1 Integration S493,507

1.1 Tricks S495

Linearität S495

$$\int k(u+v) = k\left(\int u + \int v\right)$$

Partialbruchzerlegung S15,498

$$\int \frac{f(x)}{P_n(x)}\ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int \frac{A_k}{x-r_k}\ \mathrm{d}x$$

Elementartransformation S496

$$\int f(\lambda x+\ell)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} F(\lambda x+\ell) + C$$

Partielle Integration S497

$$\int u\ \mathrm{d}v = uv - \int v\ \mathrm{d}u$$

Potenzenregel S496

$$\int u^n \cdot u' = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Logaritmusregel S496

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + C$$

Allgemeine Substutution S497
$x = g(u)$, und $\mathrm{d}x = g'(u)\ \mathrm{d}u$

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int (f\circ g)\ g'\ \mathrm{d}u = \int \frac{f\circ g}{(g^{-1})'\circ g}\ \mathrm{d}u$$

Universalsubstitution S504

$$t = \tan(x/2) \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\mathrm{d}x = \frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \cos(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Womit

$$\int f(\sin(x), \cos(x), \tan(x))\ \mathrm{d}x = \int g(t)\ \mathrm{d}t$$

1.2 Uneigentliches Integral S520

$$\int_a^\infty f\ \mathrm{d}x = \lim_{B\to\infty} \int_a^B f\ \mathrm{d}x$$
$$\int_{-\infty}^b f\ \mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f\ \mathrm{d}x$$
$$\int_{-\infty}^\infty f\ \mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_A^B f\ \mathrm{d}x$$

Wenn f im Punkt $u \in (a,b)$ nicht definiert ist.

$$\int_a^b f\ \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0} \int_a^{u-\epsilon} f\ \mathrm{d}x + \lim_{\delta\to+0} \int_{u+\delta}^b f\ \mathrm{d}x \tag{1.2.1}$$

1.3 Cauchy Hauptwert S523

Der C.H. (oder PV für *Principal Value* auf Englisch) eines uneigentlichen Integrals ist der Wert, wenn in einem Integral wie (1.2.1) beide Grenzwerte mit der gleiche Geschwindigkeit gegen 0 streben.

$$\text{C.H.} \int_a^b f\ \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0} \left(\int_a^{u-\epsilon} f\ \mathrm{d}x + \int_{u+\epsilon}^b f\ \mathrm{d}x \right)$$

Zum Beispiel x^{-1} ist nicht über $\mathbb{R}$ integrierbar, wegen des Poles bei 0. Aber intuitiv wie die Symmetrie vorschlagt

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = 0$$

1.4 Majorant-, Minorantenprinzip und Konvergenzkriterien S521,473,479,481

Gilt für die Funktionen $0 < f(x) \leq g(x)$ mit $x \in [a, \infty)$

$$\text{konvergiert} \int_a^\infty g\ \mathrm{d}x \implies \text{konvergiert} \int_a^\infty f\ \mathrm{d}x$$

Die selbe gilt umgekehrt für Divergenz. Wenn $0 < h(x) \leq f(x)$

$$\text{divergiert} \int_a^\infty h\ \mathrm{d}x \implies \text{divergiert} \int_a^\infty f\ \mathrm{d}x$$

g und h heißen Majorant und Minorant bzw.

2 Implizite Ableitung S448

$$(af)' = af' \qquad (u(v(x)))' = u'(v)v'$$
$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$\left(\sum u_i\right)' = \sum u_i' \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Alle normale differenziazionsregeln für $f(x)$ gelten. Allgemeiner für die implizite Funktion $F(x,y) = 0$

$$\mathrm{d}y = y'\ \mathrm{d}x \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

3 Differentialgeometrie

3.1 Ebene Kurven S250

3.1.1 Darstellungen und Umwanldung

Sei $\Lambda : x = \phi(t),\ y = \psi(t), t \in I$ eine glatte Jordankurve. Beispiel in Abb. 1.

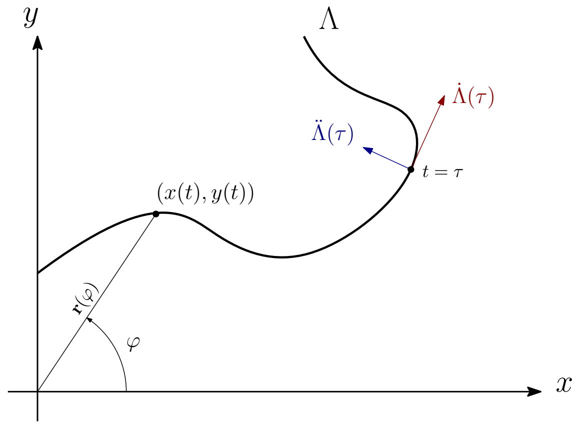

Abbildung 1: Die ebene Kurve $\mathbf{\Lambda}(t)$ kann Explizit $y(x)$ (in diesem Fall nicht), Implizit $\boldsymbol{u}(x, y) = 0$, Polar $\boldsymbol{r}(\varphi)$ oder in Parameterform $(x(t), y(t))$ dargestellt werden.

Polar zu Kartesian

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = y/x$$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Parametrisch zu explizit Sei $\dot\phi \neq 0$ oder $\dot\psi \neq 0$. Im Falle $\dot\phi \neq 0$, wechselt $\dot\phi$ in der Umgebung von t das Vorzeichen nicht, ϕ ist dort streng monoton. Daher gilt

$$t = \phi^{-1}(x) \quad y = \psi(t) = \psi \circ \phi^{-1}(x) = f(x)$$

Wenn $\dot\psi \neq 0$ ist dann $x = \phi \circ \psi^{-1}(y)$

3.1.2 Bogenlänge `S251,514`

Weitere Formeln (z.B. polar) findet man in Tab. 1.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}\, \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{c}}|\, \mathrm{d}t$$

3.1.3 Umparametrisierung nach Bogenlänge

Sei die Kurve $\mathbf{\Lambda}(t), t \in I$ mindestens einmal differenzierbar, und ℓ die Bogenlänge (gemäß §3.1.2) im Intervall. Die Umparametrisierung $\mathbf{\Lambda}(s)$ ist dann

$$s = \ell t \implies \mathbf{\Lambda}(s) = \mathbf{\Lambda}(t/\ell)$$

Die neue Parametrisierung hat $\mathbf{\Lambda}' = 1$ (nach s differenziert), d.h. die erste Ableitung ist der tangent Einheitsvector!

3.1.4 Tangente und Normalvektor `S251,252`

Für eine ebene Kurve $\mathbf{\Lambda}(t)$ $\tau, t \in I$, der Vektor $\dot{\mathbf{\Lambda}}(\tau)$ ist immer an $\mathbf{\Lambda}(\tau)$ tangent. $\ddot{\mathbf{\Lambda}}(\tau)$ ist zur Kurve normal.

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

$$\ddot{\mathbf{\Lambda}} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\ddot y \dot x - \ddot x \dot y}{\dot x^3}$$

Man kann auch die Tangentengleichung und die Normalengleichung zur Zeitpunkt τ finden

$$T : y - \psi(\tau) = \frac{\dot\psi}{\dot\phi}(x - \phi(\tau))$$

$$N : y - \psi(\tau) = -\frac{\dot\phi}{\dot\psi}(x - \phi(\tau))$$

3.1.5 Krümmung und Krümmungsradius `S254`

Siehe Tab. 1 für die Rechnungsformeln und Abb. 2 für eine graphische Deutung.

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \qquad R = 1/\kappa$$

Eine gerade hat $\kappa = 0$ und $R = \infty$. Entsprechend der Orientierung der x-Achse, entspricht einer $\kappa > 0$ eine Linkskrümmung und $\kappa < 0$ eine Rechtskrümmung.

Der Krümmungskreis hat Maßzahl $\rho = 1/|\kappa|$ und Mittelpunkt P_c gemäß

$$P_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa}\hat{\boldsymbol{n}}$$

Wobei $\hat{\boldsymbol{n}} = \ddot{\mathbf{\Lambda}}^0$ ist der Normalvektor.

3.1.6 Konvexität

Sei die Kurve Λ durch $f \in C^2$ auf $[a, b]$ gegeben.

- f ist auf (a, b) konvex (bzw. konkav), wenn $\kappa \geq 0$ (bzw. $\kappa \leq 0$) $\forall x \in (a, b)$.
- f ist auf (a, b) streng konvex (bzw. konkav), wenn $\kappa > 0$ (bzw. $\kappa < 0$) $\forall x \in (a, b)$.
- Hat in Λ in P einen Wendepunkt, dann $\kappa(P) = 0$.

3.1.7 Evoluten und Evolventen `S262`

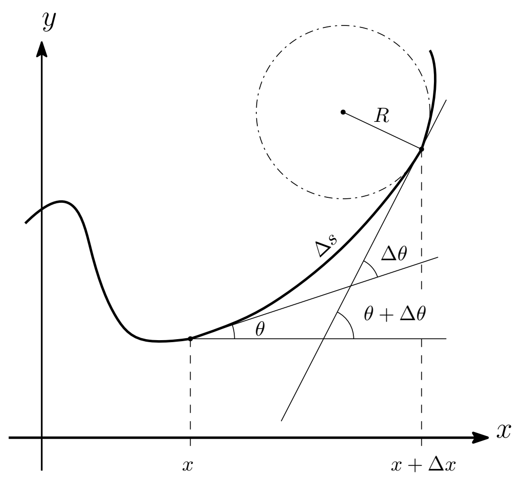

Abbildung 2: Krümmung und Krümmungskreisradien

3.2 Raumkurven S263

3.3 Kurven 2. Ordnung – Kegelschnitt S212

Die Polarform für die allgemeine Gleichung der Kurver 2. Ordnung ist

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \tag{3.3.1}$$

Der parameter ε ändert die Gestalt folgendermaßen

- $\varepsilon = 0$ Kreis
- $|\varepsilon| = 1$ Parabel
- $|\varepsilon| \in (0; 1)$ Ellipse
- $|\varepsilon| > 1$ Hyperbel

3.3.1 Kreis S204

Kartesisch $(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = r^2$
Parameter $x = c_x + R \cos t \quad y = c_y + R \sin t$

3.3.2 Ellipse S205

Kartesisch $\left(\frac{x - C_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - C_y}{b}\right)^2 = 1$

Parameter $x = a \cos t \quad y = b \sin t$

3.3.3 Hyperbel S207

Kartesisch $\left(\frac{x - C_x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - C_y}{b}\right)^2 = 1$

Parameter $x = a \cosh t \quad y = b \sinh t$

3.3.4 Parabel S210

Kartesisch $y = ax^2 + bx + c$
Parameter $x = t \quad y = at^2 + bt + c$

3.4 Kurven 4. Ordnung S98

Kardioide / Herzkurve S99,100

$$r = a(1 + cos\varphi)$$

Lemniskate S101

$$r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$$

4 Reihen

4.1 Bemerkenswerte Rehien S19,477

Arithmetische Reihe Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann aus der arithmetischen Folge $\langle a_k \rangle$ mit $a_k = a_1 + (k-1)d$ erhält man die Reihe $\langle A_n \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n} (k-1)d = a_1 + d + 2d + \cdots + (n-1)d \\ &= \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

Geometrische Reihe Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Aus der geometrischen Folge $\langle g_k \rangle$ mit $g_k = a_1 q^k$ erhält man die Reihe $\langle G_n \rangle$ mit:

$$G_n = a_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Harmonische Reihe Aus der folge $\langle h_k \rangle$ mit $h_k = 1/k$ erhält man die Reihe $\langle H_n \rangle$ mit:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Potenzreihe Siehe §4.3

4.2 Unendlichen S470,477

Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge die Reihe $\langle S_n \rangle$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

4.2.1 Konvergenz S472,475

Absolute S475 Die Reihe S_n heißt *absoulut konvergent* wenn

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \text{ konvergiert}$$

Wenn eine Reihe absolut konvergent ist, dann

1. sie ist auch konvergent.
2. die Glieder können nach Belieben miteinander vertauscht weden.
3. sei $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n$ (a_n und b_n abs. konvergent gegen a bzw. b), dann
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Bedingte Wenn die Reihe S_n nicht abs. konvergiert, aber es eine Umordnung gibt, sodaß die umgeordnete Reihe entweder divergent ist oder gegen eine von verschiedene Summe konvergiert. Dann heißt die Reihe *bedingt konvergent.*

4.2.2 Konvergenzkriterien S472

Cauchy'sches S475

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

Wurzelkriterium von Cauchy S474

$$\alpha = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \implies \begin{cases} \alpha < 1 & \text{(abs.) konvergent} \\ \alpha > 1 & \text{divergent} \end{cases}$$

Wenn $\alpha = 1$ man kann nicht direkt eine Konvergenz / Divergenz schliessen.

Quotientenkriterium von d'Alambert S474

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \implies \begin{cases}\alpha < 1 & \text{(abs.) konvergent}\\ \alpha > 1 & \text{divergent}\end{cases}$$

Leibniz'sches (für alternierenden Reihen) S476
Wenn $\langle a_n\rangle$ eine alterniende Folge ist, dann gilt

$$\langle |a_n| \rangle \text{ ist eine monoton fallende Nullfolge} \implies \langle s_n\rangle \text{ konvergiert}$$

Integralkriterium S475 Sei $f(x) \geq 0$, $x \in [1;\infty)$ und $f\downarrow$. Merkt man dass:

$$\overbrace{\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x}^{S} \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq \overbrace{\int_2^n f(x-1)\,\mathrm{d}x}^{\text{Auch } S}$$

Somit folgt:

$$\text{konvergiert} \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \implies \text{konvergiert } s$$

4.3 Potenzreihen

$$P = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Sei $\lim_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|} = a$ (Wurzelkriterium)

$$\begin{aligned} a = 0 &\implies \text{abs. konvergent} \\ a > 0 &\implies \forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases}|x| < 1/a: & \text{abs. konvergent}\\ |x| > 1/a: & \text{divergent}\end{cases}\end{aligned}$$

4.3.1 Konvergenzradius/bereich

Sei $\langle\sqrt{|a_n|}\rangle$ nicht beschränkt, so ist P nur für $x = 0$ konvergent.

Literatur

[1] `An2E` Vorlesungen an der Hochschule für Technik Rapperswil und der dazugehörige Skript, *Dr. Bernhard Zgraggen*, Frühlingssemester 2020

[2] Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage, 2016 (1977), *Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig*, `ISBN 978-3-8085-5789-1`

[3] Mathematik 2: Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, 2012, 7. Auflage, XII, Springer Berlin, *Albert Fetzer, Heiner Fränkel*, `ISBN-10 364224114X`, `ISBN-13 9783642241147`

Notation

Rot markierte Zahlen wie zB S477 sind Hinweise auf die Seiten im "Bronstein" [2]

- C^n ist der Menge der glatten n-mal differenzierbären Funktionen.
- Das Zeichen $\forall$ bedeutet "für alle"

License

Tabelle 1: Rechnungen bez. ebene Kurven

Ebene Kurven	**Kartesich** $y = f(x)$	**Polar** $\boldsymbol{r}(\varphi)$	**Parameter** $\boldsymbol{c}(t) = (x(t), y(y))$
Anstieg S448	f'	$\dfrac{r' \sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$	$\dot{x}/\dot{y}$
Fläche S493	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert \, \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\varphi)^2 \, \mathrm{d}\varphi$	$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} x\dot{y} - \dot{x}y \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \det(\boldsymbol{c}, \dot{\boldsymbol{c}}) \, \mathrm{d}t$
Bogenlänge S251,514	$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \, \mathrm{d}x$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2} \, \mathrm{d}\varphi$	$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \lvert\dot{\boldsymbol{c}}\rvert \, \mathrm{d}t$
Krümmung κ S254	$\dfrac{f''}{\sqrt{1+(f')^2}^3}$	$\dfrac{2(r')^2 - rr'' + r^2}{\sqrt{r^2 + (r')^2}^3}$	$\dfrac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}^3} = \dfrac{\det(\dot{\boldsymbol{c}}, \ddot{\boldsymbol{c}})}{\lvert\dot{\boldsymbol{c}}\rvert^3}$
Rotationsvolumen um x S516	$\pi \left\lvert \int_a^b y^2 \, \mathrm{d}x \right\rvert$	$\pi \left\lvert \int_{t_0}^{t_1} y\dot{x} \, \mathrm{d}t \right\rvert$	$\pi \left\lvert \int_\alpha^\beta r^2 \sin^2\varphi (r'\cos\varphi - r\sin\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \right\rvert$
Rotationsoberfläche um x S515	$2\pi \int_a^b \lvert y\rvert \sqrt{1 + (y')^2} \, \mathrm{d}x$	$2\pi \int_\alpha^\beta \lvert r\sin(\varphi)\rvert \sqrt{(r')^2 + r^2} \, \mathrm{d}\varphi$	$2\pi \int_{t_0}^{t_1} \lvert y\rvert \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t$