1 Integration S493,507

1.1 Tricks S495

Linearität S495

$$\int k(u+v) = k\left(\int u + \int v\right)$$

Partialbruchzerlegung S15,498

$$\int \frac{f(x)}{P_n(x)}\ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int \frac{A_k}{x - r_k}\ \mathrm{d}x$$

Elementartransformation S496

$$\int f(\lambda x + \ell)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} F(\lambda x + \ell) + C$$

Partielle Integration S497

$$\int u\ \mathrm{d}v = uv - \int v\ \mathrm{d}u$$

Potenzenregel S496

$$\int u^n \cdot u' = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Logaritmusregel S496

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + C$$

Allgemeine Substutution S497
$x = g(u)$, und $\mathrm{d}x = g'(u)\ \mathrm{d}u$

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int (f \circ g)\ g'\ \mathrm{d}u = \int \frac{f \circ g}{(g^{-1})' \circ g}\ \mathrm{d}u$$

Universalsubstitution S504

$$t = \tan(x/2) \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \cos(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Womit

$$\int f(\sin(x), \cos(x), \tan(x))\ \mathrm{d}x = \int g(t)\ \mathrm{d}t$$

1.2 Uneigentliches Integral S520

$$\int_a^\infty f\ \mathrm{d}x = \lim_{B\to\infty} \int_a^B f\ \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^b f\ \mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f\ \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^\infty f\ \mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_A^B f\ \mathrm{d}x$$

Wenn f im Punkt $u \in (a,b)$ nicht definiert ist.

$$\int_a^b f\ \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0} \int_a^{u-\epsilon} f\ \mathrm{d}x + \lim_{\delta\to+0} \int_{u+\delta}^b f\ \mathrm{d}x \qquad (1.2.1)$$

1.3 Cauchy Hauptwert S523

Der C.H. (oder PV für *Principal Value* auf Englisch) eines uneigentlichen Integrals ist der Wert, wenn in einem Integral wie (1.2.1) beide Grenzwerte mit der gleiche Geschwindigkeit gegen 0 sterben.

$$\text{C.H.} \int_a^b f\ \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0} \left(\int_a^{u-\epsilon} f\ \mathrm{d}x + \int_{u+\epsilon}^b f\ \mathrm{d}x \right)$$

Zum Beispiel x^{-1} ist nicht über $\mathbb{R}$ integrierbar, wegen des Poles bei 0. Aber intuitiv wie die Symmetrie vorschlagt

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = 0$$

1.4 Majorant-, Minorantenprinzip und Konvergenzkriterien S521,473,479,481

Gilt für die Funktionen $0 < f(x) \leq g(x)$ mit $x \in [a, \infty)$

$$\text{konvergiert} \int_a^\infty g\ \mathrm{d}x \implies \text{konvergiert} \int_a^\infty f\ \mathrm{d}x$$

Die selbe gilt umgekehrt für Divergenz. Wenn $0 < h(x) \leq f(x)$

$$\text{divergiert} \int_a^\infty h\ \mathrm{d}x \implies \text{divergiert} \int_a^\infty f\ \mathrm{d}x$$

g und h heißen Majorant und Minorant bzw.

2 Implizite Ableitung S448

Alle normale differenziazionsregeln gelten.

$$\mathrm{d}y = y'\ \mathrm{d}x$$

3 Ebene S250 und Raumkurven S263

Ebene Kurven	Explizit	Polar	Parameter
Bogenlänge S251	$\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2+r^2}\,\mathrm{d}\varphi$	$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \lvert\boldsymbol{c}\rvert\,\mathrm{d}t$
Fläche	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi$	$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} x\dot{y}-\dot{x}y\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \det(\boldsymbol{c},\dot{\boldsymbol{c}})\,\mathrm{d}t$
Rotationsvolumen um x	$\pi\left\lvert\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x\right\rvert$	$\pi\left\lvert\int_{t_0}^{t_1} y\dot{x}\,\mathrm{d}t\right\rvert$	$\pi\left\lvert\int_\alpha^\beta r^2\sin^2\varphi(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right\rvert$
Rotationsoberfläche um x	$2\pi\int_a^b \lvert y\rvert\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$	$2\pi\int_\alpha^\beta \lvert r\sin(\varphi)\rvert\sqrt{(r')^2+r^2}\,\mathrm{d}\varphi$	$2\pi\int_{t_0}^{t_1} \lvert y\rvert\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$

3.1 Krümmung

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\ddot{y}}{(1+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

$$\det(\dot{\boldsymbol{c}},\ddot{\boldsymbol{c}})\,\lvert\boldsymbol{c}\rvert^{-3} \quad \overset{\text{3D}}{=} \quad \lvert\dot{\boldsymbol{c}}\times\ddot{\boldsymbol{c}}\rvert\,\lvert\boldsymbol{c}\rvert^{-3}$$

License