

# 1 Integration S493, 507

## 1.1 Tricks S495

Linearität S495

$$\int k(u+v) = k \left( \int u + \int v \right)$$

Partialbruchzerlegung S15, 498

$$\int \frac{f(x)}{P_n(x)} dx = \sum_{k=1}^n \int \frac{A_k}{x-r_k} dx$$

Elementartransformation S496

$$\int f(\lambda x + \ell) dx = \frac{1}{\lambda} F(\lambda x + \ell) + C$$

Partielle Integration S497

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Potenzregel S496

$$\int u^n \cdot u' = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

Logarithmusregel S496

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + C$$

Allgemeine Substitution S497

$x = g(u)$ , und  $dx = g'(u)du$

$$\int f(x) dx = \int (f \circ g) g' du = \int \frac{f \circ g}{(g^{-1})' \circ g} du$$

Universalsubstitution S504

$$\begin{aligned} t &= \tan(x/2) & \sin(x) &= \frac{2t}{1+t^2} \\ dx &= \frac{2dt}{1+t^2} & \cos(t) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

Womit

$$\int f(\sin(x), \cos(x), \tan(x)) dx = \int g(t) dt$$

## 1.2 Uneigentliches Integral S520

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f dx &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f dx \\ \int_{-\infty}^b f dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f dx \\ \int_{-\infty}^\infty f dx &= \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_A^B f dx \end{aligned}$$

Wenn  $f$  im Punkt  $u \in (a, b)$  nicht definiert ist.

$$\int_a^b f dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^{u-\epsilon} f dx + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{u+\delta}^b f dx \quad (1.2.1)$$

## 1.3 Cauchy Hauptwert S523

Der C.H. (oder PV für *Principal Value* auf Englisch) eines uneigentlichen Integrals ist der Wert, wenn in einem Integral wie (1.2.1) beide Grenzwerte mit der gleichen Geschwindigkeit gegen 0 streben.

$$\text{C.H.} \int_a^b f dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left( \int_a^{u-\epsilon} f dx + \int_{u+\epsilon}^b f dx \right)$$

Zum Beispiel  $x^{-1}$  ist nicht über  $\mathbb{R}$  integrierbar, wegen des Poles bei 0. Aber intuitiv wie die Symmetrie vorschlägt

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx = 0$$

## 1.4 Majorant-, Minorantenprinzip und Konvergenzkriterien S521, 473, 479, 481

Gilt für die Funktionen  $0 < f(x) \leq g(x)$  mit  $x \in [a, \infty)$

$$\text{konvergiert} \int_a^\infty g dx \implies \text{konvergiert} \int_a^\infty f dx$$

Die selbe gilt umgekehrt für Divergenz. Wenn  $0 < h(x) \leq f(x)$

$$\text{divergiert} \int_a^\infty h dx \implies \text{divergiert} \int_a^\infty f dx$$

$g$  und  $h$  heißen Majorant und Minorant bzw.

## 2 Implizite Ableitung S448

$$\begin{aligned} (af)' &= af' & (u(v(x)))' &= u'(v)v' \\ (uv)' &= u'v + uv' & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ \left(\sum u_i\right)' &= \sum u_i' & (\ln u)' &= \frac{u'}{u} \\ (f^{-1})' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \end{aligned}$$

Alle normale differenziationsregeln für  $f(x)$  gelten. Allgemeiner für die implizite Funktion  $F(x, y) = 0$

$$dy = y' dx \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

## 3 Differentialgeometrie

### 3.1 Ebene Kurven S250

#### 3.1.1 Darstellungen und Umwandlung

Sei  $\Lambda : x = \phi(t), y = \psi(t), t \in I$  eine glatte Jordankurve. Beispiel in Abb. 1.

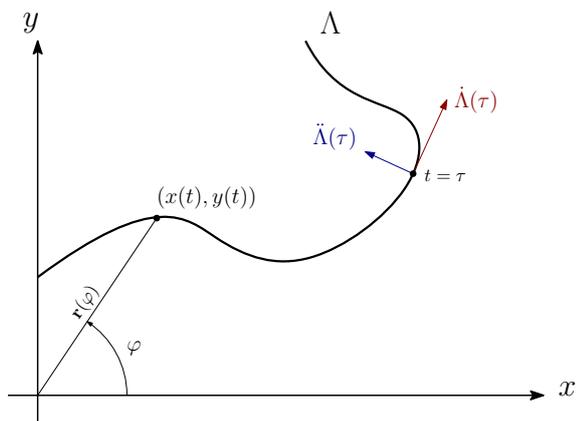


Abbildung 1: Die ebene Kurve  $\Lambda(t)$  kann Explizit  $y(x)$  (in diesem Fall nicht), Implizit  $\mathbf{u}(x, y) = 0$ , Polar  $\mathbf{r}(\varphi)$  oder in Parameterform  $(x(t), y(t))$  dargestellt werden.

### Polar zu Kartesien

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \varphi = y/x$$

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

**Parametrisch zu explizit** Sei  $\dot{\phi} \neq 0$  oder  $\dot{\psi} \neq 0$ . Im Falle  $\dot{\phi} \neq 0$ , wechselt  $\dot{\phi}$  in der Umgebung von  $t$  das Vorzeichen nicht,  $\phi$  ist dort streng monoton. Daher gilt

$$t = \phi^{-1}(x) \quad y = \psi(t) = \psi \circ \phi^{-1}(x) = f(x)$$

Wenn  $\dot{\psi} \neq 0$  ist dann  $x = \phi \circ \psi^{-1}(y)$

### 3.1.2 Bogenlänge S251, 514

Weitere Formeln (z.B. polar) findet man in Tab. 1.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{c}}| dt$$

### 3.1.3 Umparametrisierung nach Bogenlänge

Sei die Kurve  $\Lambda(t), t \in I$  mindestens einmal differenzierbar, und  $\ell$  die Bogenlänge (gemäß §3.1.2) im Intervall. Die Umparametrisierung  $\Lambda(s)$  ist dann

$$s = \ell t \implies \Lambda(s) = \Lambda(t/\ell)$$

Die neue Parametrisierung hat  $\Lambda' = 1$  (nach  $s$  differenziert), d.h. die erste Ableitung ist der tangente Einheitsvector!

### 3.1.4 Tangente und Normalenvektor S251, 252

Für eine ebene Kurve  $\Lambda(t), t \in I$ , der Vektor  $\dot{\Lambda}(t)$  ist immer an  $\Lambda(t)$  tangente.  $\ddot{\Lambda}(t)$  ist zur Kurve normal.

$$\dot{\Lambda} = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

$$\ddot{\Lambda} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Man kann auch die Tangentengleichung und die Normalengleichung zur Zeitpunkt  $\tau$  finden

$$T: y - \psi(\tau) = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}}(x - \phi(\tau))$$

$$N: y - \psi(\tau) = -\frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}}(x - \phi(\tau))$$

### 3.1.5 Krümmung und Krümmungsradius S254

Siehe Tab. 1 für die Rechnungsformeln und Abb. 2 für eine graphische Deutung.

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \quad R = 1/\kappa$$

Eine gerade hat  $\kappa = 0$  und  $R = \infty$ . Entsprechend der Orientierung der  $x$ -Achse, entspricht einer  $\kappa > 0$  eine Linkskrümmung und  $\kappa < 0$  eine Rechtskrümmung.

Der Krümmungskreis hat Maßzahl  $\rho = 1/|\kappa|$  und Mittelpunkt  $P_c$  gemäß

$$P_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa} \hat{\mathbf{n}}$$

Wobei  $\hat{\mathbf{n}} = \Lambda^0$  ist der Normalenvektor.

### 3.1.6 Konvexität

Sei die Kurve  $\Lambda$  durch  $f \in C^2$  auf  $[a, b]$  gegeben.

- $f$  ist auf  $(a, b)$  konvex (bzw. konkav), wenn  $\kappa \geq 0$  (bzw.  $\kappa \leq 0$ )  $\forall x \in (a, b)$ .
- $f$  ist auf  $(a, b)$  streng konvex (bzw. konkav), wenn  $\kappa > 0$  (bzw.  $\kappa < 0$ )  $\forall x \in (a, b)$ .
- Hat in  $\Lambda$  in  $P$  einen Wendepunkt, dann  $\kappa(P) = 0$ .

### 3.1.7 Evoluten und Evolventen S262

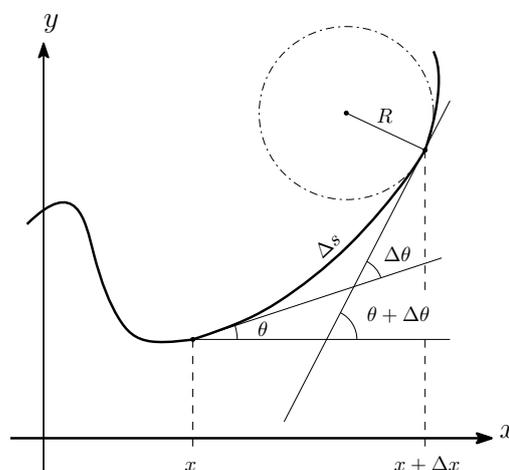


Abbildung 2: Krümmung und Krümmungsradius

### 3.2 Raumkurven S263

### 3.3 Kurven 2. Ordnung – Kegelschnitt S212

Die Polarform für die allgemeine Gleichung der Kurver 2. Ordnung ist

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (3.3.1)$$

Im kartesische Form

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 0 \quad (3.3.2)$$

Die Parameter  $a, b$  bzw,  $\varepsilon$  ändern die Gestalt folgendermaßen

- $\varepsilon = 0$  Kreis
- $|\varepsilon| = 1$  Parabel
- $|\varepsilon| \in (0; 1)$  Ellipse
- $|\varepsilon| > 1$  Hyperbel

#### 3.3.1 Kreis S204

Kartesisch  $(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = r^2$   
 Parameter  $x = c_x + R \cos t \quad y = c_y + R \sin t$

#### 3.3.2 Ellipse S205

Kartesisch  $\left(\frac{x - C_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - C_y}{b}\right)^2 = 1$   
 Parameter  $x = a \cos t \quad y = b \sin t$

#### 3.3.3 Hyperbel S207

Kartesisch  $\left(\frac{x - C_x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - C_y}{b}\right)^2 = 1$   
 Parameter  $x = a \cosh t \quad y = b \sinh t$

#### 3.3.4 Parabel S210

Kartesisch  $y = ax^2 + bx + c$   
 Parameter  $x = t \quad y = at^2 + bt + c$

### 3.4 Kurven 4. Ordnung S98

#### Kardioide / Herzkurve S99, 100

$$r = a(1 + \cos \varphi)$$

#### Lemniskate S101

$$r = a\sqrt{2 \cos(2\varphi)}$$

## 4 Reihen

### 4.1 Bemerkenswerte Reihen S19, 477

**Arithmetische Reihe** Sei  $a_1 \in \mathbb{R}$  und  $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dann aus der arithmetischen Folge  $\langle a_k \rangle$  mit  $a_k = a_1 +$

$(k - 1)d$  erhält man die Reihe  $\langle A_n \rangle$  mit:

$$A_n = a_1 + \sum_{k=1}^n (k - 1)d = a_1 + d + 2d + \dots + (n - 1)d$$

$$= \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

**Geometrische Reihe** Sei  $a_1 \in \mathbb{R}$  und  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ . Aus der geometrischen Folge  $\langle g_k \rangle$  mit  $g_k = a_1 q^k$  erhält man die Reihe  $\langle G_n \rangle$  mit:

$$G_n = a_1 \sum_{k=1}^n q^{k-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

**Harmonische Reihe** Aus der folge  $\langle h_k \rangle$  mit  $h_k = 1/k$  erhält man die Reihe  $\langle H_n \rangle$  mit:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

**Potenzreihe** Siehe §4.3

### 4.2 Unendlichen S470, 477

Sei  $\langle a_n \rangle$  eine Folge die Reihe  $\langle S_n \rangle$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

#### 4.2.1 Konvergenz S472, 475

**Absolute S475** Die Reihe  $S_n$  heißt *absolut konvergent* wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |a_k| \text{ konvergiert}$$

Wenn eine Reihe absolut konvergent ist, dann

1. sie ist auch konvergent.
2. die Glieder können nach Belieben miteinander vertauscht weden.
3. sei  $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_n$  ( $a_n$  und  $b_n$  abs. konvergent gegen  $a$  bzw.  $b$ ), dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

**Bedingte** Wenn die Reihe  $S_n$  nicht abs. konvergiert, aber es eine Umordnung gibt, sodaß die umgeordnete Reihe entweder divergent ist oder gegen eine von verschiedene Summe konvergiert. Dann heißt die Reihe *bedingt konvergent*.

#### 4.2.2 Konvergenzkriterien S472

**Cauchy'sches S475**

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$$

### Wurzelkriterium von Cauchy S474

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \implies \begin{cases} \alpha < 1 & \text{(abs.) konvergent} \\ \alpha > 1 & \text{divergent} \end{cases}$$

Wenn  $\alpha = 1$  man kann nicht direkt eine Konvergenz / Divergenz schliessen.

### Quotientenkriterium von d'Alambert S474

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \implies \begin{cases} \alpha < 1 & \text{(abs.) konvergent} \\ \alpha > 1 & \text{divergent} \end{cases}$$

### Leibniz'sches (für alternierenden Reihen) S476

Wenn  $\langle a_n \rangle$  eine alternierende Folge ist, dann gilt

$$\langle |a_n| \rangle \text{ ist eine monoton fallende Nullfolge} \\ \implies \langle s_n \rangle \text{ konvergiert}$$

**Integralkriterium S475** Sei  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in [1; \infty)$  und  $f \downarrow$ . Merkt man dass:

$$\overbrace{\int_1^n f(x) dx}^S \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq \overbrace{\int_2^{n+1} f(x-1) dx}^{\text{Auch } S}$$

Somit folgt:

$$\text{konvergiert } \int_1^\infty f(x) dx \implies \text{konvergiert } s$$

## 4.3 Potenzreihen S482

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\ = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$  (Wurzelkriterium)

$$a = 0 \implies \text{abs. konvergent}$$

$$a > 0 \implies \forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} |x| < 1/a : \text{abs. konvergent} \\ |x| > 1/a : \text{divergent} \end{cases}$$

### 4.3.1 Konvergenzradius/-bereich S482

Sei  $\langle \sqrt[n]{|a_n|} \rangle$  nicht beschränkt ( $a = \infty$ ), so ist  $P$  nur für  $x = x_0$  konvergent ( $r = 1/\infty = 0^+$ ). Sonst existiert der *Konvergenzradius*  $r \in \mathbb{R}^+$ :

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad r = \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

Innerhalb des *Konvergenzbereiches*  $\{x : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r; x_0 + r)$  ist die Reihe absolut konvergent, ausserhalb dessen ist sie divergent. Wenn  $r = \infty$  dann ist die Reihe abs. konvergent.

### 4.3.2 Funktion darstellen

### 4.3.3 Ableitung und Integration

Sei  $P$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $r > 0$ , die eine Funktion  $f$  darstellt. Innerhalb des Konvergenzradius gilt:

$$f'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ \int f dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

Höhere Ableitungen:

$$f^{(k)}(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

### 4.3.4 Taylor Polynom und Reihe S484

Der Taylor-Polynom approximiert eine Funktion um einen Entwicklungspunkt  $a$ .

$$T_n(x, a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_n \\ = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a)^1 + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots$$

Die Restglieder sind

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{(n+1)} \quad (\xi \in (x; a))$$

Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$  dann  $f(x) = T(x, a)$ , d.h. die Taylor Reihe zu  $f$  identisch ist (Konvergenzradius  $r = \infty$ ). Sonst berechnet man der *worst case* Fehler  $\epsilon \geq |R_n|$  und der dazugehörig  $\hat{\xi} = \arg \max_{\xi} |R_n|$ :

$$\epsilon = \max |R_n| = \max \left[ \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - a|^{(n+1)} \right]$$

## 5 Differentialgleichungen

### 5.1 Definition

Eine Funktion  $y = \varphi(x)$  heißt *allgemeine* Lösung der  $n$ -te Ordnung Differentialgleichung

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

auf dem Intervall  $I$ , wenn

- $\varphi$  auf  $I$   $n$ -mal differenzierbar ist
- $\forall x \in I : F(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n)}) = 0$

Gegeben seien auch der *Anfangspunkt*  $x_0$ , und die *Anfangswerte* oder *Anfangsbedingungen*  $y_0 = y(x_0)$ ,  $y_1 = y'(x_0)$ , ...,  $y_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0) \in \mathbb{R}$ . Dann hat man ein *Anfangswertproblem*, der eine *partikuläre* Lösung ergibt.

## 5.2 DGL 1. Ordnung

### 5.2.1 Lineare DGL 1. Ordnung

Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien auf demselben Intervall  $I$  stetig. Die Differentialgleichung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

heißt *homogen*, wenn  $g$  die Nullfunktion ( $= 0$ ) auf  $I$  ist, sonst *inhomogen*.  $g$  heißt Störglied. Die allgemeine Lösung ist

$$Y = \{y : y = y_H + y_P \text{ mit } y_H \in Y_H\}$$
$$y = e^{-F} \left[ k + \int g e^F dx \right] \quad k \in \mathbb{R}$$

### 5.2.2 Tricks

**Separation** Wenn die DGL die Form  $y' + f(x)p(y) = 0$  hat, dann lässt sie sich mit der Umformung

$$\frac{y'}{p(y)} = -f(x) \implies \int \frac{dy}{p(y)} = - \int f(x) dx$$

Ein Spezialfall  $p(y) = y$  (homogen lineare DGL) hat die allgemeine Lösung

$$y = k \exp \left[ - \int f(x) dx \right] = k e^{-F}$$

**Substitution Linearterm** Hat die DGL die Form  $y' = f(ax + by + c)$ , dann benutzt man die Substitution

$$z = ax + by + c \iff y(z) = b(z - c)/ax$$
$$z' = a + by' \implies z' = a + by'(z) \quad \text{separiert!}$$

Dann soll sie nach  $z$  lösen lassen.

**Gleichgradigkeit** Hat die DGL die Form  $y' = f(y/x)$   $x \neq 0$ , dann benutzt die Substitution

$$z = y/x \implies y' = z'x + z$$
$$\implies z' = \frac{1}{x} (y'(x) - z) \quad \text{separiert!}$$

## 5.3 DGL 2. Ordnung

### 5.3.1 Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Versuch mit  $y = Ae^{\lambda x}$

$$0 = A\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 A\lambda e^{\lambda x} + a_0 A e^{\lambda x}$$

$$0 = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

Der *charakteristische Polynom* hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right)$$

Falls  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann heißt er *Dämpfung*. Sonst ist  $\mathbb{C} \ni \lambda = k \pm j\alpha$ ,  $\alpha$  nennt man *Frequenz*. Daher hat die Lösung die Form:

$$Ce^{k \pm j\alpha} = A \exp \left( \frac{a_1}{2} x \right) \cos(\alpha x) + B \exp \left( \frac{a_1}{2} x \right) \sin(\alpha x)$$

## Literatur

- [1] An2E Vorlesungen an der Hochschule für Technik Rapperswil und der dazugehörige Skript, Dr. Bernhard Zraggen, Frühlingssemester 2020
- [2] Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage, 2016 (1977), Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig, ISBN 978-3-8085-5789-1
- [3] Mathematik 2: Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, 2012, 7. Auflage, XII, Springer Berlin, Albert Fetzter, Heiner Fränkel, ISBN-10 364224114X, ISBN-13 9783642241147

## Notation

Rot markierte Zahlen wie zB S477 sind Hinweise auf die Seiten im "Bronstein" [2]

- $C^n$  ist der Menge der glatten  $n$ -mal differenzierbaren Funktionen.
- Das Zeichen  $\forall$  bedeutet "für alle"

## License

An2E-ZF (c) by Naoki Pross

An2E-ZF is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 Unported License.

You should have received a copy of the license along with this work. If not, see

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Tabelle 1: Rechnungen bez. ebene Kurven

Ebene Kurven	Kartesisch $y = f(x)$	Polar $r(\varphi)$	Parameter $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$
Anstieg <b>S448</b>	$f'$	$\frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$	$\dot{x}/\dot{y}$
Fläche <b>S493</b>	$\int_a^b  f(x)  dx$	$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 d\varphi$	$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} xy - \dot{x}y dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \det(\dot{\mathbf{c}}, \dot{\mathbf{c}}) dt$
Bogenlänge <b>S254, 514</b>	$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx$	$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi$	$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{t_0}^{t_1}  \dot{\mathbf{c}}  dt$
Krümmung $\kappa$ <b>S254</b>	$\frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}^3}$	$\frac{2(r')^2 - rr'' + r^2}{\sqrt{r^2 + (r')^2}^3}$	$\frac{\dot{y}\dot{x} - \ddot{y}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3} = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})}{ \dot{\mathbf{c}} ^3}$
Rotationsvolumen um $x$ <b>S516</b>	$\pi \int_a^b y^2 dx$	$\pi \left  \int_{t_0}^{t_1} y \dot{x} dt \right $	$\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \sin^2 \varphi (r' \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi$
Rotationsoberfläche um $x$ <b>S515</b>	$2\pi \int_a^b  y  \sqrt{1 + (y')^2} dx$	$2\pi \int_{\alpha}^{\beta}  r \sin(\varphi)  \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi$	$2\pi \int_{t_0}^{t_1}  y  \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$