1 Integration S493,507

1.1 Tricks S495

Linearität S495

$$\int k(u+v) = k\left(\int u + \int v\right)$$

Partialbruchzerlegung S15,498

$$\int \frac{f(x)}{P_n(x)}\ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int \frac{A_k}{x-r_k}\ \mathrm{d}x$$

Elementartransformation S496

$$\int f(\lambda x + \ell)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} F(\lambda x + \ell) + C$$

Partielle Integration S497

$$\int u\ \mathrm{d}v = uv - \int v\ \mathrm{d}u$$

Potenzenregel S496

$$\int u^n \cdot u' = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Logaritmusregel S496

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + C$$

Allgemeine Substutution S497
$x = g(u)$, und $\mathrm{d}x = g'(u)\ \mathrm{d}u$

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int (f \circ g)\ g'\ \mathrm{d}u = \int \frac{f \circ g}{(g^{-1})' \circ g}\ \mathrm{d}u$$

Universalsubstitution S504

$$t = \tan(x/2) \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \cos(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Womit

$$\int f(\sin(x), \cos(x), \tan(x))\ \mathrm{d}x = \int g(t)\ \mathrm{d}t$$

1.2 Uneigentliches Integral S520

$$\int_a^\infty f\ \mathrm{d}x = \lim_{B\to\infty} \int_a^B f\ \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^b f\ \mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f\ \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^\infty f\ \mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_A^B f\ \mathrm{d}x$$

Wenn f im Punkt $u \in (a,b)$ nicht definiert ist.

$$\int_a^b f\ \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0} \int_a^{u-\epsilon} f\ \mathrm{d}x + \lim_{\delta\to+0} \int_{u+\delta}^b f\ \mathrm{d}x \qquad (1.2.1)$$

1.3 Cauchy Hauptwert S523

Der C.H. (oder PV für *Principal Value* auf Englisch) eines uneigentlichen Integrals ist der Wert, wenn in einem Integral wie (1.2.1) beide Grenzwerte mit der gleiche Geschwindigkeit gegen 0 sterben.

$$\text{C.H.} \int_a^b f\ \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0} \left(\int_a^{u-\epsilon} f\ \mathrm{d}x + \int_{u+\epsilon}^b f\ \mathrm{d}x \right)$$

Zum Beispiel x^{-1} ist nicht über $\mathbb{R}$ integrierbar, wegen des Poles bei 0. Aber intuitiv wie die Symmetrie vorschlagt

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = 0$$

1.4 Majorant-, Minorantenprinzip und Konvergenzkriterien S521,473,479,481

Gilt für die Funktionen $0 < f(x) \leq g(x)$ mit $x \in [a, \infty)$

$$\text{konvergiert} \int_a^\infty g\ \mathrm{d}x \implies \text{konvergiert} \int_a^\infty f\ \mathrm{d}x$$

Die selbe gilt umgekehrt für Divergenz. Wenn $0 < h(x) \leq f(x)$

$$\text{divergiert} \int_a^\infty h\ \mathrm{d}x \implies \text{divergiert} \int_a^\infty f\ \mathrm{d}x$$

g und h heißen Majorant und Minorant bzw.

2 Implizite Ableitung S448

Alle normale differenziazionsregeln gelten.

$$\mathrm{d}y = y'\ \mathrm{d}x$$

3 Differentialgeometrie

3.1 Ebene S250 Kurven

3.1.1 Darstellungen und Umwanldung

Sei $\Lambda : x = \phi(t),\ y = \psi(t), t \in I$ eine glatte Jordankurve. Beispiel im Abb. 1.

Polar zu Kartesian

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = y/x$$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Parametrisch zu explizit Sei $\dot\phi \neq 0$ oder $\dot\psi \neq 0$. Im Falle $\dot\phi \neq 0$, wechselt $\dot\phi$ in der Umgebung von t das Vorzeichen nicht, ϕ ist dort streng monoton. Daher gilt

$$t = \phi^{-1}(x) \quad y = \psi(t) = \psi \circ \phi^{-1}(x) = f(x)$$

Wenn $\dot\psi \neq 0$ ist dann $x = \phi \circ \psi^{-1}(y)$

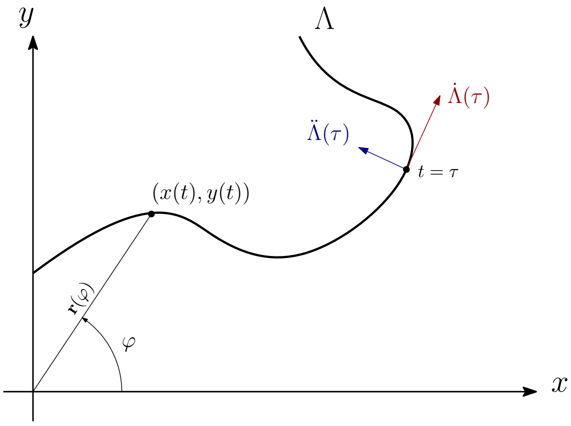

Abbildung 1: Die ebene Kurve $\mathbf{\Lambda}(t)$ kann Explizit $y(x)$ (in diesem Fall nicht), Implizit $\boldsymbol{u}(x, y) = 0$, Polar $\boldsymbol{r}(\varphi)$ oder in Parameterform $(x(t), y(t))$ dargestellt werden.

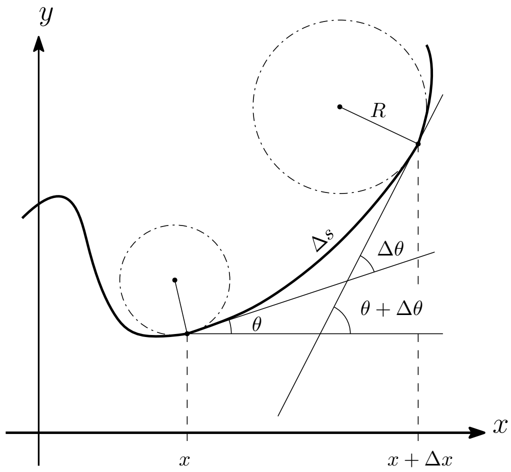

Abbildung 2: Krümmung und Krümmungskreisradien

3.1.2 Tangente und Normalvektor `S251,252`

Für eine ebene Kurve $\mathbf{\Lambda}(t)$ $\tau, t \in I$, der Vektor $\dot{\mathbf{\Lambda}}(\tau)$ ist immer an $\mathbf{\Lambda}(\tau)$ tangent. $\ddot{\mathbf{\Lambda}}(\tau)$ ist zur Kurve normal.

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r' \sin\varphi + r\cos\varphi}{r' \cos\varphi - r\sin\varphi}$$

$$\ddot{\mathbf{\Lambda}} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

Man kann auch die Tangentengleichung und die Normalengleichung zur Zeitpunkt τ finden

$$T : y - \psi(\tau) = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}}(x - \phi(\tau))$$

$$N : y - \psi(\tau) = -\frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}}(x - \phi(\tau))$$

3.1.3 Krümmung und Krümmungsradius `S254`

Siehe Tab. 1 für die Rechnungsformeln.

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \qquad R = 1/\kappa$$

3.2 Raumkurven `S263`

Notation

Rot markierte Zahlen wie zB `S477` sind Hinweise auf die Seiten im "Bronstein" [2]

License

`An2E-ZF (c) by Naoki Pross`

`An2E-ZF is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 Unported License.`

`You should have received a copy of the license along with this work. If not, see`

http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/

Literatur

[1] `An2E` Vorlesungen an der Hochschule für Technik Rapperswil und der dazugehörige Skript, *Dr. Bernhard Zgraggen*, Frühlingssemester 2020

[2] Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage, 2016 (1977), *Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig*, `ISBN 978-3-8085-5789-1`

[3] Mathematik 2: Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, 2012, 7. Auflage, XII, Springer Berlin, *Albert Fetzer, Heiner Fränkel*, `ISBN-10 364224114X`, `ISBN-13 9783642241147`

Tabelle 1: Rechnungen bez. ebene Kurven

Ebene Kurven	**Explizit** $y = f(x)$	**Polar** $\boldsymbol{r}(\varphi)$	**Parameter** $\boldsymbol{c}(t) = (x(t), y(y))$
Bogenlänge S251	$\int\limits_a^b \sqrt{1+(f')^2}\ \mathrm{d}x$	$\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2+r^2}\ \mathrm{d}\varphi$	$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\ \mathrm{d}t = \int\limits_{t_0}^{t_1} \lvert\boldsymbol{c}\rvert\ \mathrm{d}t$
Fläche	$\int\limits_a^b \lvert f(x)\rvert\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r(\varphi)^2\ \mathrm{d}\varphi$	$\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} x\dot{y}-\dot{x}y\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} \det(\boldsymbol{c}, \dot{\boldsymbol{c}})\ \mathrm{d}t$
Rotationsvolumen um x	$\pi\left\lvert\int\limits_a^b y^2\ \mathrm{d}x\right\rvert$	$\pi\left\lvert\int\limits_{t_0}^{t_1} y\dot{x}\ \mathrm{d}t\right\rvert$	$\pi\left\lvert\int\limits_\alpha^\beta r^2\sin^2\varphi(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)\ \mathrm{d}\varphi\right\rvert$
Rotationsoberfläche um x	$2\pi\int\limits_a^b \lvert y\rvert\sqrt{1+(y')^2}\ \mathrm{d}x$	$2\pi\int\limits_\alpha^\beta \lvert r\sin(\varphi)\rvert\sqrt{(r')^2+r^2}\ \mathrm{d}\varphi$	$2\pi\int\limits_{t_0}^{t_1} \lvert y\rvert\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\ \mathrm{d}t$
Krümmung κ	$\frac{f''}{\sqrt{1+(f')^2}^3}$		$\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}^3} = \frac{\det(\dot{\boldsymbol{c}}, \ddot{\boldsymbol{c}})}{\lvert\dot{\boldsymbol{c}}\rvert^3}$