1 Integration S493,507

1.1 Tricks S495

Linearität S495

$$\int k(u+v) = k\left(\int u + \int v\right)$$

Partialbruchzerlegung S15,498

$$\int \frac{f(x)}{P_n(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int \frac{A_k}{x-r_k}\,\mathrm{d}x$$

Elementartransformation S496

$$\int f(\lambda x + \ell)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}F(\lambda x + \ell) + C$$

Partielle Integration S497

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Potenzenregel S496

$$\int u^n \cdot u' = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Logaritmusregel S496

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + C$$

Allgemeine Substutution S497
$x = g(u)$, und $\mathrm{d}x = g'(u)\mathrm{d}u$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (f\circ g)\; g'\,\mathrm{d}u = \int \frac{f\circ g}{(g^{-1})'\circ g}\,\mathrm{d}u$$

Universalsubstitution S504

$$t = \tan(x/2) \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \cos(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Womit

$$\int f(\sin(x), \cos(x), \tan(x))\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

1.2 Uneigentliches Integral S520

$$\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to\infty}\int_a^B f\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^b f\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^\infty f\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\int_A^B f\,\mathrm{d}x$$

Wenn f im Punkt $u \in (a,b)$ nicht definiert ist.

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0}\int_a^{u-\epsilon} f\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to+0}\int_{u+\delta}^b f\,\mathrm{d}x \tag{1.2.1}$$

1.3 Cauchy Hauptwert S523

Der C.H. (oder PV für *Principal Value* auf Englisch) eines uneigentlichen Integrals ist der Wert, wenn in einem Integral wie (1.2.1) beide Grenzwerte mit der gleiche Geschwindigkeit gegen 0 streben.

$$\text{C.H.}\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_a^{u-\epsilon} f\,\mathrm{d}x + \int_{u+\epsilon}^b f\,\mathrm{d}x\right)$$

Zum Beispiel x^{-1} ist nicht über $\mathbb{R}$ integrierbar, wegen des Poles bei 0. Aber intuitiv wie die Symmetrie vorschlagt

$$\text{C.H.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0$$

1.4 Majorant-, Minorantenprinzip und Konvergenzkriterien S521,473,479,481

Gilt für die Funktionen $0 < f(x) \leq g(x)$ mit $x \in [a,\infty)$

$$\text{konvergiert}\int_a^\infty g\,\mathrm{d}x \implies \text{konvergiert}\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x$$

Die selbe gilt umgekehrt für Divergenz. Wenn $0 < h(x) \leq f(x)$

$$\text{divergiert}\int_a^\infty h\,\mathrm{d}x \implies \text{divergiert}\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x$$

g und h heißen Majorant und Minorant bzw.

2 Implizite Ableitung S448

$$(af)' = af' \qquad (u(v(x)))' = u'(v)v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\sum u_i\right)' = \sum u_i' \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Alle normale differenziazionsregeln für $f(x)$ gelten. Allgemeiner für die implizite Funktion $F(x,y) = 0$

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0$$

3 Differentialgeometrie

3.1 Ebene Kurven S250

3.1.1 Darstellungen und Umwanldung

Sei $\Lambda : x = \phi(t),\, y = \psi(t), t \in I$ eine glatte Jordankurve. Beispiel in Abb. 1.

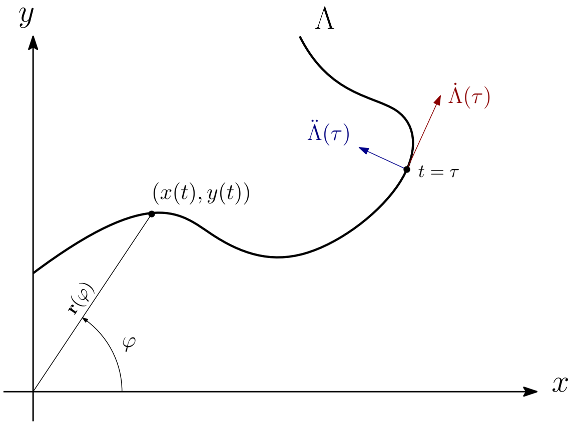

Abbildung 1: Die ebene Kurve $\mathbf{\Lambda}(t)$ kann Explizit $y(x)$ (in diesem Fall nicht), Implizit $\mathbf{u}(x, y) = 0$, Polar $\mathbf{r}(\varphi)$ oder in Parameterform $(x(t), y(t))$ dargestellt werden.

Polar zu Kartesian

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = y/x$$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Parametrisch zu explizit Sei $\dot{\phi} \neq 0$ oder $\dot{\psi} \neq 0$. Im Falle $\dot{\phi} \neq 0$, wechselt $\dot{\phi}$ in der Umgebung von t das Vorzeichen nicht, ϕ ist dort streng monoton. Daher gilt

$$t = \phi^{-1}(x) \quad y = \psi(t) = \psi \circ \phi^{-1}(x) = f(x)$$

Wenn $\dot{\psi} \neq 0$ ist dann $x = \phi \circ \psi^{-1}(y)$

3.1.2 Bogenlänge S251,514

Weitere Formeln (z.B. polar) findet man in Tab. 1.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}\,\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{c}}|\,\mathrm{d}t$$

3.1.3 Umparametrisierung nach Bogenlänge

Sei die Kurve $\mathbf{\Lambda}(t), t \in I$ mindestens einmal differenzierbar, und ℓ die Bogenlänge (gemäß §3.1.2) im Intervall. Die Umparametrisierung $\mathbf{\Lambda}(s)$ ist dann

$$s = \ell t \implies \mathbf{\Lambda}(s) = \mathbf{\Lambda}(t/\ell)$$

Die neue Parametrisierung hat $\mathbf{\Lambda}' = 1$ (nach s differenziert), d.h. die erste Ableitung ist der tangent Einheitsvector!

3.1.4 Tangente und Normalvektor S251,252

Für eine ebene Kurve $\mathbf{\Lambda}(t)$ $\tau, t \in I$, der Vektor $\dot{\mathbf{\Lambda}}(\tau)$ ist immer an $\mathbf{\Lambda}(\tau)$ tangent. $\ddot{\mathbf{\Lambda}}(\tau)$ ist zur Kurve normal.

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

$$\ddot{\mathbf{\Lambda}} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

Man kann auch die Tangentengleichung und die Normalengleichung zur Zeitpunkt τ finden

$$T : y - \psi(\tau) = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}}(x - \phi(\tau))$$

$$N : y - \psi(\tau) = -\frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}}(x - \phi(\tau))$$

3.1.5 Krümmung und Krümmungsradius S254

Siehe Tab. 1 für die Rechnungsformeln und Abb. 2 für eine graphische Deutung.

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \qquad R = 1/\kappa$$

Eine gerade hat $\kappa = 0$ und $R = \infty$. Entsprechend der Orientierung der x-Achse, entspricht einer $\kappa > 0$ eine Linkskrümmung und $\kappa < 0$ eine Rechtskrümmung.

Der Krümmungskreis hat Maßzahl $\rho = 1/|\kappa|$ und Mittelpunkt P_c gemäß

$$P_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa}\widehat{\mathbf{n}}$$

Wobei $\widehat{\mathbf{n}} = \mathbf{\Lambda}^0$ ist der Normalvektor.

3.1.6 Konvexität

Sei die Kurve Λ durch $f \in C^2$ auf $[a, b]$ gegeben.

- f ist auf (a, b) konvex (bzw. konkav), wenn $\kappa \geq 0$ (bzw. $\kappa \leq 0$) $\forall x \in (a, b)$.
- f ist auf (a, b) streng konvex (bzw. konkav), wenn $\kappa > 0$ (bzw. $\kappa < 0$) $\forall x \in (a, b)$.
- Hat in Λ in P einen Wendepunkt, dann $\kappa(P) = 0$.

3.1.7 Evoluten und Evolventen S262

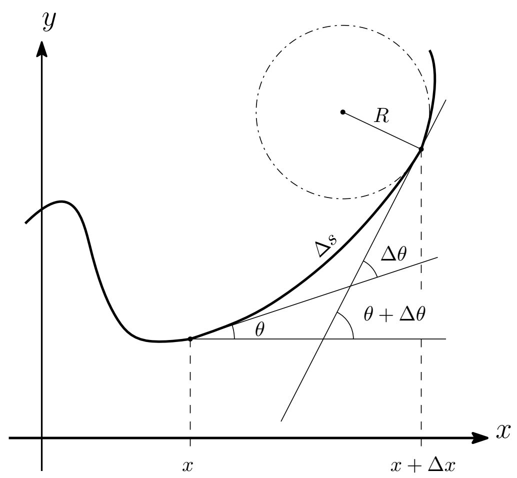

Abbildung 2: Krümmung und Krümmungskreisradien

3.2 Raumkurven S263

3.3 Kurven 2. Ordnung – Kegelschnitt S212

Die Polarform für die allgemeine Gleichung der Kurver 2. Ordnung ist

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi} \tag{3.3.1}$$

Im kartesiche Form

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 0 \tag{3.3.2}$$

Die Parameter a, b bzw, ε ändern die Gestalt folgendermaßen

- $\varepsilon = 0$ Kreis
- $|\varepsilon| \in (0;1)$ Ellipse
- $|\varepsilon| = 1$ Parabel
- $|\varepsilon| > 1$ Hyperbel

3.3.1 Kreis S204

Kartesisch	$(x-C_x)^2 + (y-C_y)^2 = r^2$
Parameter	$x = c_x + R\cos t \quad y = c_y + R\sin t$

3.3.2 Ellipse S205

Kartesisch	$\left(\frac{x-C_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-C_y}{b}\right)^2 = 1$
Parameter	$x = a\cos t \quad y = b\sin t$

3.3.3 Hyperbel S207

Kartesisch	$\left(\frac{x-C_x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-C_y}{b}\right)^2 = 1$
Parameter	$x = a\cosh t \quad y = b\sinh t$

3.3.4 Parabel S210

Kartesisch	$y = ax^2 + bx + c$
Parameter	$x = t \quad y = at^2 + bt + c$

3.4 Kurven 4. Ordnung S98

Kardioide / Herzkurve S99,100

$$r = a(1+\cos\varphi)$$

Lemniskate S101

$$r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$$

4 Reihen

4.1 Bemerkenswerte Rehien S19,477

Arithmetische Reihe Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, dann aus der arithmetischen Folge $\langle a_k\rangle$ mit $a_k = a_1 + (k-1)d$ erhält man die Reihe $\langle A_n\rangle$ mit:

$$A_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n}(k-1)d = a_1 + d + 2d + \dots + (n-1)d$$
$$= \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Geometrische Reihe Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Aus der geometrischen Folge $\langle g_k\rangle$ mit $g_k = a_1 q^k$ erhält man die Reihe $\langle G_n\rangle$ mit:

$$G_n = a_1\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

Harmonische Reihe Aus der folge $\langle h_k\rangle$ mit $h_k = 1/k$ erhält man die Reihe $\langle H_n\rangle$ mit:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Potenzreihe Siehe §4.3

4.2 Unendlichen S470,477

Sei $\langle a_n\rangle$ eine Folge die Reihe $\langle S_n\rangle$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

4.2.1 Konvergenz S472,475

Absolute S475 Die Reihe S_n heißt *absoulut konvergent* wenn

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_k| \text{ konvergiert}$$

Wenn eine Reihe absolut konvergent ist, dann

1. sie ist auch konvergent.
2. die Glieder können nach Belieben miteinander vertauscht weden.
3. sei $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = a_n b_1 + a_{n-1}b_2 + \dots + a_1 b_n$ (a_n und b_n abs. konvergent gegen a bzw. b), dann
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Bedingte Wenn die Reihe S_n nicht abs. konvergiert, aber es eine Umordnung gibt, sodaß die umgeordnete Reihe entweder divergent ist oder gegen eine von verschiedene Summe konvergiert. Dann heißt die Reihe *bedingt konvergent.*

4.2.2 Konvergenzkriterien S472

Cauchy'sches S475

$$\forall\varepsilon > 0 : \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n : \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

Wurzelkriterium von Cauchy S474

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \implies \begin{cases} \alpha < 1 & \text{(abs.) konvergent} \\ \alpha > 1 & \text{divergent} \end{cases}$$

Wenn $\alpha = 1$ man kann nicht direkt eine Konvergenz / Divergenz schliessen. Hinweise: Seien $a > 0$ eine Konstante, p ein Polynom und r eine rationale Funktion.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|p(n)|} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|r(n)|} = 1$$

Quotientenkriterium von d'Alambert S474

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \implies \begin{cases} \alpha < 1 & \text{(abs.) konvergent} \\ \alpha > 1 & \text{divergent} \end{cases}$$

Leibniz'sches (für alternierenden Reihen) S476
Wenn $\langle a_n \rangle$ eine alterniende Folge ist, dann gilt

$$\langle |a_n| \rangle \text{ ist eine monoton fallende Nullfolge} \\ \implies \langle s_n \rangle \text{ konvergiert}$$

Integralkriterium S475 Sei $f(x) \geq 0$, $x \in [1;\infty)$ und $f\downarrow$. Merkt man dass:

$$\overbrace{\int_1^n f(x)\mathrm{d}x}^{S} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \overbrace{\int_2^n f(x-1)\mathrm{d}x}^{\text{Auch } S}$$

Somit folgt:

$$\text{konvergiert} \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x \implies \text{konvergiert } s$$

4.3 Potenzreihen S482

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\ = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

Sei $\lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} = a$ (Wurzelkriterium)

$$a = 0 \implies \text{abs. konvergent}$$

$$a > 0 \implies \forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} |x| < 1/a : & \text{abs. konvergent} \\ |x| > 1/a : & \text{divergent} \end{cases}$$

4.3.1 Konvergenzradius/-bereich S482

Sei $\langle \sqrt{|a_n|} \rangle$ nicht beschränkt ($a = \infty$), so ist P nur für $x = x_0$ konvergent ($r = 1/\infty = 0^+$). Sonst existiert der *Konvergenzradius* $r \in \mathbb{R}^+$:

$$r = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad r = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

Innerhalb des *Konvergenzbereiches* $\{x : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r; x_0 + r)$ ist die Reihe absolut konvergent, ausserhalb dessen ist sie divergent. Wenn $r = \infty$ dann ist die Reihe abs. konvergent.

4.3.2 Funktion darstellen

4.3.3 Ableitung und Integration

Sei P eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$, die eine Funktion f darstellt. Innerhalb des Konvergenzradius gilt:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\int f \,\mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

Höhere Ableitungen:

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

4.3.4 Taylor Polynom und Reihe S484

Der Taylor-Polynom approximiert eine Funktion um einen Entwicklungspunkt a.

$$T_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n \\ = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

Die Restglieder sind

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)} \qquad (\xi \in (x;a))$$

Wenn $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ dann $f(x) = T(x,a)$, d.h. die Taylor Rehie zu f identisch ist (Konvergenzradius $r = \infty$). Sonst berechnet man der *worst case* Fehler $\epsilon \geq |R_n|$ und der dazugehörig $\hat{\xi} = \arg\max_{\xi} |R_n|$:

$$\epsilon = \max |R_n| = \max \left[\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x-a|^{(n+1)} \right]$$

5 Differentialgleichungen

5.1 Definition

Eine Funktion $y = \varphi(x)$ heißt *allgemeine* Lösung der n-te Ordnung Differentialgleichung

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

auf dem Intervall I, wenn

- φ auf I n-mal differenzierbar ist
- $\forall x \in I : F(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n)}) = 0$

Gegeben seien auch der *Anfangspunkt* x_0, und die *Anfangswerte* oder *Anfangsbedingungen* $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y'(x_0)$, ..., $y_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Dann hat man ein *Anfangswertproblem*, der eine *partikuläre* Lösung ergibt.

5.2 DGL 1. Ordnung

5.2.1 Lineare DGL 1. Ordnung

Die funktionen f und g seien auf demselben Intervall I stetig. Die Differentialgleichung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

heißt *homogen*, wenn g die Nullfunktion $(= 0)$ auf I ist, sonst *inhomogen*. g heißt Störglied. Die Allgemeine Lösung ist

$$Y = \{y : y = y_\mathrm{H} + y_\mathrm{P} \text{ mit } y_\mathrm{H} \in Y_\mathrm{H}\}$$

$$y = e^{-F}\left[k + \int ge^F \,\mathrm{d}x\right] \qquad k \in \mathbb{R}$$

5.2.2 Tricks

Separation Wenn die DGL die Form $y' + f(x)p(y) = 0$ hat, dann lässt sie sich mit der Umformung

$$\frac{y'}{p(y)} = -f(x) \implies \int \frac{\mathrm{d}y}{p(y)} = -\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ein Speziallfall $p(y) = y$ (homogen lineare DGL) hat die allgemeine Lösung

$$y = k \exp\left[-\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = ke^{-F}$$

Substitution Linearterm Hat die DGL die Form $y' = f(ax+by+c)$, dann benutzt man die Substitution

$$z = ax + by + c \iff y(z) = b(z - c)/ax$$
$$z' = a + by' \implies z' = a + by'(z) \quad \text{separiert!}$$

Dann soll sie nach z lösen lassen.

Gleichgradigkeit Hat die DGL die Form $y' = f(y/x) \quad x \neq 0$, dann benutzt die Substitution

$$z = y/x \implies y' = z'x + z$$
$$\implies z' = \frac{1}{x}\left(y'(x) - z\right) \quad \text{separiert!}$$

5.3 DGL 2. Ordnung

5.3.1 Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$$

Versuch mit $y = Ae^{\lambda x}$

$$0 = A\lambda^2e^{\lambda x} + a_1A\lambda e^{\lambda x} + a_0Ae^{\lambda x}$$
$$0 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Der *charakteristische Polynom* hat die Lösungen

$$\lambda_{12} = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right)$$

Falls $\lambda \in \mathbb{R}$, dann heißt er *Dämpfung*. Sonst ist $\mathbb{C} \ni \lambda = k \pm \jmath\alpha$, α nennt man *Frequenz*. Daher hat die Lösung die Form:

$$Ce^{k\pm\jmath\alpha} = A\exp\left(\frac{a_1}{2}x\right)\cos(\alpha x) + B\exp\left(\frac{a_1}{2}x\right)\sin(\alpha x)$$

Faltung Die Faltung Integral ergibt die partikuläre Loesung einer 2. Ordunung Differenzialgleichung mit Anfangsbedingungen $g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) = 1$.

$$y_p = f * g = \int_{x_0}^{x} g(x + x_0 - t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

5.4 Lineare DGL n-te Ordnung

Literatur

[1] An2E Vorlesungen an der Hochschule für Technik Rapperswil und der dazugehörige Skript, *Dr. Bernhard Zgraggen*, Frühlingssemester 2020

[2] Taschenbuch der Mathematik, 10. überarbeitete Auflage, 2016 (1977), *Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig*, ISBN 978-3-8085-5789-1

[3] Mathematik 2: Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, 2012, 7. Auflage, XII, Springer Berlin, *Albert Fetzer, Heiner Fränkel*, ISBN-10 364224114X, ISBN-13 9783642241147

Notation

Rot markierte Zahlen wie zB S477 sind Hinweise auf die Seiten im "Bronstein" [2]

- C^n ist der Menge der glatten n-mal differenzierbären Funktionen.
- Das Zeichen $\forall$ bedeutet "für alle"

License

Tabelle 1: Rechnungen bez. ebene Kurven

Ebene Kurven	**Kartesich** $y = f(x)$	**Polar** $\mathbf{r}(\varphi)$	**Parameter** $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(y))$
Anstieg S448	f'	$\frac{r' \sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$	$\dot{x}/\dot{y}$
Fläche S493	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert \,\mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\varphi)^2 \,\mathrm{d}\varphi$	$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} x\dot{y} - \dot{x}y \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \det(\mathbf{c}, \dot{\mathbf{c}}) \,\mathrm{d}t$
Bogenlänge S251,514	$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \,\mathrm{d}x$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2} \,\mathrm{d}\varphi$	$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \lvert\dot{\mathbf{c}}\rvert \,\mathrm{d}t$
Krümmung κ S254	$\frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}^3}$	$\frac{2(r')^2 - rr'' + r^2}{\sqrt{r^2 + (r')^2}^3}$	$\frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3} = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})}{\lvert\dot{\mathbf{c}}\rvert^3}$
Rotationsvolumen um x S516	$\pi \left\lvert \int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x \right\rvert$	$\pi \left\lvert \int_{t_0}^{t_1} y\dot{x} \,\mathrm{d}t \right\rvert$	$\pi \left\lvert \int_\alpha^\beta r^2 \sin^2\varphi (r'\cos\varphi - r\sin\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \right\rvert$
Rotationsoberfläche um x S515	$2\pi \int_a^b \lvert y\rvert \sqrt{1 + (y')^2} \,\mathrm{d}x$	$2\pi \int_\alpha^\beta \lvert r\sin(\varphi)\rvert \sqrt{(r')^2 + r^2} \,\mathrm{d}\varphi$	$2\pi \int_{t_0}^{t_1} \lvert y\rvert \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \,\mathrm{d}t$