangle \iff \langle f_n \rangle \text{ konvergiert}$$

2.2 Divergenz S472

Divergent heißt nicht konvergent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n \rangle = \pm \infty \implies \langle f_n \rangle \text{ divergiert } \textit{bestimmt}$$

$$\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n \rangle \implies \langle f_n \rangle \text{ divergiert}$$

2.3 Binomischer Satz S12

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.4 Folgen S470

Arithmetisch $a_{n+1} = a_n + d \quad d = a_{n+1} - a_n$
 Geometrisch $a_{n+1} = qa_n \quad q = a_{n+1}/a_n$

Monotonie der Folge

$d > 0$	$q > 1$	$\implies \langle a_n \rangle \uparrow$
$d \geq 0$	$q \geq 1$	$\implies \langle a_n \rangle \uparrow$
$d < 0$	$q \in (0; 1)$	$\implies \langle a_n \rangle \downarrow$
$d \leq 0$	$q \in (0; 1]$	$\implies \langle a_n \rangle \downarrow$

2.5 Reihen S20, 477, 1075

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right) (r \neq 1)$$

3 Funktionen S49

$$f : \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{W}_f \quad x \mapsto f(x)$$

3.1 Lineare Transformationen

Seien $\mu, \lambda, \ell, o \geq 0$. Mit < 0 Werte: Streckungen sind Spiegelungen und Verschiebungen sind in Gegenrichtung.

$$\mathfrak{T}\{f\} = \mu f(\lambda x + \ell) + o$$

Wobei $\mu = y$ -Streckung, $\lambda = x$ -Streckung, $\ell =$ Verschiebung nach links, $o =$ Verschiebung nach oben.

3.2 Monotonie S51, 453

Zeichen	Bedeutung	Bedingung ($\forall \varepsilon > 0$)
$f \uparrow$	streng wachsend	$f(x) < f(x + \varepsilon)$
$f \uparrow$	wachsend	$f(x) \leq f(x + \varepsilon)$
$f \downarrow$	streng fallend	$f(x) > f(x + \varepsilon)$
$f \downarrow$	fallend	$f(x) \geq f(x + \varepsilon)$

Monotonie	$f'' \neq 0$	$f^{(n)} \neq 0$ und n gerade
$f \uparrow$	$f' > 0$	$f^{(n-1)} > 0$
$f \uparrow$	$f' \geq 0$	$f^{(n-1)} \geq 0$
$f \downarrow$	$f' < 0$	$f^{(n-1)} < 0$
$f \downarrow$	$f' \leq 0$	$f^{(n-1)} \leq 0$

NB: Gilt auch für Zahlenfolgen ($f(x) \rightsquigarrow f_n, f(x + \varepsilon) \rightsquigarrow f_{n+1}$)

3.3 Symmetrien S52

f	Bedingung	Bedeutung
gerade	$f(-x) = f(x)$	y -Symmetrisch
ungerade	$f(-x) = -f(x)$	Nullpunkt-Symmetrisch
periodisch	$f(x) = f(x \pm p)$	Period $p \in \mathbb{D}_f$

3.4 Beschränktheit S52, 676

Eine Funktion heißt nach unten oder oben beschränkt, wenn ihre Werte nicht größer oder kleiner als eine bestimmte Zahl K bzw. k sind. f ist beschränkt wenn $\exists \sup f \wedge \exists \inf f \iff \forall x : k < f(x) < K$.

$$K = \sup f \iff \exists K \in \mathbb{R} : \forall x : f(x) < K$$

$$k = \inf f \iff \exists k \in \mathbb{R} : \forall x : f(x) > k$$

3.5 Stetigkeit S60

Eine Funktion heißt *stetig* wenn:

$$\forall x \in \mathbb{D}_f : \lim_{u \rightarrow x} f(u) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x)$$

3.6 Nullstellen S40, 47, 48

3.7 Extremstellen S455

3.8 Wendepunkte S256

3.9 Konvexität S253

Auch als Krümmungsverhalten bekannt. Sei $P = (x, f(x))$ und kein Wendepunkt, d.h. $f''(x) \neq 0$.

$$f''(x) > 0 \implies \text{nach oben konkav, streng konvex}$$

$$f''(x) < 0 \implies \text{nach unten konkav, streng konkav}$$

3.10 Wendepunkte S256

3.11 Asymptoten S260

Sei $a(x) = kx + b$ die allgemeine Asymptot von $f(x)$, d.h. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - a(x) = 0$. Dann

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

3.12 Umkehrfunktion S53

Umkehrbarkeit Bedingungen:

$$f^{-1} : \mathbb{W}_f \rightarrow \mathbb{D}_f \quad f(x) \mapsto x \\ \exists f^{-1} \iff (f \downarrow) \vee (f \uparrow)$$

3.13 Polynomen S65

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = \prod_{i=1}^n (x - r_i)$$

Nullstellen S40 (Wurzeln) r_i können mithilfe von Faktorisierung, der Quadratische Formel $r = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$ oder dem Horner-Schema S966 gelöst werden.

$$P_n(x) = (x - u)P_{n-1}(x) + P_n(u)$$

Seien a_i die Koeffizienten von $P_n(x)$, b_i von $P_{n-1}(x)$ und $u \in \mathbb{D}_P$. Wenn $P_n(u) = 0$, dann ist $u = r$ d.h. eine Nullstelle.

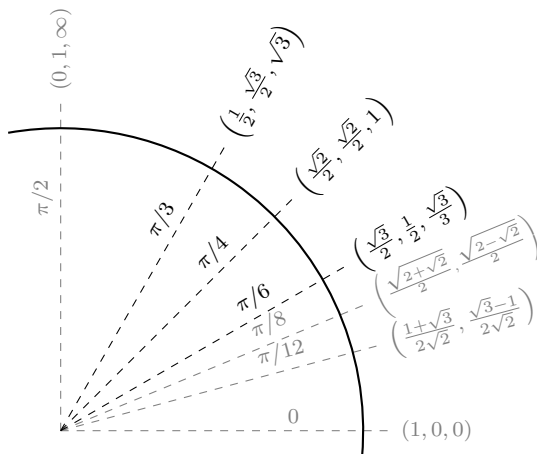
$$\begin{array}{c|ccc|c} \times u & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & + \\ & & ub_{n-1} & \cdots & ub_1 & ub_0 & \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & P_n(u) & \end{array}$$

3.14 Gebrochene Funktionen S14

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{p_m x^m + \cdots + p_0}{q_n x^n + \cdots + q_0}$$

3.14.1 Partialbruchzerlegung S15

3.15 Trigonometrische S77, 80, 147, 165



Definitionen der grundsätzlichen Winkelfunktionen.

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Beziehungen und Identitäten.

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\begin{array}{ll} \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha) & \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \\ \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) & \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) & \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha) & \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \tan(2\alpha) = (2 \tan \alpha) / (1 + \tan^2 \alpha) \end{array}$$

4 Grenzwert S55

Bedingungen für die Existenz einer Grenzwert:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Formell lautet der $\delta - \epsilon$ Kriterium:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall \epsilon > 0 : \exists \delta : |f(x) - g| < \epsilon$$

4.1 Unbestimmte Formen

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

4.2 Einschließungsprinzip S56

Auch als "Sandwich" bekannt. $\forall x : a(x) \leq f(x) \leq b(x)$

$$\exists \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} b(x) = g \right) \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = g$$

NB: gilt auch für folgen a_n, b_n, f_n

4.3 Bolzano-Weierstrass S701

$$\left. \begin{array}{l} \exists \sup f \wedge f \uparrow \\ \exists \inf f \wedge f \downarrow \end{array} \right\} \implies f \text{ konvergiert}$$

4.4 Bemerkenswerte Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{p} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^x q^k = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

4.5 Bernoulli-l'Hôpital'sche Regel S57

Wenn $f(x)/g(x) \rightarrow \pm\infty / \pm\infty$ oder $f/g \rightarrow 0/0$ dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Hinweise:

$$\begin{array}{ll} \varphi \psi = \frac{\varphi}{\psi^{-1}} = \frac{\psi}{\varphi^{-1}} & 0 \cdot \infty \rightsquigarrow \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \\ \varphi - \psi = \frac{\psi^{-1} - \varphi^{-1}}{(\varphi \psi)^{-1}} & \infty - \infty \rightsquigarrow \frac{0}{0} \\ \varphi^\psi = e^{\psi \ln \varphi} & (\varphi > 0) \end{array}$$

5 Differentialrechnung S444, 446

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = D_x f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

5.1 Differenzierbarkeit S444, 445

Beide f'_+ und f'_- müssen existieren und gleich sein.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'_+ \stackrel{!}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'_-$$

5.2 Ableitungsregeln S445, 450

$$\begin{aligned} (af)' &= af' & (u(v(x)))' &= u'(v)v' \\ (uv)' &= u'v + uv' & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ \left(\sum u_i\right)' &= \sum u_i' & (\ln u)' &= \frac{u'}{u} \\ (f^{-1})' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \end{aligned}$$

5.3 Tangente und Normale Funktion

Zur Funktion $f(x)$ im Punkt $(p_x, p_y) = (z, f(z))$

$$t(x) = f'(p_x)(x - p_x) + p_y \quad n(x) = \frac{p_x - x}{f'(p_x)} + p_y$$

5.4 Schnittwinkel

Der Schnittpunkt $S = (z, f(z)) = (z, g(z))$ findet man mit $f(z) = g(z)$. Der Schnittwinkel ist dann

$$\tan \vartheta = \frac{g'(z) - f'(z)}{1 + f'(z)g'(z)}$$

5.5 Mittelwertsatz (der DR) S454

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\xi \in (a; b))$$

5.6 Taylor Polynom und Reihe S484

Der Taylor-Polynom approximiert eine Funktion um einen Entwicklungspunkt a .

$$\begin{aligned} T_n(x, a) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a)^1 + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots \end{aligned}$$

Die Restglieder sind

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{(n+1)} \quad (\xi \in (x; a))$$

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ dann $f(x) \stackrel{!}{=} T(x, a)$, d.h. die Taylor Reihe zu f identisch ist. Sonst berechnet man der *worst case* Fehler $\epsilon \geq |R_n|$ und der dazugehörig $\hat{\xi} = \arg \max_{\xi} |R_n|$:

$$\epsilon = \max |R_n| = \max \left[\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - a|^{(n+1)} \right]$$

5.7 Fehlerrechnung S862, 866 und Fortpflanzung S869

Sei y eine direkte Messung von eine Funktion y von x . Ist dann Δy der *absolute* Fehler und δy der *relative* Fehler.

$$y = y \pm \Delta y = y(1 \pm \delta y)$$

Der Messungsfehler kann mithilfe von einer lineare Approximation fortgepflanzt werden.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &\stackrel{!}{=} \frac{dy}{dx} \implies \Delta y \approx y' \Delta x \\ \delta y &= \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{y' \Delta x}{y} = k \delta x \end{aligned}$$

6 Integralrechnung S493

6.1 Riemann Itegrierbarkeit S507

Sei f in $[a; b]$ stetig, $x_0 = a, \dots, x_n = b$ und $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$.

$$\int_b^a f(x) dx = \mathfrak{Ri}\{f\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i}$$

Bedingungen für f : stetig oder monoton oder beschränkt und an höchstens endlich vielen Stellen unstetig.

6.2 Aufwendungen

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt} & \quad A = \int_a^b |f(x)| dx \\ \text{Bogenlänge} & \quad \ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \end{aligned}$$

6.3 Bestimmte Integral S509

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= F(b) - F(a) \\ \int_a^b f(t) dt &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^b f(t) dt \end{aligned}$$

6.4 Mittelwertsatz S510

Sei $f(x)$ in $[a; b]$ stetig, dann $\exists \xi \in (a; b) : f(\xi) = \mu$ (Mittelwert).

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(\xi) = \mu \quad (\xi \in (a, b))$$

6.5 Differenzierbarkeit S509

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int f(t) dt &= f(x) \\ \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt &= f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \end{aligned}$$

Literatur

- [1] An1E Vorlesungen an der Hochschule für Technik Rapperswil und der dazugehoerige Skript, *Dr. Bernhard Zraggen*, Herbstsemester 2019
- [2] Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage, 2016 (1977), *Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig*, ISBN 978-3-8085-5789-1

Notation

Rot markierte Zahlen wie zB S477 sind Hinweise auf die Seiten in der "Bronstein": "Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage". ISBN 978-3-8085-5789-1

License

An1E-ZF (c) by Naoki Pross

An1E-ZF is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 Unported License.

You should have received a copy of the license along with this work. If not, see

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>