1 Integration S493,507

1.1 Tricks S495

Linearität S495

$$\int k(u+v) = k\left(\int u + \int v\right)$$

Partialbruchzerlegung S15,498

$$\int \frac{f(x)}{P_n(x)}\ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int \frac{A_k}{x-r_k}\ \mathrm{d}x$$

Elementartransformation S496

$$\int f(\lambda x + \ell)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} F(\lambda x + \ell) + C$$

Partielle Integration S497

$$\int u\ \mathrm{d}v = uv - \int v\ \mathrm{d}u$$

Potenzenregel S496

$$\int u^n \cdot u' = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Logaritmusregel S496

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + C$$

Allgemeine Substutution S497
$x = g(u)$, und $\mathrm{d}x = g'(u)\ \mathrm{d}u$

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int (f \circ g)\ g'\ \mathrm{d}u = \int \frac{f \circ g}{(g^{-1})' \circ g}\ \mathrm{d}u$$

Universalsubstitution S504

$$t = \tan(x/2) \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \cos(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Womit

$$\int f(\sin(x), \cos(x), \tan(x))\ \mathrm{d}x = \int g(t)\ \mathrm{d}t$$

1.2 Uneigentliches Integral S520

$$\int_a^\infty f\ \mathrm{d}x = \lim_{B\to\infty} \int_a^B f\ \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^b f\ \mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f\ \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^\infty f\ \mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_A^B f\ \mathrm{d}x$$

Wenn f im Punkt $u \in (a,b)$ nicht definiert ist.

$$\int_a^b f\ \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0} \int_a^{u-\epsilon} f\ \mathrm{d}x + \lim_{\delta\to+0} \int_{u+\delta}^b f\ \mathrm{d}x \tag{1.2.1}$$

1.3 Cauchy Hauptwert S523

Der C.H. (oder PV für *Principal Value* auf Englisch) eines uneigentlichen Integrals ist der Wert, wenn in einem Integral wie (1.2.1) beide Grenzwerte mit der gleiche Geschwindigkeit gegen 0 sterben.

$$\text{C.H.} \int_a^b f\ \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0} \left(\int_a^{u-\epsilon} f\ \mathrm{d}x + \int_{u+\epsilon}^b f\ \mathrm{d}x \right)$$

Zum Beispiel x^{-1} ist nicht über $\mathbb{R}$ integrierbar, wegen des Poles bei 0. Aber intuitiv wie die Symmetrie vorschlagt

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = 0$$

1.4 Majorant-, Minorantenprinzip und Konvergenzkriterien S521,473,479,481

Gilt für die Funktionen $0 < f(x) \leq g(x)$ mit $x \in [a, \infty)$

$$\text{konvergiert} \int_a^\infty g\ \mathrm{d}x \implies \text{konvergiert} \int_a^\infty f\ \mathrm{d}x$$

Die selbe gilt umgekehrt für Divergenz. Wenn $0 < h(x) \leq f(x)$

$$\text{divergiert} \int_a^\infty h\ \mathrm{d}x \implies \text{divergiert} \int_a^\infty f\ \mathrm{d}x$$

g und h heißen Majorant und Minorant bzw.

2 Implizite Ableitung S448

$$(af)' = af' \qquad (u(v(x)))' = u'(v)v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\sum u_i\right)' = \sum u_i' \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Alle normale differenziazionsregeln für $f(x)$ gelten. Allgemeiner für die implizite Funktion $F(x,y) = 0$

$$\mathrm{d}y = y'\ \mathrm{d}x \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

3 Differentialgeometrie

3.1 Ebene Kurven S250

3.1.1 Darstellungen und Umwanldung

Sei $\Lambda : x = \phi(t),\ y = \psi(t), t \in I$ eine glatte Jordankurve. Beispiel im Abb. 1.

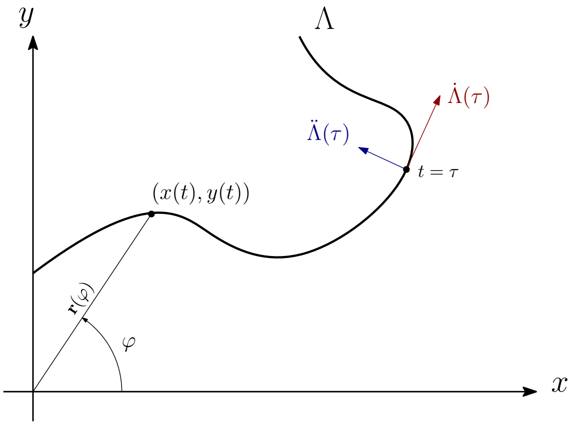

Abbildung 1: Die ebene Kurve $\mathbf{\Lambda}(t)$ kann Explizit $y(x)$ (in diesem Fall nicht), Implizit $\boldsymbol{u}(x,y)=0$, Polar $\boldsymbol{r}(\varphi)$ oder in Parameterform $(x(t), y(t))$ dargestellt werden.

Polar zu Kartesian

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan\varphi = y/x$$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Parametrisch zu explizit Sei $\dot{\phi}\neq 0$ oder $\dot{\psi}\neq 0$. Im Falle $\dot{\phi}\neq 0$, wechselt $\dot{\phi}$ in der Umgebung von t das Vorzeichen nicht, ϕ ist dort streng monoton. Daher gilt

$$t=\phi^{-1}(x) \quad y=\psi(t)=\psi\circ\phi^{-1}(x)=f(x)$$

Wenn $\dot{\psi}\neq 0$ ist dann $x=\phi\circ\psi^{-1}(y)$

3.1.2 Bogenlänge S251,514

Weitere Formeln (z.B. polar) findet man in Tab. 1.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\,\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{c}}|\,\mathrm{d}t$$

3.1.3 Umparametrisierung nach Bogenlänge

Sei die Kurve $\mathbf{\Lambda}(t), t\in I$ mindestens einmal differenzierbar, und ℓ die Bogenlänge (gemäß §3.1.2) im Intervall. Die Umparametrisierung $\mathbf{\Lambda}(s)$ ist dann

$$s=\ell t \implies \mathbf{\Lambda}(s)=\mathbf{\Lambda}(t/\ell)$$

Die neue Parametrisierung hat $\mathbf{\Lambda}'=1$ (nach s differenziert), d.h. die erste Ableitung ist der tangent Einheitsvector!

3.1.4 Tangente und Normalvektor S251,252

Für eine ebene Kurve $\mathbf{\Lambda}(t)$ $\tau, t\in I$, der Vektor $\dot{\mathbf{\Lambda}}(\tau)$ ist immer an $\mathbf{\Lambda}(\tau)$ tangent. $\ddot{\mathbf{\Lambda}}(\tau)$ ist zur Kurve normal.

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

$$\ddot{\mathbf{\Lambda}} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

Man kann auch die Tangentengleichung und die Normalengleichung zur Zeitpunkt τ finden

$$T: y-\psi(\tau) = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}}(x-\phi(\tau))$$

$$N: y-\psi(\tau) = -\frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}}(x-\phi(\tau))$$

3.1.5 Krümmung und Krümmungsradius S254

Siehe Tab. 1 für die Rechnungsformeln und Abb. 2 für eine graphische Deutung.

$$\kappa = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \qquad R = 1/\kappa$$

Eine gerade hat $\kappa=0$ und $R=\infty$. Entsprechend der Orientierung der x-Achse, entspricht einer $\kappa>0$ eine Linkskrümmung und $\kappa<0$ eine Rechtskrümmung.

Der Krümmungskreis hat Maßzahl $\rho = 1/|\kappa|$ und Mittelpunkt P_c gemäß

$$P_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa}\hat{\boldsymbol{n}}$$

Wobei $\hat{\boldsymbol{n}} = \ddot{\mathbf{\Lambda}}^0$ ist der Normalvektor.

3.1.6 Konvexität

Sei die Kurve Λ durch $f\in C^2$ auf $[a,b]$ gegeben.

- f ist auf (a,b) konvex (bzw. konkav), wenn $\kappa\geq 0$ (bzw. $\kappa\leq 0$) $\forall x\in(a,b)$.
- f ist auf (a,b) streng konvex (bzw. konkav), wenn $\kappa>0$ (bzw. $\kappa<0$) $\forall x\in(a,b)$.
- Hat in Λ in P einen Wendepunkt, dann $\kappa(P)=0$.

3.1.7 Evoluten und Evolventen S262

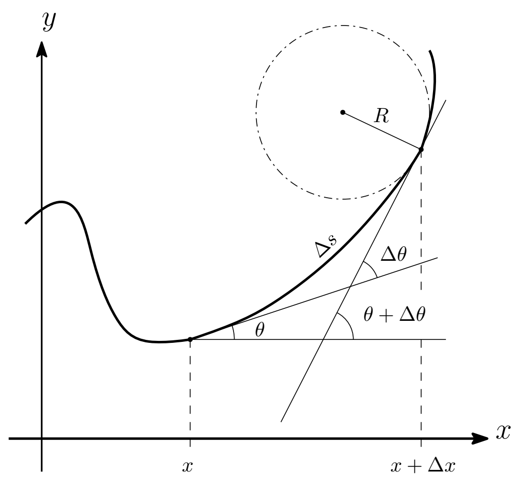

Abbildung 2: Krümmung und Krümmungskreisradien

3.2 Raumkurven S263

Literatur

[1] An2E Vorlesungen an der Hochschule für Technik Rapperswil und der dazugehörige Skript, *Dr. Bernhard Zgraggen*, Frühlingssemester 2020

[2] Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage, 2016 (1977), *Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig*, ISBN 978-3-8085-5789-1

[3] Mathematik 2: Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, 2012, 7. Auflage, XII, Springer Berlin, *Albert Fetzer, Heiner Fränkel*, ISBN-10 364224114X, ISBN-13 9783642241147

Notation

Rot markierte Zahlen wie zB S477 sind Hinweise auf die Seiten im "Bronstein" [2]

- C^n ist der Menge der glatten n-mal differenzierbären Funktionen.
- Das Zeichen $\forall$ bedeutet "für alle"

License

Tabelle 1: Rechnungen bez. ebene Kurven

Ebene Kurven	**Kartesich** $y = f(x)$	**Polar** $\boldsymbol{r}(\varphi)$	**Parameter** $\boldsymbol{c}(t) = (x(t), y(y))$
Anstieg S448	f'	$\frac{r' \sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$	$\dot{x}/\dot{y}$
Fläche S493	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert \, \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\varphi)^2 \, \mathrm{d}\varphi$	$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} x\dot{y} - \dot{x}y \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \det(\boldsymbol{c}, \dot{\boldsymbol{c}}) \, \mathrm{d}t$
Bogenlänge S251,514	$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \, \mathrm{d}x$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2} \, \mathrm{d}\varphi$	$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \lvert\dot{\boldsymbol{c}}\rvert \, \mathrm{d}t$
Krümmung κ S254	$\frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}^3}$	$\frac{2(r')^2 - rr'' + r^2}{\sqrt{r^2 + (r')^2}^3}$	$\frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3} = \frac{\det(\dot{\boldsymbol{c}}, \ddot{\boldsymbol{c}})}{\lvert\dot{\boldsymbol{c}}\rvert^3}$
Rotationsvolumen um x S516	$\pi \left\lvert \int_a^b y^2 \, \mathrm{d}x \right\rvert$	$\pi \left\lvert \int_{t_0}^{t_1} y\dot{x} \, \mathrm{d}t \right\rvert$	$\pi \left\lvert \int_\alpha^\beta r^2 \sin^2\varphi (r'\cos\varphi - r\sin\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \right\rvert$
Rotationsoberfläche um x S515	$2\pi \int_a^b \lvert y\rvert \sqrt{1 + (y')^2} \, \mathrm{d}x$	$2\pi \int_\alpha^\beta \lvert r\sin(\varphi)\rvert \sqrt{(r')^2 + r^2} \, \mathrm{d}\varphi$	$2\pi \int_{t_0}^{t_1} \lvert y\rvert \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t$