1 Integration S493,507

1.1 Tricks S495

Linearität S495

$$\int k(u+v) = k\left(\int u + \int v\right)$$

Partialbruchzerlegung S15,498

$$\int \frac{f(x)}{P_n(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int \frac{A_k}{x-r_k}\,\mathrm{d}x$$

Elementartransformation S496

$$\int f(\lambda x+\ell)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}F(\lambda x+\ell)+C$$

Partielle Integration S497

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Potenzenregel S496

$$\int u^n \cdot u' = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Logaritmusregel S496

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + C$$

Allgemeine Substutution S497
$x = g(u)$, und $\mathrm{d}x = g'(u)\mathrm{d}u$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (f\circ g)\; g'\,\mathrm{d}u = \int \frac{f\circ g}{(g^{-1})'\circ g}\,\mathrm{d}u$$

Universalsubstitution S504

$$t = \tan(x/2) \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \cos(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Womit

$$\int f(\sin(x),\cos(x),\tan(x))\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

1.2 Uneigentliches Integral S520

$$\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to\infty}\int_a^B f\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^b f\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^\infty f\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\int_A^B f\,\mathrm{d}x$$

Wenn f im Punkt $u \in (a,b)$ nicht definiert ist.

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0}\int_a^{u-\epsilon} f\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to+0}\int_{u+\delta}^b f\,\mathrm{d}x \tag{1.2.1}$$

1.3 Cauchy Hauptwert S523

Der C.H. (oder PV für *Principal Value* auf Englisch) eines uneigentlichen Integrals ist der Wert, wenn in einem Integral wie (1.2.1) beide Grenzwerte mit der gleiche Geschwindigkeit gegen 0 streben.

$$\text{C.H.}\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_a^{u-\epsilon} f\,\mathrm{d}x + \int_{u+\epsilon}^b f\,\mathrm{d}x\right)$$

Zum Beispiel x^{-1} ist nicht über $\mathbb{R}$ integrierbar, wegen des Poles bei 0. Aber intuitiv wie die Symmetrie vorschlagt

$$\text{C.H.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0$$

1.4 Majorant-, Minorantenprinzip und Konvergenzkriterien S521,473,479,481

Gilt für die Funktionen $0 < f(x) \leq g(x)$ mit $x \in [a,\infty)$

$$\text{konvergiert}\int_a^\infty g\,\mathrm{d}x \implies \text{konvergiert}\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x$$

Die selbe gilt umgekehrt für Divergenz. Wenn $0 < h(x) \leq f(x)$

$$\text{divergiert}\int_a^\infty h\,\mathrm{d}x \implies \text{divergiert}\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x$$

g und h heißen Majorant und Minorant bzw.

2 Implizite Ableitung S448

$$(af)' = af' \qquad (u(v(x)))' = u'(v)v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$\left(\sum u_i\right)' = \sum u_i' \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Alle normale differenziazionsregeln für $f(x)$ gelten. Allgemeiner für die implizite Funktion $F(x,y) = 0$

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0$$

3 Differentialgeometrie

3.1 Ebene Kurven S250

3.1.1 Darstellungen und Umwanldung

Sei $\Lambda : x = \phi(t),\, y = \psi(t), t \in I$ eine glatte Jordankurve. Beispiel in Abb. 1.

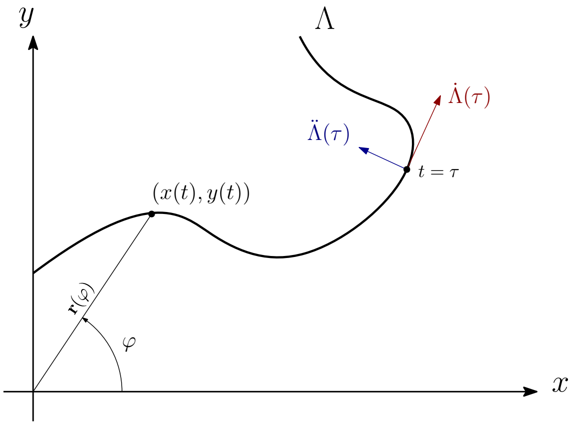

Abbildung 1: Die ebene Kurve $\mathbf{\Lambda}(t)$ kann Explizit $y(x)$ (in diesem Fall nicht), Implizit $\mathbf{u}(x, y) = 0$, Polar $\mathbf{r}(\varphi)$ oder in Parameterform $(x(t), y(t))$ dargestellt werden.

Polar zu Kartesian

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = y/x$$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Parametrisch zu explizit Sei $\dot{\phi} \neq 0$ oder $\dot{\psi} \neq 0$. Im Falle $\dot{\phi} \neq 0$, wechselt $\dot{\phi}$ in der Umgebung von t das Vorzeichen nicht, ϕ ist dort streng monoton. Daher gilt

$$t = \phi^{-1}(x) \quad y = \psi(t) = \psi \circ \phi^{-1}(x) = f(x)$$

Wenn $\dot{\psi} \neq 0$ ist dann $x = \phi \circ \psi^{-1}(y)$

3.1.2 Bogenlänge S251,514

Weitere Formeln (z.B. polar) findet man in Tab. 1.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}\, \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{c}}|\, \mathrm{d}t$$

3.1.3 Umparametrisierung nach Bogenlänge

Sei die Kurve $\mathbf{\Lambda}(t), t \in I$ mindestens einmal differenzierbar, und ℓ die Bogenlänge (gemäß §3.1.2) im Intervall. Die Umparametrisierung $\mathbf{\Lambda}(s)$ ist dann

$$s = \ell t \implies \mathbf{\Lambda}(s) = \mathbf{\Lambda}(t/\ell)$$

Die neue Parametrisierung hat $\mathbf{\Lambda}' = 1$ (nach s differenziert), d.h. die erste Ableitung ist der tangent Einheitsvector!

3.1.4 Tangente und Normalvektor S251,252

Für eine ebene Kurve $\mathbf{\Lambda}(t)$ $\tau, t \in I$, der Vektor $\dot{\mathbf{\Lambda}}(\tau)$ ist immer an $\mathbf{\Lambda}(\tau)$ tangent. $\ddot{\mathbf{\Lambda}}(\tau)$ ist zur Kurve normal.

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

$$\ddot{\mathbf{\Lambda}} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

Man kann auch die Tangentengleichung und die Normalengleichung zur Zeitpunkt τ finden

$$T : y - \psi(\tau) = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}}(x - \phi(\tau))$$

$$N : y - \psi(\tau) = -\frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}}(x - \phi(\tau))$$

3.1.5 Krümmung und Krümmungsradius S254

Siehe Tab. 1 für die Rechnungsformeln und Abb. 2 für eine graphische Deutung.

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \qquad R = 1/\kappa$$

Eine gerade hat $\kappa = 0$ und $R = \infty$. Entsprechend der Orientierung der x-Achse, entspricht einer $\kappa > 0$ eine Linkskrümmung und $\kappa < 0$ eine Rechtskrümmung.

Der Krümmungskreis hat Maßzahl $\rho = 1/|\kappa|$ und Mittelpunkt P_c gemäß

$$P_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa}\widehat{\mathbf{n}}$$

Wobei $\widehat{\mathbf{n}} = \mathbf{\Lambda}^0$ ist der Normalvektor.

3.1.6 Konvexität

Sei die Kurve Λ durch $f \in C^2$ auf $[a, b]$ gegeben.

- f ist auf (a, b) konvex (bzw. konkav), wenn $\kappa \geq 0$ (bzw. $\kappa \leq 0$) $\forall x \in (a, b)$.
- f ist auf (a, b) streng konvex (bzw. konkav), wenn $\kappa > 0$ (bzw. $\kappa < 0$) $\forall x \in (a, b)$.
- Hat in Λ in P einen Wendepunkt, dann $\kappa(P) = 0$.

3.1.7 Evoluten und Evolventen S262

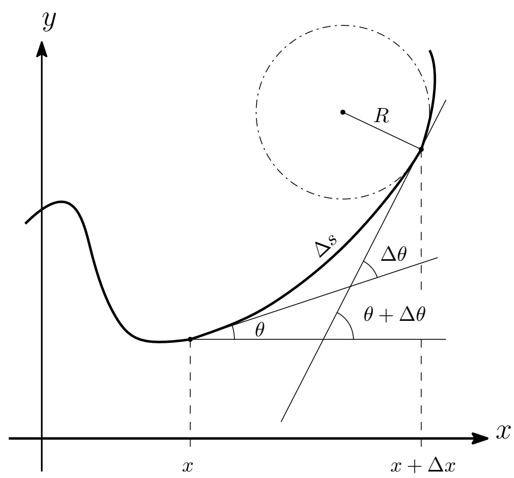

Abbildung 2: Krümmung und Krümmungskreisradien

3.2 Raumkurven S263

3.3 Kurven 2. Ordnung – Kegelschnitt S212

Die Polarform für die allgemeine Gleichung der Kurver 2. Ordnung ist

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \tag{3.3.1}$$

Im kartesiche Form

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 0 \tag{3.3.2}$$

Die Parameter a, b bzw, ε ändern die Gestalt folgendermaßen

- $\varepsilon = 0$ Kreis
- $|\varepsilon| \in (0;1)$ Ellipse
- $|\varepsilon| = 1$ Parabel
- $|\varepsilon| > 1$ Hyperbel

3.3.1 Kreis S204

Kartesisch	$(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = r^2$
Parameter	$x = c_x + R\cos t \quad y = c_y + R\sin t$

3.3.2 Ellipse S205

Kartesisch	$\left(\frac{x - C_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - C_y}{b}\right)^2 = 1$
Parameter	$x = a\cos t \quad y = b\sin t$

3.3.3 Hyperbel S207

Kartesisch	$\left(\frac{x - C_x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - C_y}{b}\right)^2 = 1$
Parameter	$x = a\cosh t \quad y = b\sinh t$

3.3.4 Parabel S210

Kartesisch	$y = ax^2 + bx + c$
Parameter	$x = t \quad y = at^2 + bt + c$

3.4 Kurven 4. Ordnung S98

Kardioide / Herzkurve S99,100

$$r = a(1 + \cos \varphi)$$

Lemniskate S101

$$r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$$

4 Reihen

4.1 Bemerkenswerte Rehien S19,477

Arithmetische Reihe Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann aus der arithmetischen Folge $\langle a_k \rangle$ mit $a_k = a_1 + (k-1)d$ erhält man die Reihe $\langle A_n \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n} (k-1)d = a_1 + d + 2d + \cdots + (n-1)d \\ &= \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

Geometrische Reihe Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. Aus der geometrischen Folge $\langle g_k \rangle$ mit $g_k = a_1 q^k$ erhält man die Reihe $\langle G_n \rangle$ mit:

$$G_n = a_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Harmonische Reihe Aus der folge $\langle h_k \rangle$ mit $h_k = 1/k$ erhält man die Reihe $\langle H_n \rangle$ mit:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Achtung: $H = \lim_{n\to\infty} H_n$ konvergiert nicht!

Potenzreihe Siehe §4.3

4.2 Unendlichen S470,477

Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge die Reihe $\langle S_n \rangle$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

4.2.1 Konvergenz S472,475

Absolute S475 Die Reihe S_n heißt *absoulut konvergent* wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \text{ konvergiert}$$

Wenn eine Reihe absolut konvergent ist, dann

1. sie ist auch konvergent.
2. die Glieder können nach Belieben miteinander vertauscht weden.
3. sei $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n$ (a_n und b_n abs. konvergent gegen a bzw. b), dann
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Bedingte Wenn die Reihe S_n nicht abs. konvergiert, aber es eine Umordnung gibt, sodaß die umgeordnete Reihe entweder divergent ist oder gegen eine von verschiedene Summe konvergiert. Dann heißt die Reihe *bedingt konvergent*.

4.2.2 Konvergenzkriterien S472

Cauchy'sches S475

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

Wurzelkriterium von Cauchy S474

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \implies \begin{cases} \alpha < 1 & \text{(abs.) konvergent} \\ \alpha > 1 & \text{divergent} \end{cases}$$

Wenn $\alpha = 1$ man kann nicht direkt eine Konvergenz / Divergenz schliessen. Hinweise: Seien $a > 0$ eine Konstante, p ein Polynom und r eine rationale Funktion.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|p(n)|} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|r(n)|} = 1$$

Quotientenkriterium von d'Alambert S474

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \implies \begin{cases} \alpha < 1 & \text{(abs.) konvergent} \\ \alpha > 1 & \text{divergent} \end{cases}$$

Leibniz'sches (für alternierenden Reihen) S476
Wenn $\langle a_n \rangle$ eine alterniende Folge ist, dann gilt

$$\langle |a_n| \rangle \text{ ist eine monoton fallende Nullfolge}$$
$$\implies \langle s_n \rangle \text{ konvergiert}$$

Integralkriterium S475 Sei $f(x) \geq 0$, $x \in [1; \infty)$ und $f \downarrow$. Merkt man dass:

$$\overbrace{\int_1^n f(x) \mathrm{d}x}^{S} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \overbrace{\int_2^n f(x-1) \mathrm{d}x}^{\text{Auch } S}$$

Somit folgt:

$$\text{konvergiert} \int_1^\infty f(x) \mathrm{d}x \implies \text{konvergiert } s$$

Majorantenkriterium

4.3 Potenzreihen S482

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\ &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Sei $\lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} = a$ (Wurzelkriterium)

$$a = 0 \implies \text{abs. konvergent}$$

$$a > 0 \implies \forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} |x| < 1/a : & \text{abs. konvergent} \\ |x| > 1/a : & \text{divergent} \end{cases}$$

4.3.1 Konvergenzradius/-bereich S482

Sei $\langle \sqrt{|a_n|} \rangle$ nicht beschränkt ($a = \infty$), so ist P nur für $x = x_0$ konvergent ($r = 1/\infty = 0^+$). Sonst existiert der *Konvergenzradius* $r \in \mathbb{R}^+$:

$$r = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad r = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

Innerhalb des *Konvergenzbereiches* $\{x : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r; x_0 + r)$ ist die Reihe absolut konvergent, ausserhalb dessen ist sie divergent. Wenn $r = \infty$ dann ist die Reihe abs. konvergent.

4.3.2 Funktion darstellen S763

Weil innerhalb des Konvergezbereiches die Reihe absolut konvergent ist, muss im Bereich $(x_0 - r; x_0 + r)$ eine stetige Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ existieren, die gleichmässig zu einer anderen Funktion konvergieren (und somit sie darstellen) kann.

Wenn eine Funktion $g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $(x_0 - r; x_0 + r) = B \subseteq E$ mit einer Potenzreihe dargestellt werden kann, dann sagt man g ist *im Gebiet B reell analytisch.*

4.3.3 Ableitung und Integration

Sei P eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$, die eine Funktion f darstellt. Innerhalb des Konvergenzradius gilt:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\int f \, \mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

Höhere Ableitungen:

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

4.3.4 Taylor Polynom und Reihe S484,765

Der Taylor-Polynom approximiert eine Funktion um einen Entwicklungspunkt a.

$$\begin{aligned} T_n(x, a) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Die Restgliede sind

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{(n+1)} \qquad (\xi \in (x; a))$$

Wenn $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ dann $f(x) = T(x, a)$, d.h. die Taylor Rehie zu f identisch ist (Konvergenzradius $r = \infty$). Sonst berechnet man der *worst case* Fehler $\epsilon \geq |R_n|$ und der dazugehörig $\hat{\xi} = \arg\max_{\xi} |R_n|$:

$$\epsilon = \max |R_n| = \max \left[\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - a|^{(n+1)} \right]$$

5 Differentialgleichungen S553

5.1 Definition

Eine Funktion $y = \varphi(x)$ heißt *allgemeine* Lösung der implizite n-te Ordnung Differentialgleichung

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

auf dem Intervall I, wenn

- φ auf I n-mal differenzierbar ist
- $\forall x \in I : F(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n)}) = 0$

Da mehr Lösungen existieren können, es gibt eine Menge von Lösungen

$$Y = \left\{ y \in C^n : F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \right\}$$

Gegeben seien können auch der *Anfangspunkt* x_0, und die *Anfangswerte* oder *Anfangsbedingungen* $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y'(x_0)$, ..., $y_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Dann hat man ein *Anfangswertproblem*, die eine Lösung $y \in Y$ ergibt.

5.2 Existenz und Eindeutigkeitssatz (Picard-Lindelöf) S554,556,560

Sei die DGL folgendermäßen umgeformt

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Dann hat die DGL eine eindeutige Lösung, wenn

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \text{ stetig} \quad \exists \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}(y_k) \text{ stetig} \quad 0 \le k < n$$

d.h. die partielle Ableitung nach $x, y, y', \cdots$ an der Anfangswerte $x_0, y_0, y_1, \dots$ existieren und stetig sind.

5.3 Lineare DGL

Linearität heißt

$$L(y + z) = L(y) + L(z) \qquad L(\mu y) = \mu L(y)$$

Wenn $u_1(x), u_2(x), \dots \in Y$, eine lineare DGL $L(y) = 0$ lösen d.h. $L(u_k) = 0$. Dann sind auch alle lineare Kombinationen Lösungen

$$\overbrace{\mu_1 L(u_1)}^{\mu_1 \cdot 0} + \mu_2 L(u_2) + \cdots = 0 = L(\overbrace{\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots}^{\text{lineare Komb.}})$$

5.3.1 Homogene, inhomogene und partikuläre Lösungen

Seien $g(x)$ und alle $a_k(x)$ $(0 \le k \le n)$ auf den Intervall I stetig. Für die lineare Differenzialgleichung

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = g(x)$$

- Wenn $g(x) = 0$, heißen sie und seine Lösungen *homogen* $\iff y_H \in Y_H : L(y_H) = 0$.
- Wenn $g(x) \neq 0$, dann heißen seine Lösungen *partikuläre* Lösungen $\iff y_P \in Y_p : L(y_p) = g(x)$.
- Wegen Linearität, die Summe von μy_H und y_p sind wieder Lösungen der DGL. Solche Lösungen nennt man *allgemeine* Lösungen. $\iff$

$$\begin{aligned} y_H + y_p = y \in Y : L(y) &= L(y_H + y_p) \\ &= L(y_H) + L(y_p) \\ &= L(y_p) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Der Lösungsmenge ist dann

$$Y = \{ y_H \in Y_H, y_p \in Y_p : y = y_H + y_p \}$$

5.4 DGL 1. Ordnung S554

5.4.1 Lineare DGL 1. Ordnung S556

Die Allgemeine Lösung ist

$$Y = \{ y_H \in Y_H : y = y_H + y_P \}$$

$$y = e^{-F} \left[k + \int g e^F \, \mathrm{d}x \right] \qquad k \in \mathbb{R}$$

5.4.2 Tricks

Separation Wenn die DGL die Form $y' + f(x)p(y) = 0$ hat, dann lässt sie sich mit der Umformung

$$\frac{y'}{p(y)} = -f(x) \implies \int \frac{\mathrm{d}y}{p(y)} = -\int f(x) \, \mathrm{d}x$$

Ein Speziallfall $p(y) = y$ (homogen lineare DGL) hat die allgemeine Lösung

$$y = k \exp\left[-\int f(x) \, \mathrm{d}x \right] = k e^{-F}$$

Substitution Linearterm Hat die DGL die Form $y' = f(ax + by + c)$, dann benutzt man die Substitution

$$\begin{aligned} z = ax + by + c &\iff y(z) = b(z - c)/ax \\ z' = a + by' &\implies z' = a + by'(z) \quad \text{separiert!} \end{aligned}$$

Dann soll sie nach z lösen lassen.

Gleichgradigkeit Hat die DGL die Form $y' = f(y/x)$ $\quad x \neq 0$, dann benutzt die Substitution

$$\begin{aligned} z = y/x &\implies y' = z'x + z \\ &\implies z' = \frac{1}{x}(y'(x) - z) \quad \text{separiert!} \end{aligned}$$

5.5 Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten S569

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

5.5.1 Homogene Lösung ($g = 0$)

Sei angenommen dass $y = Ce^{\lambda x}$ eine Lösung ist

$$\begin{aligned} 0 &= C\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 C\lambda e^{\lambda x} + a_0 Ce^{\lambda x} \\ 0 &= \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \end{aligned}$$

Der *charakteristische Polynom* hat die Lösungen

$$\lambda_{12} = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right)$$

Die homogene Lösung ist dann

$$y_H = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Falls $\lambda \in \mathbb{R}$, dann heißt er *Dämpfung*. Sonst ist $\mathbb{C} \ni \lambda = k \pm j\alpha$, α nennt man *Frequenz*. Daher hat die Lösung die Form:

$$Ce^{k \pm j\alpha} = A\exp\left(\frac{a_1}{2}x\right)\cos(\alpha x) + B\exp\left(\frac{a_1}{2}x\right)\sin(\alpha x)$$

5.5.2 Inhomogene Lösung ($g \neq 0$)

NB: Lösungsmethoden für n-te Ordnung DGL in §5.6.2 könne auch verwendet werden.

Methode der unbestimmten Koeffizienten

Faltung Die Faltung Integral ergibt die partikuläre Loesung einer 2. Ordunung Differenzialgleichung mit Anfangsbedingungen $g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) = 1$.

$$y_p = f * g = \int_{x_0}^{x} g(x + x_0 - t) f(t)\, \mathrm{d}t$$

5.6 Lineare DGL n-te Ordnung mit konstanten Koeffizienten S569,567

5.6.1 Homogene Lösung

Sei angenommen dass, die Lösungen Form $y = Ce^{\lambda x}$ haben, dann

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0 \implies p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$$

die Nullstellen von $p(\lambda)$ ergeben n Lösungen $C_k e^{\lambda_k x}$. Wie schon diskutiert, alle lineare Kombinationen sind wieder Lösungen.

$$y_H = \sum_{k=0}^{n} C_k e^{\lambda_k x} \quad \forall k < n : C_k \in \mathbb{R}$$

5.6.2 Inhomogene oder partikuläre Lösung

Variation der Konstanten

5.7 Systeme von Differenzialgleichungen S564

5.8 Orthogonale Trajektorien

Sei $f(x, y, c) = 0$ eine Kurvenschar. Man findet eine DGL $F(x, y, y') = 0$, die die Kurvenschar beschreibt (ohne die freie Variable c).

Dann die DGL $G = F(x, y, -1/y') = 0$ beschreibt die *orthogonale Trajektorien* zur Kurvenschar. Die lösung von G ergibt die Kurvenschar $g(x, y, c)$ und wieder $\forall x, y, c : g(x, y, c) \perp f(x, y, c)$.

Literatur

[1] An2E Vorlesungen an der Hochschule für Technik Rapperswil und der dazugehörige Skript, *Dr. Bernhard Zgraggen*, Frühlingssemester 2020

[2] Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage, 2016 (1977), *Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig*, ISBN 978-3-8085-5789-1

[3] Mathematik 2: Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, 2012, 7. Auflage, XII, Springer Berlin, *Albert Fetzer, Heiner Fränkel*, ISBN-10 364224114X, ISBN-13 9783642241147

[4] Analysis II, Third Edition 2017 (Jan. 2006), Hindustan Book Agency, *Terence Tao*, ISBN-10 818593195X, ISBN-13 978-8185931951

Notation

Rot markierte Zahlen wie zB S477 sind Hinweise auf die Seiten im “Bronstein” [2]

- C^n ist der Menge der glatten n-mal differenzierbären Funktionen.
- Das Zeichen $\forall$ bedeutet “für alle”

License

Tabelle 1: Rechnungen bez. ebene Kurven

Ebene Kurven	**Kartesich** $y = f(x)$	**Polar** $\mathbf{r}(\varphi)$	**Parameter** $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(y))$
Anstieg S448	f'	$\dfrac{r' \sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$	$\dot{x}/\dot{y}$
Fläche S493	$\int\limits_a^b \lvert f(x)\rvert \,\mathrm{d}x$	$\dfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r(\varphi)^2 \,\mathrm{d}\varphi$	$\dfrac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} x\dot{y} - \dot{x}y \,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} \det(\mathbf{c}, \dot{\mathbf{c}}) \,\mathrm{d}t$
Bogenlänge S251,514	$\int\limits_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \,\mathrm{d}x$	$\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2} \,\mathrm{d}\varphi$	$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \,\mathrm{d}t = \int\limits_{t_0}^{t_1} \lvert\dot{\mathbf{c}}\rvert \,\mathrm{d}t$
Krümmung κ S254	$\dfrac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}^3}$	$\dfrac{2(r')^2 - rr'' + r^2}{\sqrt{r^2 + (r')^2}^3}$	$\dfrac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3} = \dfrac{\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})}{\lvert\dot{\mathbf{c}}\rvert^3}$
Rotationsvolumen um x S516	$\pi \left\lvert \int\limits_a^b y^2 \,\mathrm{d}x \right\rvert$	$\pi \left\lvert \int\limits_{t_0}^{t_1} y\dot{x} \,\mathrm{d}t \right\rvert$	$\pi \left\lvert \int\limits_\alpha^\beta r^2 \sin^2\varphi (r'\cos\varphi - r\sin\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \right\rvert$
Rotationsoberfläche um x S515	$2\pi \int\limits_a^b \lvert y\rvert \sqrt{1 + (y')^2} \,\mathrm{d}x$	$2\pi \int\limits_\alpha^\beta \lvert r\sin(\varphi)\rvert \sqrt{(r')^2 + r^2} \,\mathrm{d}\varphi$	$2\pi \int\limits_{t_0}^{t_1} \lvert y\rvert \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \,\mathrm{d}t$