

1 Integration S493, 507

1.1 Tricks S495

Linearität S495

$$\int k(u+v) = k \left(\int u + \int v \right)$$

Partialbruchzerlegung S15, 498

$$\int \frac{f(x)}{P_n(x)} dx = \sum_{k=1}^n \int \frac{A_k}{x-r_k} dx$$

Elementartransformation S496

$$\int f(\lambda x + \ell) dx = \frac{1}{\lambda} F(\lambda x + \ell) + C$$

Partielle Integration S497

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Potenzenregel S496

$$\int u^n \cdot u' = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

Logarithmusregel S496

$$\int \frac{u'}{u} = \ln |u| + C$$

Allgemeine Substitution S497

$x = g(u)$, und $dx = g'(u) du$

$$\int f(x) dx = \int (f \circ g) g' du = \int \frac{f \circ g}{(g^{-1})' \circ g} du$$

Universalsubstitution S504

$$\begin{aligned} t = \tan(x/2) & \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2 dt}{1+t^2} & \quad \cos(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

Womit

$$\int f(\sin(x), \cos(x), \tan(x)) dx = \int g(t) dt$$

1.2 Uneigentliches Integral S520

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f dx &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f dx \\ \int_{-\infty}^b f dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f dx \\ \int_{-\infty}^\infty f dx &= \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_A^B f dx \end{aligned}$$

3 Ebene S250 und Raumkurven S263

Wenn f im Punkt $u \in (a, b)$ nicht definiert ist.

$$\int_a^b f dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^{u-\epsilon} f dx + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{u+\delta}^b f dx \quad (1.2.1)$$

1.3 Cauchy Hauptwert S523

Der C.H. (oder PV für *Principal Value* auf Englisch) eines uneigentlichen Integrals ist der Wert, wenn in einem Integral wie (1.2.1) beide Grenzwerte mit der gleichen Geschwindigkeit gegen 0 sterben.

$$\text{C.H.} \int_a^b f dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{u-\epsilon} f dx + \int_{u+\epsilon}^b f dx \right)$$

Zum Beispiel x^{-1} ist nicht über \mathbb{R} integrierbar, wegen des Poles bei 0. Aber intuitiv wie die Symmetrie vorschlägt

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx = 0$$

1.4 Majorant-, Minorantenprinzip und Konvergenzkriterien S521, 473, 479, 481

Gilt für die Funktionen $0 < f(x) \leq g(x)$ mit $x \in [a, \infty)$

$$\text{konvergiert} \int_a^\infty g dx \implies \text{konvergiert} \int_a^\infty f dx$$

Die selbe gilt umgekehrt für Divergenz. Wenn $0 < h(x) \leq f(x)$

$$\text{divergiert} \int_a^\infty h dx \implies \text{divergiert} \int_a^\infty f dx$$

g und h heißen Majorant und Minorant bzw.

2 Implizite Ableitung S448

Alle normale differenzierungsregeln gelten.

$$dy = y' dx$$

Ebene Kurven	Explizit	Polar	Parameter
Bogenlänge S251	$\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2} \, d\varphi$	$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{c}' \, dt$
Fläche	$\int_a^b f(x) \, dx$	$\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r(\varphi)^2 \, d\varphi$	$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} xy - \dot{x}y \, dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \det(\mathbf{c}, \mathbf{c}') \, dt$
Rotationsvolumen um x	$\pi \left \int_a^b y^2 \, dx \right $	$\pi \left \int_{t_0}^{t_1} y\dot{x} \, dt \right $	$\pi \left \int_\alpha^\beta r^2 \sin^2 \varphi (r' \cos \varphi - r \sin \varphi) \, d\varphi \right $
Rotationsoberfläche um x	$2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$	$2\pi \int_\alpha^\beta r \sin(\varphi) \sqrt{(r')^2 + r^2} \, d\varphi$	$2\pi \int_{t_0}^{t_1} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$

3.1 Darstellungen

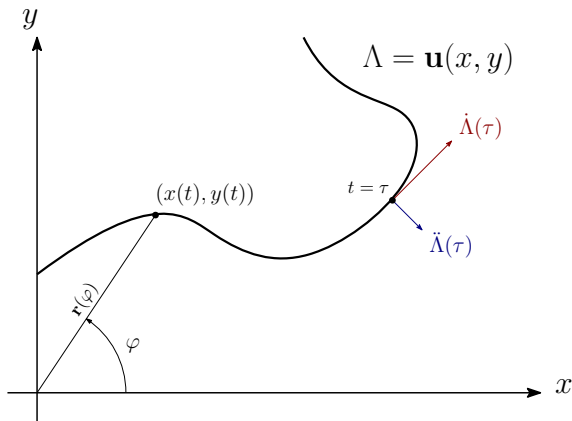


Abbildung 1: Die ebene Kurve $\Lambda(t)$ kann Explizit (in diesem Fall nicht), Implizit $\mathbf{u}(x, y)$, Polar $\mathbf{r}(\varphi)$ oder in Parameterform $(x(t), y(t))$ dargestellt werden.

3.2 Krümmung

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

$$\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}) |\mathbf{c}|^{-3} \stackrel{3D}{=} |\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}| |\mathbf{c}|^{-3}$$

Literatur

- [1] An2E Vorlesungen an der Hochschule für Technik Rapperswil und der dazugehörige Skript, Dr.

Bernhard Zraggen, Frühlingssemester 2020

- [2] Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage, 2016 (1977), Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig, ISBN 978-3-8085-5789-1
- [3] Mathematik 2 Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, 2012, 7. Auflage, XII, Springer Berlin, Albert Fetzer, Heiner Fränkel, ISBN-10 364224114X, ISBN-13 9783642241147

Notation

Rot markierte Zahlen wie zB S477 sind Hinweise auf die Seiten in der "Bronstein": "Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage". ISBN 978-3-8085-5789-1

License

An2E-ZF (c) by Naoki Pross

An2E-ZF is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 Unported License.

You should have received a copy of the license along with this work. If not, see

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>