

1 Integration S493, 507

1.1 Tricks S495

Linearität S495

$$\int k(u+v) = k \left(\int u + \int v \right)$$

Partialbruchzerlegung S15, 498

$$\int \frac{f(x)}{P_n(x)} dx = \sum_{k=1}^n \int \frac{A_k}{x-r_k} dx$$

Elementartransformation S496

$$\int f(\lambda x + \ell) dx = \frac{1}{\lambda} F(\lambda x + \ell) + C$$

Partielle Integration S497

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Potenzregel S496

$$\int u^n \cdot u' = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

Logarithmusregel S496

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + C$$

Allgemeine Substitution S497

$x = g(u)$, und $dx = g'(u) du$

$$\int f(x) dx = \int (f \circ g) g' du = \int \frac{f \circ g}{(g^{-1})' \circ g} du$$

Universalsubstitution S504

$$\begin{aligned} t = \tan(x/2) & \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2 dt}{1+t^2} & \quad \cos(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

Womit

$$\int f(\sin(x), \cos(x), \tan(x)) dx = \int g(t) dt$$

1.2 Uneigentliches Integral S520

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f dx &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f dx \\ \int_{-\infty}^b f dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f dx \\ \int_{-\infty}^\infty f dx &= \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_A^B f dx \end{aligned}$$

Wenn f im Punkt $u \in (a, b)$ nicht definiert ist.

$$\int_a^b f dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^{u-\epsilon} f dx + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{u+\delta}^b f dx \quad (1.2.1)$$

1.3 Cauchy Hauptwert S523

Der C.H. (oder PV für *Principal Value* auf Englisch) eines uneigentlichen Integrals ist der Wert, wenn in einem Integral wie (1.2.1) beide Grenzwerte mit der gleichen Geschwindigkeit gegen 0 sterben.

$$\text{C.H.} \int_a^b f dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{u-\epsilon} f dx + \int_{u+\epsilon}^b f dx \right)$$

Zum Beispiel x^{-1} ist nicht über \mathbb{R} integrierbar, wegen des Poles bei 0. Aber intuitiv wie die Symmetrie vorschlägt

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x} dx = 0$$

1.4 Majorant-, Minorantenprinzip und Konvergenzkriterien S521, 473, 479, 481

Gilt für die Funktionen $0 < f(x) \leq g(x)$ mit $x \in [a, \infty)$

$$\text{konvergiert} \int_a^\infty g dx \implies \text{konvergiert} \int_a^\infty f dx$$

Die selbe gilt umgekehrt für Divergenz. Wenn $0 < h(x) \leq f(x)$

$$\text{divergiert} \int_a^\infty h dx \implies \text{divergiert} \int_a^\infty f dx$$

g und h heißen Majorant und Minorant bzw.

2 Implizite Ableitung S448

$$\begin{aligned} (af)' &= af' & (u(v(x)))' &= u'(v)v' \\ (uv)' &= u'v + uv' & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ \left(\sum u_i\right)' &= \sum u_i' & (\ln u)' &= \frac{u'}{u} \\ (f^{-1})' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \end{aligned}$$

Alle normale differenzierungsregeln für $f(x)$ gelten. Allgemeiner für die implizite Funktion $F(x, y) = 0$

$$dy = y' dx \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

3 Differentialgeometrie

3.1 Ebene Kurven S250

3.1.1 Darstellungen und Umwandlung

Sei $\Lambda : x = \phi(t), y = \psi(t), t \in I$ eine glatte Jordankurve. Beispiel im Abb. 1.

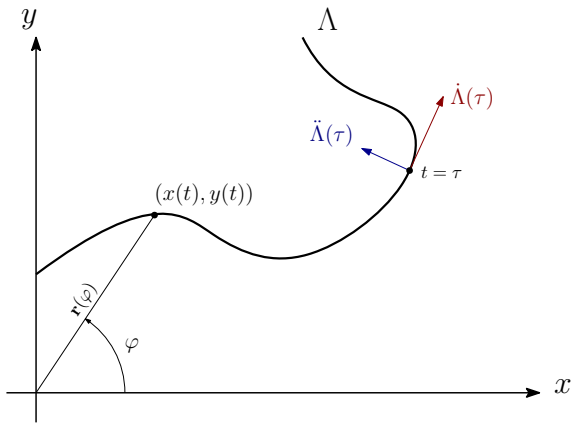


Abbildung 1: Die ebene Kurve $\Lambda(t)$ kann Explizit $y(x)$ (in diesem Fall nicht), Implizit $\mathbf{u}(x, y) = 0$, Polar $\mathbf{r}(\varphi)$ oder in Parameterform $(x(t), y(t))$ dargestellt werden.

Polar zu Kartesien

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \varphi = y/x$$

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

Parametrisch zu explizit Sei $\dot{\phi} \neq 0$ oder $\dot{\psi} \neq 0$. Im Falle $\dot{\phi} \neq 0$, wechselt $\dot{\phi}$ in der Umgebung von t das Vorzeichen nicht, ϕ ist dort streng monoton. Daher gilt

$$t = \phi^{-1}(x) \quad y = \psi(t) = \psi \circ \phi^{-1}(x) = f(x)$$

Wenn $\dot{\psi} \neq 0$ ist dann $x = \phi \circ \psi^{-1}(y)$

3.1.2 Bogenlänge S251, 514

Weitere Formeln (z.B. polar) findet man in Tab. 1.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \, dx = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{c}| \, dt$$

3.1.3 Umparametrisierung nach Bogenlänge

Sei die Kurve $\Lambda(t), t \in I$ mindestens einmal differenzierbar, und ℓ die Bogenlänge (gemäß §3.1.2) im Intervall. Die Umparametrisierung $\Lambda(s)$ ist dann

$$s = \ell t \implies \Lambda(s) = \Lambda(t/\ell)$$

Die neue Parametrisierung hat $\Lambda' = 1$ (nach s differenziert), d.h. die erste Ableitung ist der tangent Einheitsvector!

3.1.4 Tangente und Normalenvektor S251, 252

Für eine ebene Kurve $\Lambda(t), t \in I$, der Vektor $\dot{\Lambda}(\tau)$ ist immer an $\Lambda(\tau)$ tangential. $\ddot{\Lambda}(\tau)$ ist zur Kurve normal.

$$\dot{\Lambda} = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

$$\ddot{\Lambda} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Man kann auch die Tangentengleichung und die Normalengleichung zur Zeitpunkt τ finden

$$T: y - \psi(\tau) = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}}(x - \phi(\tau))$$

$$N: y - \psi(\tau) = -\frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}}(x - \phi(\tau))$$

3.1.5 Krümmung und Krümmungsradius S254

Siehe Tab. 1 für die Rechnungsformeln und Abb. 2 für eine graphische Deutung.

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \quad R = 1/\kappa$$

Eine gerade hat $\kappa = 0$ und $R = \infty$. Entsprechend der Orientierung der x -Achse, entspricht einer $\kappa > 0$ eine Linkskrümmung und $\kappa < 0$ eine Rechtskrümmung.

Der Krümmungskreis hat Maßzahl $\rho = 1/|\kappa|$ und Mittelpunkt P_c gemäß

$$P_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa} \hat{\mathbf{n}}$$

Wobei $\hat{\mathbf{n}} = \ddot{\Lambda}^0$ ist der Normalenvektor.

3.1.6 Konvexität

Sei die Kurve Λ durch $f \in C^2$ auf $[a, b]$ gegeben.

- f ist auf (a, b) konvex (bzw. konkav), wenn $\kappa \geq 0$ (bzw. $\kappa \leq 0$) $\forall x \in (a, b)$.
- f ist auf (a, b) streng konvex (bzw. konkav), wenn $\kappa > 0$ (bzw. $\kappa < 0$) $\forall x \in (a, b)$.
- Hat in Λ in P einen Wendepunkt, dann $\kappa(P) = 0$.

3.1.7 Evoluten und Evolventen S262

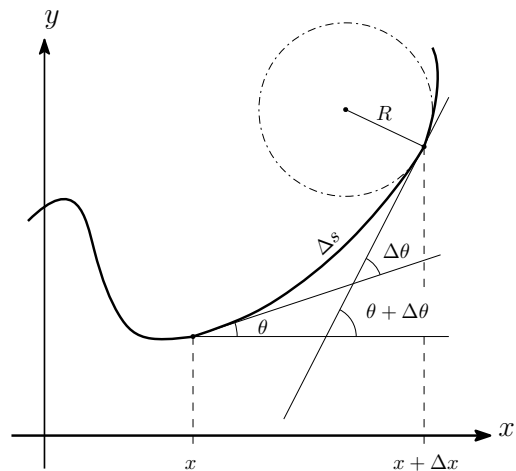


Abbildung 2: Krümmung und Krümmungsradien

3.2 Raumkurven S263

3.3 Kurven 2. Ordnung – Kegelschnitt

S212

Die Polarform für die allgemeine Gleichung der Kurve 2. Ordnung ist

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (3.3.1)$$

Der Parameter ε ändert die Gestalt folgendermaßen

- $\varepsilon = 0$ Kreis
- $\varepsilon = 1$ Parabel
- $\varepsilon \in (0; 1)$ Ellipse
- $\varepsilon > 1$ Hyperbel

3.3.1 Kreis S204

Kartesisch $(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = r^2$
Parameter $x = c_x + R \cos t$ $y = c_y + R \sin t$

3.3.2 Ellipse S205

Kartesisch $\left(\frac{x - C_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - C_y}{b}\right)^2 = 1$

Parameter $x = a \cos t$ $y = b \sin t$

3.3.3 Hyperbel S207

Kartesisch $\left(\frac{x - C_x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - C_y}{b}\right)^2 = 1$

Parameter $x = a \cosh t$ $y = b \sinh t$

3.3.4 Parabel S210

Kartesisch $y = ax^2 + bx + c$
Parameter $x = t$ $y = at^2 + bt + c$

3.4 Kurven 4. Ordnung S98

Kardioide / Herzkurve S99, 100

$$r = a(1 + \cos \varphi)$$

Lemniskate S101

$$r = a\sqrt{2 \cos(2\varphi)}$$

4 Reihen

4.1 Bemerkenswerte Reihen S19, 477

Arithmetische Reihe Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann aus der arithmetischen Folge $\langle a_k \rangle$ mit $a_k = a_1 + (k-1)d$ erhält man die Reihe $\langle A_n \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + \sum_{k=1}^n (k-1)d = a_1 + d + 2d + \dots + (n-1)d \\ &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

Geometrische Reihe Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Aus der geometrischen Folge $\langle a_k \rangle$ mit $a_k = a_1 q^k$ erhält man die Reihe $\langle G_n \rangle$ mit:

$$G_n = a_1 \sum_{k=1}^n q^{k-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Harmonische Reihe Aus der Folge $\langle a_k \rangle$ mit $a_k = 1/k$ erhält man die Reihe $\langle H_n \rangle$ mit:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

4.2 Unendlichen S470, 477

4.2.1 Konvergenzkriterien S472

Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge die Reihe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Cauchy'sches S475

Wurzelkriterium von Cauchy S474

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \alpha < 1 \implies \text{konvergent}$$

Quotientenkriterium von d'Alambert S474

Leibniz'sches S476

Integralkriterium S475 Sei $f(x) \geq 0$, $x \in [1; \infty)$ und $f \downarrow$. Merkt man dass:

$$S = \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq \int_2^n f(x-1) dx = S$$

Somit folgt:

$$\text{konvergiert } \int_1^{\infty} f(x) dx \implies \text{konvergiert } s$$

Literatur

- [1] An2E Vorlesungen an der Hochschule für Technik Rapperswil und der dazugehörige Skript, Dr. Bernhard Zraggen, Frühlingsemester 2020
- [2] Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage, 2016 (1977), Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig, ISBN 978-3-8085-5789-1
- [3] Mathematik 2: Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, 2012, 7. Auflage, XII, Springer Berlin, Albert Fetzer, Heiner Fränkel, ISBN-10 364224114X, ISBN-13 9783642241147

Notation

Rot markierte Zahlen wie zB **S477** sind Hinweise auf die Seiten im “Bronstein” [2]

- C^n ist der Menge der glatten n -mal differenzierbaren Funktionen.
- Das Zeichen \forall bedeutet “für alle”

License

An2E-ZF (c) by Naoki Pross

An2E-ZF is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 Unported License.

You should have received a copy of the license along with this work. If not, see

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Tabelle 1: Rechnungen bez. ebene Kurven

Ebene Kurven	Kartesisch $y = f(x)$	Polar $r(\varphi)$	Parameter $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$
Anstieg S448	f'	$\frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$	\dot{x}/\dot{y}
Fläche S493	$\int_a^b f(x) dx$	$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 d\varphi$	$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} xy - \dot{x}y dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \det(\dot{\mathbf{c}}, \dot{\mathbf{c}}) dt$
Bogenlänge S251, 514	$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx$	$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi$	$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{c}} dt$
Krümmung κ S254	$\frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}^3}$	$\frac{2(r')^2 - rr'' + r^2}{\sqrt{r^2 + (r')^2}^3}$	$\frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3} = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})}{ \dot{\mathbf{c}} ^3}$
Rotationsvolumen um x S516	$\pi \left \int_a^b y^2 dx \right $	$\pi \left \int_{t_0}^{t_1} y \dot{x} dt \right $	$\pi \left \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \sin^2 \varphi (r' \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi \right $
Rotationsoberfläche um x S515	$2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$	$2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin(\varphi) \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi$	$2\pi \int_{t_0}^{t_1} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$