

# 1 Fluide Einführung

DEFINITION 1.1. **Fluid** Flüssigkeiten und Gase werden unter dem Oberbegriff *Fluide* zusammengefasst.

DEFINITION 1.2. **Druck und Schubspannung** Für einfache Fälle der Cauchy Spannungstensor kann zu zwei Skalare  $p$  und  $\tau$  vereinfacht werden, sie werden Druck bzw. Schubspannung genannt.

$$pA = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = F_{\perp} \quad \tau A = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} = F_{\parallel} \stackrel{\text{statik}}{=} 0$$

$$[p] = \text{N m}^{-2} = \text{Pa}$$

Folgerung 1.2.1. **Gesetz von Pascal** In ruhenden Fluiden  $\tau = 0$ , somit ist die Kraft immer senkrecht.

Name	Einheit
Kilopond	1 kp = $g \text{ N} \approx 9.81 \text{ N}$ 1 at = $1 \text{ kp cm}^{-2}$
Technische Atmosphäre	$\approx 0.98 \text{ bar}$
Physikalische Atmosphäre	1 atm = 101 325 Pa
Torr	1 Torr = $1/760 \text{ atm}$
Bar	1 bar = $1 \times 10^5 \text{ Pa}$ $\approx 750 \text{ Torr}$

Tabelle 1: Einheiten des Drucks

DEFINITION 1.3. **Dichte** Ist die Masse pro Volumeneinheit.

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad [\varrho] = \text{kg m}^{-3}$$

## 2 Hydrostatik K.1-2

DEFINITION 2.1. **Schweredruck**

$$dp = \varrho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{y} = -\varrho g dy \quad (2.1)$$

Folgerung 2.1.1. **Hydrostatischer Druck** Für Flüssigkeiten, da die Dichte konstant ist folgt:

$$p = \varrho gh$$

Folgerung 2.1.2. **Schweredruck eines Gase** Angenommen dass, die Dichte nur von Druck abhängt (barotrop)

$$\varrho(p) = \varrho_0 \frac{p}{p_0}$$

Die Lösung von (2.1) ergibt die *Barometrische Höhenformel* für eine isotherme Atmosphäre.

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0}{p_0} gh\right)$$

DEFINITION 2.2. **Gesetz von Boyle-Mariotte** Für ein ideales Gas gilt bei konstanter Temperatur

$$pV = (\text{konstant})$$

Folgerung 2.2.1. Die Dichte ist proportional zum Druck

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

DEFINITION 2.3. **Kompressibilität** Die Druckerhöhung  $\Delta p$  bewirkt in einem Fluid stets eine Volumenabnahme. Die relative Volumenänderung ist proportional zur Druckänderung

$$\Delta V/V = -\kappa \Delta p$$

Bemerkung 2.3.1. Eine ideale Flüssigkeit ist reibungsfrei und inkompressibel.

Bemerkung 2.3.2. In einer idealen Flüssigkeit ist die Dichte konstant.

DEFINITION 2.4. **Statische Auftriebskraft** Auch als Archimedische Prinzip bekannt.

$$F_A = G_f = \varrho_f V_k g \quad \hat{\mathbf{F}}_a = -\hat{\mathbf{g}}$$

Der auftrieb eines in ein Fluid eingetauchten Körper ist gleich dem Gewicht des von ihm verdrängten Fluids.

### 2.1 Grenzflächeneffekte

DEFINITION 2.5. **Oberflächenspannung** Zwischen zwei Atomen oder Molekülen tritt die *Van der Waals-Kraft*. An der Oberfläche der Flüssigkeit ist der mittlere Abstand der Moleküle etwas grösser als im Innern. Das bewirkt eine Parallel zur Oberfläche gerichtete anziehende Kraft zwischen den Molekülen.

$$\sigma = \frac{F}{\ell} \quad [\sigma] = \text{N m}^{-1}$$

Bemerkung 2.5.1. Die Oberflächenspannung kann auch als *spezifische Oberflächenenergie* bezeichnet werden.

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \Delta s}{\ell \Delta s} = \frac{F}{\ell}$$

Die *Oberflächenenergie* ist ein Maß für die Energie, die zum Aufbrechen der chemischen Bindungen notwendig ist, wenn eine neue Oberfläche einer Flüssigkeit oder eines Festkörpers erzeugt wird.

Folgerung 2.5.1. **Grenzflächenspannung** Bei einer Vergrößerung der Grenzfläche muss Arbeit geleistet werden, da die Grenzflächenenergie vergrößert wird. Es gibt dann auch die Grenzflächenspannungen  $\sigma_{sl}, \sigma_{sg}, \sigma_{lg}$  (flüssig = liquid, fest = solid, gas) die zwischen Festkörper und Flüssigkeit wirken.  $\varphi$  ist dann der *Kontaktwinkel*, und die Geometrie ergibt die Beziehung

$$\sigma_{sg} = \sigma_{sl} + \sigma_{lg} \cos \varphi$$

Beispiel 2.5.1. **Druck in Seifenblase**

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

DEFINITION 2.6. **Kapillarität** Allgemein an die Grenze gilt:

$$F_{\text{Oberfläche}} = F_{G, \text{Flüssigkeit}}$$

Folgerung 2.6.1. In einem Rohr (Zylinder)

$$2\pi r\sigma = \rho\pi r^2 h g \implies h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$$

### 3 Hydrodynamik

#### 3.1 Einführung K.3-4

DEFINITION 3.1. **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.1)$$

Folgerung 3.1.1. **Ideales Fluid** Da die Dichte konstant ist (inkompressibel), man kann (3.1) durch  $\rho$  teilen und folgt:

$$\dot{V} = \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = vA \quad [\dot{V}] = \text{m}^3 \text{s}^{-1}$$

DEFINITION 3.2. **Bernoulli Gleichung** Der Term  $\rho v^2/2$  wird *dynamische Druck* genannt.

$$p + \rho g h + \frac{\rho}{2} v^2 = (\text{Konstant})$$

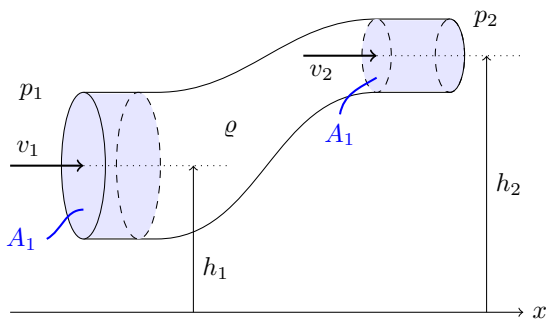


Abbildung 1: Schematische Darstellung für die Bernoulli Gleichung

Bemerkung 3.2.1. Bernoulli gilt für inkompressible Fluide, und genügt für Flüssigkeiten und Gase, sofern  $v \ll$  Schallgeschwindigkeit.

Folgerung 3.2.1.

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

oder  $-\Delta p = \rho g \Delta h + \frac{\rho}{2} \Delta(v^2)$

Folgerung 3.2.2. Wo die Geschwindigkeit am schnellsten ist, dort ist die Druck am tiefsten.

#### 3.2 Reale Strömungen K.5-6

DEFINITION 3.3. **Newton'sche Reibungsgesetz** Die Proportionalitätskonstante  $\eta$  wird *dynamische Viskosität* oder *Zähigkeit* genannt.

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz} \stackrel{!}{=} \frac{F_{\parallel}}{A}$$

$$[\eta] = \text{kg m}^{-1} \text{s} = \text{Ns m}^{-1} = \text{Pa s}$$

Folgerung 3.3.1. **Bernoulli Gleichung bei Newton'scher Reibung**

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + p_v$$

In der Praxis wird der Druckverlust  $p_v$  oft als Verlusthöhe  $h_v$  angegeben, d.h. diejenige Höhe, um die der Zufluss angehoben werden muss, um an Ausfluss aus der Stromröhre denselben Druck wie im reibungsfreien Fall zu erzeugen.

$$p_v = \rho g h_v$$

DEFINITION 3.4. **Formel von Stokes** (Stokes'sche Reibung) Reibungskraft einer Kugel im Öl

$$F_R = 6\pi\eta R v_0$$

DEFINITION 3.5. **Laminare Rohrströmung** Lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte innerhalb des Zylinders.

$$F_{\text{Res,Druck}} - F_{\text{Reib}} = 0$$

$$\pi r^2 (p_1 - p_2) - 2\pi r l \tau = 0$$

Folgerung 3.5.1. **Geschwindigkeitsverteilung** Innerhalb des Zylinders ( $r$  von 0 bis  $R$ )

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Folgerung 3.5.2. **Gesetz von Hagen Poiseuille**

$$\dot{V} = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l} \quad (3.2)$$

Folgerung 3.5.3. **Druckabfall** Wenn man in (3.2)  $\dot{V} = \pi R^2 v$  einsetzt, folgt:

$$\Delta p = 32\eta l \frac{v}{d^2}$$

Bemerkung 3.5.1. Bei einer Zunahme des Rohrradius wird nicht nur die zur Verfügung stehende Querschnittsfläche grösser, sondern zugleich wächst in der Rohrmitte auch die maximale Geschwindigkeit.

DEFINITION 3.6. **Prandtl'sche Grenzschicht**  $D_1$  ist die Dicke der Schicht in unmittelbarer Nähe einer Oberfläche mit Länge  $\ell$  an ein Fluid, der vorbeiströmt, der mitgezogen wird. Siehe Abb. 2.

$$D_1 = \frac{\ell}{\sqrt{\mathcal{R}}} = \sqrt{\frac{\eta \ell}{\rho v}}$$

DEFINITION 3.7. **Reynolds Zahl** Ist ein dimensionslose Koeffizient aus der *Navier-Stokes* Gleichung, der das Verhältnis zwischen kinetischer Energie des Fluides und dessen innerer Reibung (proportional zur Viskosität) beschreibt.

$$\mathcal{R} = \frac{E_k}{E_r} = \frac{\rho}{\eta} v^* \ell^*$$

$v^*, \ell^*$  sind eine charakteristische Länge bzw. Geschwindigkeit. Sie sind dimensionslose Variablen für geometrische und physikalische Größen.

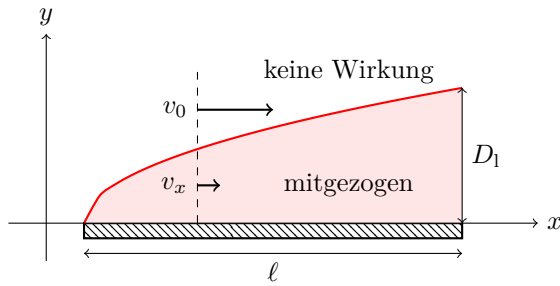


Abbildung 2: Laminare Grenzschicht für eine Platte in einem Strömungsfeld mit Geschwindigkeit  $v_0$ , und  $\ell \gg D_1$ .

**Folgerung 3.7.1. Rohrströmung** Wird bei der Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt der Durchmesser  $d$  als charakteristische Abmessung gewählt, somit ist die Reynolds-Zahl

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v d}{\eta}$$

**DEFINITION 3.8. Kritische Reynoldszahl  $\mathcal{R}_k$**

$$\begin{aligned} \mathcal{R} > \mathcal{R}_k &\implies \text{Turbulent} \\ \mathcal{R} \leq \mathcal{R}_k &\implies \text{Laminar} \end{aligned}$$

**Folgerung 3.8.1. Kritische Reynoldszahl für die Rohrströmung**

$$\mathcal{R}_k = 2320$$

**DEFINITION 3.9. Reale Rohrströmung** Turbulente Rohrströmung, je nach turbulent oder laminares  $\lambda$

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho \ell}{2d} v^2 \quad (3.3)$$

**Beispiel 3.9.1. Turbulente  $\lambda$  nach Blasius**

$$\lambda_t = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\mathcal{R}}}$$

**Beispiel 3.9.2. Laminare  $\lambda$  nach Hagen-Poiseuille** Das ist tatsächlich (3.2) umformuliert.

$$\lambda_l = \frac{64}{\mathcal{R}}$$

### 3.3 Widerstandkräfte

**DEFINITION 3.10. Auftriebskraft nach Kutta-Jukowski** Dieser Auftrieb ist eine Folgerung vom Magnus Effekt.

$$F_A = \rho v \ell \Gamma$$

**DEFINITION 3.11. Druckwiderstand**

$$F_D = c_W \frac{\rho}{2} v^2 A_{\perp}$$

**DEFINITION 3.12. Zirkulation** Ist ein Mass für die Wirbelstärke. Die Zirkulation ist eine makroskopische Grösse und hängt vom Weg ab.

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Induzierter Widerstand

$$F_W = c_W^* \frac{\rho}{2} v^2 A_{\parallel}$$

Dynamischer Auftrieb

$$F_A = c_A \frac{\rho}{2} v^2 A_{\perp}$$

Gleitwinkel

$$\tan(\varphi) = \frac{F_W}{F_A} = \frac{c_W}{c_A} = \frac{v_V}{v_H}$$

## 4 Wärmelehre Einführung

**DEFINITION 4.1. Absolute Temperatur**

$$T = \vartheta + 273.15 \text{ K} = \vartheta - \vartheta_0$$

**DEFINITION 4.2. Stoffmenge** Hier *Partikel* steht für Moleküle, Atome oder Ionen.

$$1 \text{ mol} = N_A \text{ Partikeln} = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Der Avogadro-Zahl  $N_A$  entspricht Anzahl von Partikeln in eine Mole, und 1 Mol ist als der Anzahl von Atome  $^{12}\text{C}$  in 0.012 kg definiert worden.

### 4.1 Flüssigkeiten und Festkörpern

**DEFINITION 4.3. Thermische Ausdehnung**

$$\begin{aligned} \Delta \ell &= \alpha \ell \Delta T \\ \Delta A &= \beta A \Delta T & \beta &\approx 2\alpha \\ \Delta V &= \gamma V \Delta T & \gamma &\approx 3\alpha \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.3.1. Anomalie des Wassers** Bei der Temperatur  $4^\circ\text{C}$  verschwindet sein Volumenausdehnungskoeffizient. Ebenfalls ungewöhnlich ist, dass die Dichte des festen Zustandes kleiner ist als die des flüssigen Zustandes.

**Folgerung 4.3.1. Thermische Spannung**

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\Delta \ell}{\ell} = E \alpha \Delta T$$

### 4.2 Ideale Gase

**DEFINITION 4.4. Universelle Gasgleichung für ideale Gase**

$$\begin{aligned} pV &= nRT = N_A k_B T = (\text{konstant}) \\ \text{oder} \quad \frac{p_1 V_1}{T_1} &= \frac{p_2 V_2}{T_2} \end{aligned}$$

- $R = N_A k_B = 8.313 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  ist die Universelle Gaskonstante

- $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  ist die Boltzmann-Konstante.

DEFINITION 4.5. **Molzahl**

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$$

wobei  $M$  ist die sogenannte Molmasse in  $\text{kg mol}^{-1}$ .

Folgerung 4.5.1. **Spezifische Gaskonstante  $R_s$**

$$pV = \frac{m}{M}RT = mR_sT$$

Folgerung 4.5.2. **Dichte eines Gases**

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V_m} = \frac{pM}{RT}$$

## Kapitel 9

Gesetz von Dalton

$$p = \sum_{i=1}^n p_i$$

Volumen-Konzentration

$$q_i = \frac{V_i}{V}$$

$$q_i = \frac{n_i}{n}$$

Massen-Konzentration

$$\mu_i = \frac{m_i}{m}$$

$$\mu_i = \frac{M_i}{M} q_i$$

Mol-Masse eines Gas-Gemischs

$$M = \sum_{i=1}^n q_i M_i$$

### 4.3 Reales Gas K.9

DEFINITION 4.6. **Van der Waals-Korrektur**

$$p'V'_m = nRT \quad p' = p + \frac{a}{V_m^2} \quad V'_m = V_m - b$$

Folgerung 4.6.1. **Van der Waals-Gleichung**

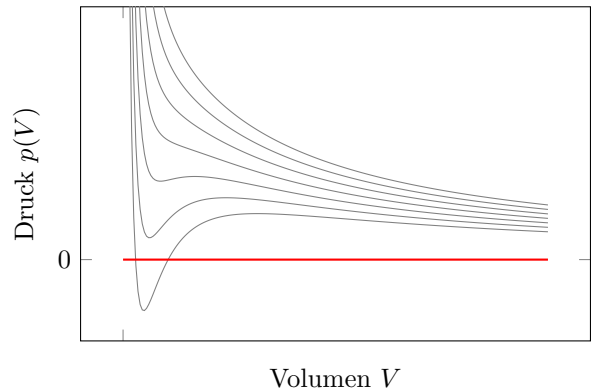
$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Folgerung 4.6.2. **Van der Waals-Parameter**

$$a = \frac{9}{8}RT_k V_{mk} \quad b = \frac{V_{mk}}{3}$$

Folgerung 4.6.3. **Kritische Größen**

$$V_{mk} = 3b \quad T_k = \frac{8a}{27Rb} \quad p_k = \frac{a}{27b^2}$$



### 4.4 Energie K.10

Änderung innere Energie

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q$$

Mechanische Arbeit von einem Gas

$$\Delta W = p\Delta V$$

Schmelz-/Erstarrungs-Wärme

$$Q_f = q_f m$$

Verdampfungs-/Kondensations-Wärme

$$Q_s = q_s m$$

Wärmekapazität

$$Q = cm\Delta T = nC_m\Delta T = C\Delta T$$

Wärme-Bilanz

$$0 = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i + \Delta Q_{f_i} + \Delta Q_{s_i}$$

## Literatur

- [1] HOCHSCHULE FÜR TECHNIK RAPPERSWIL (HSR). *Ph2HAT Vorlesungen und die dazugehörige Unterlagen*, Sourlier David, Frühlingsemester 2020, Rapperswil.
- [2] ARTHUR RUH, BENNO BUCHER. *Physik 1: Mechanik, Fluide, Wärmelehre*. Vol I, HSR, 2014, Rapperswil.
- [3] RICHARD FEYNMAN. *Mainly Mechanics, radiation, and heat. The Feynman Lectures on Physics*, Leighton, Sands, New Millenium Edition, Vol I, Basic Books, California Institute of Technology (Caltech).
- [4] RICHARD FEYNMAN. *Mainly electromagnetism and matter. The Feynman Lectures on Physics*, Leighton, Sands, New Millenium Edition, Vol II, Basic Books, California Institute of Technology (Caltech).

# License

Ph2HAT-ZF (c) by Naoki Pross

Ph2HAT-ZF is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 Unported License.

You should have received a copy of the license along with this work. If not, see

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>