

1 Integration S493, 507

1.1 Tricks S495

Linearität S495

$$\int k(u+v) = k \left(\int u + \int v \right)$$

Partialbruchzerlegung S15, 498

$$\int \frac{f(x)}{P_n(x)} dx = \sum_{k=1}^n \int \frac{A_k}{x-r_k} dx$$

Elementartransformation S496

$$\int f(\lambda x + \ell) dx = \frac{1}{\lambda} F(\lambda x + \ell) + C$$

Partielle Integration S497

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Potenzregel S496

$$\int u^n \cdot u' = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

Logarithmusregel S496

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + C$$

Allgemeine Substitution S497

$x = g(u)$, und $dx = g'(u)du$

$$\int f(x) dx = \int (f \circ g) g' du = \int \frac{f \circ g}{(g^{-1})' \circ g} du$$

Universalsubstitution S504

$$\begin{aligned} t &= \tan(x/2) & \sin(x) &= \frac{2t}{1+t^2} \\ dx &= \frac{2dt}{1+t^2} & \cos(t) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

Womit

$$\int f(\sin(x), \cos(x), \tan(x)) dx = \int g(t) dt$$

1.2 Uneigentliches Integral S520

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f dx &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f dx \\ \int_{-\infty}^b f dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f dx \\ \int_{-\infty}^\infty f dx &= \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_A^B f dx \end{aligned}$$

Wenn f im Punkt $u \in (a, b)$ nicht definiert ist.

$$\int_a^b f dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^{u-\epsilon} f dx + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{u+\delta}^b f dx \quad (1.2.1)$$

1.3 Cauchy Hauptwert S523

Der C.H. (oder PV für *Principal Value* auf Englisch) eines uneigentlichen Integrals ist der Wert, wenn in einem Integral wie (1.2.1) beide Grenzwerte mit der gleichen Geschwindigkeit gegen 0 streben.

$$\text{C.H.} \int_a^b f dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{u-\epsilon} f dx + \int_{u+\epsilon}^b f dx \right)$$

Zum Beispiel x^{-1} ist nicht über \mathbb{R} integrierbar, wegen des Poles bei 0. Aber intuitiv wie die Symmetrie vorschlägt

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx = 0$$

1.4 Majorant-, Minorantenprinzip und Konvergenzkriterien S521, 473, 479, 481

Gilt für die Funktionen $0 < f(x) \leq g(x)$ mit $x \in [a, \infty)$

$$\text{konvergiert} \int_a^\infty g dx \implies \text{konvergiert} \int_a^\infty f dx$$

Die selbe gilt umgekehrt für Divergenz. Wenn $0 < h(x) \leq f(x)$

$$\text{divergiert} \int_a^\infty h dx \implies \text{divergiert} \int_a^\infty f dx$$

g und h heißen Majorant und Minorant bzw.

2 Implizite Ableitung S448

$$\begin{aligned} (af)' &= af' & (u(v(x)))' &= u'(v)v' \\ (uv)' &= u'v + uv' & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ \left(\sum u_i\right)' &= \sum u_i' & (\ln u)' &= \frac{u'}{u} \\ (f^{-1})' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \end{aligned}$$

Alle normale differenzierungsregeln für $f(x)$ gelten. Allgemeiner für die implizite Funktion $F(x, y) = 0$

$$dy = y' dx \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

3 Differentialgeometrie

3.1 Ebene Kurven S250

3.1.1 Darstellungen und Umwandlung

Sei $\Lambda : x = \phi(t), y = \psi(t), t \in I$ eine glatte Jordankurve. Beispiel in Abb. 1.

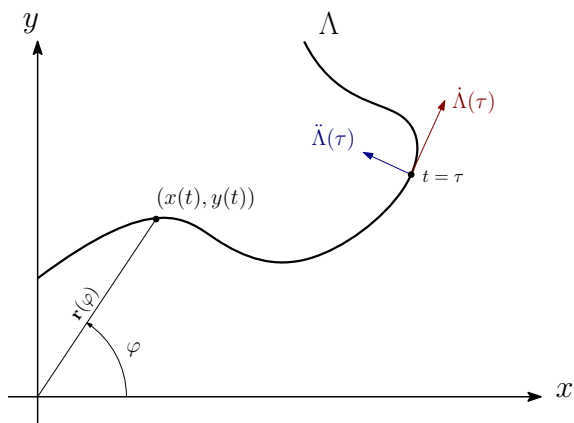


Abbildung 1: Die ebene Kurve $\Lambda(t)$ kann Explizit $y(x)$ (in diesem Fall nicht), Implizit $\mathbf{u}(x, y) = 0$, Polar $\mathbf{r}(\varphi)$ oder in Parameterform $(x(t), y(t))$ dargestellt werden.

Polar zu Kartesian

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \varphi = y/x$$

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

Parametrisch zu explizit Sei $\dot{\phi} \neq 0$ oder $\dot{\psi} \neq 0$. Im Falle $\dot{\phi} \neq 0$, wechselt $\dot{\phi}$ in der Umgebung von t das Vorzeichen nicht, ϕ ist dort streng monoton. Daher gilt

$$t = \phi^{-1}(x) \quad y = \psi(t) = \psi \circ \phi^{-1}(x) = f(x)$$

Wenn $\dot{\psi} \neq 0$ ist dann $x = \phi \circ \psi^{-1}(y)$

3.1.2 Bogenlänge S251, 514

Weitere Formeln (z.B. polar) findet man in Tab. 1.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{c}| dt$$

3.1.3 Umparametrisierung nach Bogenlänge

Sei die Kurve $\Lambda(t), t \in I$ mindestens einmal differenzierbar, und ℓ die Bogenlänge (gemäß §3.1.2) im Intervall. Die Umparametrisierung $\Lambda(s)$ ist dann

$$s = \ell t \implies \Lambda(s) = \Lambda(t/\ell)$$

Die neue Parametrisierung hat $\Lambda' = 1$ (nach s differenziert), d.h. die erste Ableitung ist der tangent Einheitsvector!

3.1.4 Tangente und Normalenvektor S251, 252

Für eine ebene Kurve $\Lambda(t), t \in I$, der Vektor $\dot{\Lambda}(\tau)$ ist immer an $\Lambda(\tau)$ tangential. $\ddot{\Lambda}(\tau)$ ist zur Kurve normal.

$$\dot{\Lambda} = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

$$\ddot{\Lambda} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Man kann auch die Tangentengleichung und die Normalengleichung zur Zeitpunkt τ finden

$$T: y - \psi(\tau) = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}}(x - \phi(\tau))$$

$$N: y - \psi(\tau) = -\frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}}(x - \phi(\tau))$$

3.1.5 Krümmung und Krümmungsradius S254

Siehe Tab. 1 für die Rechnungsformeln und Abb. 2 für eine graphische Deutung.

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \quad R = 1/\kappa$$

Eine gerade hat $\kappa = 0$ und $R = \infty$. Entsprechend der Orientierung der x -Achse, entspricht einer $\kappa > 0$ eine Linkskrümmung und $\kappa < 0$ eine Rechtskrümmung.

Der Krümmungskreis hat Maßzahl $\rho = 1/|\kappa|$ und Mittelpunkt P_c gemäß

$$P_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa} \hat{\mathbf{n}}$$

Wobei $\hat{\mathbf{n}} = \Lambda^0$ ist der Normalenvektor.

3.1.6 Konvexität

Sei die Kurve Λ durch $f \in C^2$ auf $[a, b]$ gegeben.

- f ist auf (a, b) konvex (bzw. konkav), wenn $\kappa \geq 0$ (bzw. $\kappa \leq 0$) $\forall x \in (a, b)$.
- f ist auf (a, b) streng konvex (bzw. konkav), wenn $\kappa > 0$ (bzw. $\kappa < 0$) $\forall x \in (a, b)$.
- Hat in Λ in P einen Wendepunkt, dann $\kappa(P) = 0$.

3.1.7 Evoluten und Evolventen S262

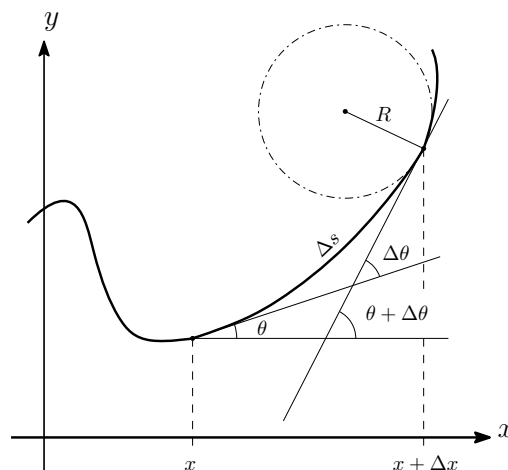


Abbildung 2: Krümmung und Krümmungsradius

3.2 Raumkurven S263

3.3 Kurven 2. Ordnung – Kegelschnitt

S212

Die Polarform für die allgemeine Gleichung der Kurven 2. Ordnung ist

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (3.3.1)$$

Der parameter ε ändert die Gestalt folgendermaßen

- $\varepsilon = 0$ Kreis
- $|\varepsilon| = 1$ Parabel
- $|\varepsilon| \in (0; 1)$ Ellipse
- $|\varepsilon| > 1$ Hyperbel

3.3.1 Kreis S204

Kartesisch $(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = r^2$
 Parameter $x = c_x + R \cos t \quad y = c_y + R \sin t$

3.3.2 Ellipse S205

Kartesisch $\left(\frac{x - C_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - C_y}{b}\right)^2 = 1$
 Parameter $x = a \cos t \quad y = b \sin t$

3.3.3 Hyperbel S207

Kartesisch $\left(\frac{x - C_x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - C_y}{b}\right)^2 = 1$
 Parameter $x = a \cosh t \quad y = b \sinh t$

3.3.4 Parabel S210

Kartesisch $y = ax^2 + bx + c$
 Parameter $x = t \quad y = at^2 + bt + c$

3.4 Kurven 4. Ordnung S98

Kardioide / Herzkurve S99, 100

$$r = a(1 + \cos \varphi)$$

Lemniskate S101

$$r = a\sqrt{2 \cos(2\varphi)}$$

4 Reihen

4.1 Bemerkenswerte Reihen S19, 477

Arithmetische Reihe Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann aus der arithmetischen Folge $\langle a_k \rangle$ mit $a_k = a_1 + (k - 1)d$ erhält man die Reihe $\langle A_n \rangle$ mit:

$$A_n = a_1 + \sum_{k=1}^n (k - 1)d = a_1 + d + 2d + \dots + (n - 1)d$$

$$= \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Geometrische Reihe Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Aus der geometrischen Folge $\langle g_k \rangle$ mit $g_k = a_1 q^k$ erhält man die Reihe $\langle G_n \rangle$ mit:

$$G_n = a_1 \sum_{k=1}^n q^{k-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Harmonische Reihe Aus der Folge $\langle h_k \rangle$ mit $h_k = 1/k$ erhält man die Reihe $\langle H_n \rangle$ mit:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Potenzreihe Siehe §4.3

4.2 Unendlichen S470, 477

Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge die Reihe $\langle S_n \rangle$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

4.2.1 Konvergenz S472, 475

Absolute S475 Die Reihe S_n heißt *absolut konvergent* wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |a_k| \text{ konvergiert}$$

Wenn eine Reihe absolut konvergent ist, dann

1. sie ist auch konvergent.
2. die Glieder können nach Belieben miteinander vertauscht werden.
3. sei $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_n$ (a_n und b_n abs. konvergent gegen a bzw. b), dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

Bedingte Wenn die Reihe S_n nicht abs. konvergiert, aber es eine Umordnung gibt, sodaß die umgeordnete Reihe entweder divergent ist oder gegen eine von verschiedenen Summe konvergiert. Dann heißt die Reihe *bedingt konvergent*.

4.2.2 Konvergenzkriterien S472

Cauchy'sches S475

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$$

Wurzelkriterium von Cauchy S474

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \implies \begin{cases} \alpha < 1 & \text{(abs.) konvergent} \\ \alpha > 1 & \text{divergent} \end{cases}$$

Wenn $\alpha = 1$ man kann nicht direkt eine Konvergenz / Divergenz schliessen.

Quotientenkriterium von d'Alambert S474

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \implies \begin{cases} \alpha < 1 & \text{(abs.) konvergent} \\ \alpha > 1 & \text{divergent} \end{cases}$$

Leibniz'sches (für alternierenden Reihen) S476

Wenn $\langle a_n \rangle$ eine alternierende Folge ist, dann gilt

$$\langle |a_n| \rangle \text{ ist eine monoton fallende Nullfolge} \\ \implies \langle s_n \rangle \text{ konvergiert}$$

Integralkriterium S475 Sei $f(x) \geq 0$, $x \in [1; \infty)$ und $f \downarrow$. Merkt man dass:

$$\overbrace{\int_1^n f(x) dx}^S \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq \overbrace{\int_2^{n+1} f(x-1) dx}^{\text{Auch } S}$$

Somit folgt:

$$\text{konvergiert } \int_1^\infty f(x) dx \implies \text{konvergiert } s$$

4.3 Potenzreihen S482

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\ = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ (Wurzelkriterium)

$$a = 0 \implies \text{abs. konvergent}$$

$$a > 0 \implies \forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} |x| < 1/a : \text{abs. konvergent} \\ |x| > 1/a : \text{divergent} \end{cases}$$

4.3.1 Konvergenzradius/-bereich S482

Sei $\langle \sqrt[n]{|a_n|} \rangle$ nicht beschränkt ($a = \infty$), so ist P nur für $x = x_0$ konvergent ($r = 1/\infty = 0^+$). Sonst existiert der *Konvergenzradius* $r \in \mathbb{R}^+$:

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad r = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

Innerhalb des *Konvergenzbereiches* $\{x : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r; x_0 + r)$ ist die Reihe absolut konvergent, außerhalb dessen ist sie divergent. Wenn $r = \infty$ dann ist die Reihe abs. konvergent.

4.3.2 Funktion darstellen

4.3.3 Ableitung und Integration

Sei P eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$, die eine Funktion f darstellt. Innerhalb des Konvergenzradius gilt:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ \int f dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

Höhere Ableitungen:

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

4.3.4 Taylor Polynom und Reihe S484

Der Taylor-Polynom approximiert eine Funktion um einen Entwicklungspunkt a .

$$T_n(x, a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n \\ = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

Die Restglieder sind

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{(n+1)} \quad (\xi \in (x; a))$$

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ dann $f(x) = T(x, a)$, d.h. die Taylor Reihe zu f identisch ist (Konvergenzradius $r = \infty$). Sonst berechnet man der *worst case* Fehler $\epsilon \geq |R_n|$ und der dazugehörig $\hat{\xi} = \arg \max_{\xi} |R_n|$:

$$\epsilon = \max |R_n| = \max \left[\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x-a|^{(n+1)} \right]$$

5 Differentialgleichungen

5.1 Definition

Eine Funktion $y = \varphi(x)$ heißt *allgemeine* Lösung der n -te Ordnung Differentialgleichung

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

auf dem Intervall I , wenn

- φ auf I n -mal differenzierbar ist
- $\forall x \in I : F(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n)}) = 0$

Gegeben seien auch der *Anfangspunkt* x_0 , und die *Anfangswerte* oder *Anfangsbedingungen* $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y'(x_0)$, ..., $y_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Dann hat man ein *Anfangswertproblem*, der eine *spezifische* Lösung ergibt.

5.2 DGL 1. Ordnung

Die Funktionen f und g seien auf demselben Intervall I stetig. Die Differentialgleichung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

heißt *homogen*, wenn g die Nullfunktion ($= 0$) auf I ist, sonst *inhomogen*. g heißt Störglied.

Separation Wenn die DGL die Form $y' = g(y)f(x)$ hat, dann lässt sie sich mit der Umformung

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \implies \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

Ein Spezialfall $g(y) = y$ hat die allgemeine Lösung

$$y = k \exp\left(\int f(x) dx\right)$$

Substitution Linearterm Hat die DGL die Form $y' = f(ax+by+c)$, dann benutzt man die Substitution

$$z = ax + by + c \iff y(z) = b(z - c)/ax \\ z' = a + by' \implies z' = a + by'(z) \text{ separiert!}$$

Dann soll sie nach z lösen lassen.

Gleichgradigkeit Hat die DGL die Form $y' = f(y/x)$ $x \neq 0$, dann benutzt die Substitution

$$z = y/x \implies y' = z'x + z \\ \implies z' = \frac{1}{x}(y'(x) - z) \text{ separiert!}$$

5.3 DGL 2. Ordnung

Literatur

- [1] An2E Vorlesungen an der Hochschule für Technik Rapperswil und der dazugehörige Skript, *Dr. Bernhard Zraggen*, Frühlingssemester 2020
- [2] Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage, 2016 (1977), *Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig*, ISBN 978-3-8085-5789-1
- [3] Mathematik 2: Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, 2012, 7. Auflage, XII, Springer Berlin, *Albert Fetzner, Heiner Fränkel*, ISBN-10 364224114X, ISBN-13 9783642241147

Notation

Rot markierte Zahlen wie zB **S477** sind Hinweise auf die Seiten im “Bronstein” [2]

- C^n ist der Menge der glatten n -mal differenzierbaren Funktionen.
- Das Zeichen \forall bedeutet “für alle”

License

An2E-ZF (c) by Naoki Pross

An2E-ZF is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 Unported License.

You should have received a copy of the license along with this work. If not, see

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Tabelle 1: Rechnungen bez. ebene Kurven

Ebene Kurven	Kartesisch $y = f(x)$	Polar $r(\varphi)$	Parameter $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$
Anstieg S448	f'	$\frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$	\dot{x}/\dot{y}
Fläche S493	$\int_a^b f(x) dx$	$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 d\varphi$	$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} xy - \dot{x}y dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \det(\dot{\mathbf{c}}, \dot{\mathbf{c}}) dt$
Bogenlänge S254, 514	$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx$	$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi$	$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{c}} dt$
Krümmung κ S254	$\frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}^3}$	$\frac{2(r')^2 - rr'' + r^2}{\sqrt{r^2 + (r')^2}^3}$	$\frac{\dot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3} = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})}{ \dot{\mathbf{c}} ^3}$
Rotationsvolumen um x S516	$\pi \int_a^b y^2 dx$	$\pi \left \int_{t_0}^{t_1} y \dot{x} dt \right $	$\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \sin^2 \varphi (r' \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi$
Rotationsoberfläche um x S515	$2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$	$2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin(\varphi) \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi$	$2\pi \int_{t_0}^{t_1} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$