1 Fluide Einführung

Definition 1.1. **Fluid** Flüssigkeiten und Gase werden under dem Oberbegriff *Fluide* zusammengefasst.

Definition 1.2. **Druck und Schubspannung** Für einfache Fälle der Cauchy Spannugstensor kann zu zwei Skalare p und τ vereinfacht werden, sie werden Drück bzw. Schubspannung genannt.

$$pA = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = F_\perp \qquad \tau A = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} = F_\parallel \overset{\text{statik}}{=} 0$$
$$[\,p\,] = \mathrm{N\,m^{-2}} = \mathrm{Pa}$$

Folgerung 1.2.1. **Gesetzt von Pascal** In ruhenden Fluiden $\tau = 0$, somit ist die Kraft immer senkrecht.

Definition 1.3. **Dichte** Ist die Masse pro Volumeneinheit.

$$\varrho = \frac{m}{V} \qquad [\,\varrho\,] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$$

2 Hydrostatik

Definition 2.1. **Schweredruck**

$$\mathrm{d}p = \varrho \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{y} = -\varrho g \mathrm{d}y \tag{2.1}$$

Folgerung 2.1.1. **Hydrostatischer Druck** Für Flüssigkeiten, da die Dichte konstant ist folgt:

$$p = \varrho g h$$

Folgerung 2.1.2. **Schweredruck eines Gase** Angenommen dass, die Dichte nur von Druck abhängt (barotrop)

$$\varrho(p) = \varrho_0 \frac{p}{p_0}$$

Die Lösung von (2.1) ergibt die *Barometrische Höhenformel* für eine isotherme Atmospäre.

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0}{p_0} g h\right)$$

Definition 2.2. **Gesetz von Boyle-Mariotte** Für ein ideales Gas gilt bei konstanter Temperatur

$$pV = (\text{konstant})$$

Folgerung 2.2.1. Die Dichte ist proportional zum Druck

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

Definition 2.3. **Kompressibilität** Die Druckerhöhung Δp bewirkt in einem Fluid stets eine Volumenabname. Die relative Volumenänderung ist proportional zur Druckänderung

$$\Delta V / V = -\kappa \Delta p$$

Bemerkung Eine ideale Flüssigkeit ist reibungsfrei und inkompressibel.

Bemerkung In einer idealen Flüssigkeit ist die Dichte konstant.

Definition 2.4. **Statische Auftriebskraft** Auch als Archimedische Prinzip bekannt.

$$F_A = G_f = \varrho_f V_k g \qquad \hat{\mathbf{F}}_a = -\hat{\mathbf{g}}$$

Der auftrieb eines in ein Fluid eingetauchen Körper ist gleich dem Gewicht des von ihm verdrängten Fluids.

2.1 Grenzflächeneffekte

Definition 2.5. **Oberflächenspannung** Zwischen zwei Atomen oder Molekülen tritt die *Van der Waals*-Kraft. An der Oberfläche der Flüssigkeit ist der mittlere Abstand der Moleküle etwas grösser als im Innern. Das bewirkt eine Parallel zur Oberfläche gerichtete anzihende Kraft zwischen den Molekülen.

$$\sigma = \frac{F}{\ell} \qquad [\,\sigma\,] = \mathrm{N\,m^{-1}}$$

Bemerkung Die Oberflächenspannung kann auch als *spezifische Oberfächenenergie* bezeichnet werden.

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \Delta s}{\ell \Delta s} = \frac{F}{\ell}$$

Die *Oberflächenenergie* ist ein Maß für die Energie, die zum Aufbrechen der chemischen Bindungen notwendig ist, wenn eine neue Oberfläche einer Flüssigkeit oder eines Festkörpers erzeugt wird.

Folgerung 2.5.1. **Grenzflächenspannung** Bei einer Vergrösserung der Grenzfläche muss Arbeit geleistet werden, da die Grenzflächenenergie vergrössert wird. Es gibt dann auch die Grenzflächenspannungen $\sigma_{\mathrm{sl}}, \sigma_{\mathrm{sg}}, \sigma_{\mathrm{lg}}$ (flüssig = liquid, fest = solid, gas) die zwischen Festkörper und Flüssigkeit wirken. φ ist dann der *Kontaktwinkel*, und die Geometrie ergibt die Beziehung

$$\sigma_{\mathrm{sg}} = \sigma_{\mathrm{sl}} + \sigma_{\mathrm{lg}} \cos\varphi$$

Beispiel 2.5.1. **Druck in Seifenblase**

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

Definition 2.6. **Kapillarität** Allgemein an die Grenze gilt:

$$F_{\text{Oberfläche}} = F_{G,\text{Flüssigkeit}}$$

Beispiel 2.6.1. **In einem Rohr (Zylinder)**

$$2\pi r \sigma = \varrho \pi r^2 h g \implies h = \frac{2\sigma}{\varrho g r}$$

3 Hydrodynamik

3.1 Einführung

Definition 3.1. **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho \, \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \varrho \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{3.1}$$

Folgerung 3.1.1. **Ideales Fluid** Da die Dichte konstant ist (inkompressibel), man kann (3.1) durch ϱ teilen und folgt:

$$\dot{V} = \int_A \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = vA \qquad \left[\dot{V}\right] = \mathrm{m^3\,s^{-1}}$$

Definition 3.2. **Bernoulli Gleichung** Der Term $\varrho v^2/2$ wird *dynamische Druck* genannt.

$$p + \varrho g h + \frac{\varrho}{2} v^2 = (\text{Konstant})$$

Bemerkung Bernoulli gilt für inkompressible Fluide, und genügt für Flüssigkeite und Gase, sofern $v \ll$ Schallgeschwidigkeit.

Folgerung 3.2.1.

$$p_1 + \varrho g h_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2 = p_2 + \varrho g h_2 + \frac{\varrho}{2} v_1^2$$
$$\text{oder} \quad -\Delta p = \varrho g \Delta h + \frac{\varrho}{2} \Delta \left(v^2\right)$$

Folgerung 3.2.2. Wo die Geschwindigkeit am schnellsten ist, dort ist die Druck am tiefsten.

3.2 Reale Strömungen

Definition 3.3. **Newtonsche Reibungsgesetz** Die Proportionalitätskonstante η wird *dynamische Viskosität* oder *Zähingkeit* genannt.

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} \stackrel{!}{=} \frac{F_\parallel}{A}$$
$$[\eta] = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s} = \mathrm{N\,s\,m^{-1}} = \mathrm{Pa\,s}$$

Definition 3.4. **Formel von Stokes** (Stokes'sche Reibung) Reibungskraft einer Kugel im Öl

$$F_R = 6\pi\eta R v_0$$

Definition 3.5. **Laminare Rohrströmung** Lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte innerhalb des Zylinders.

$$F_{\text{Res,Druck}} - F_{\text{Reib}} = 0$$
$$\pi r^2 (p_1 - p_2) - 2\pi r l \tau = 0$$

Folgerung 3.5.1. **Geschwindigkeitsverteilung** Innerhalb des Zylinders (r von 0 bis R)

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta\ell}\left(R^2 - r^2\right)$$

Folgerung 3.5.2. **Gesetz von Hagen Poiseuille**

$$\dot{V} = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta\ell}$$

Bemerkung Bei einer Zunahme des Rohrradius wird nicht nur die zur Verfügung stehende Querschnittsfläche grösser, sondern zugleich wächst in der Rohrmitte auch die maximale Geschwindigkeit.

3.3 Turbulente Strömung

Definition 3.6. **Reynolds Zahl** Ist ein dimensionslose Koeffizient aus der *Navier-Stokes* Gleichung, der das Verhältnis zwischen kinetischer Energie des Fluides und dessen innerer Reibung (proportional zur Viskosität) beschreibt.

$$\mathcal{R} = \frac{E_k}{E_r} = \frac{\varrho}{\eta} v^* \ell^*$$

v^*, ℓ^* sind eine charakteristische Länge bzw. Geschwindigkeit. Sie sind dimensionslose Variablen für geometrische und physikalische Grössen.

Folgerung 3.6.1. **Rohrströmung** Wird bei der Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt der Durchmesser d als charakteristische Abmessung gewählt, sot ist die Reynolds-Zahl

$$\mathcal{R} = \frac{\varrho v d}{\eta}$$

Folgerung 3.6.2. **Kritische $\mathcal{R}$**

Definition 3.7. **Druckwiederstand**

Druckdifferenz

$$\Delta p \propto \varrho \Delta v \cdot \bar{v}$$

Schubspannung

$$\tau \propto \eta \frac{\Delta V}{\ell}$$

Prandtl'sche Genzschicht

$$D = \sqrt{\frac{\eta\ell}{\varrho v}}$$

Druckabfall laminar

$$\Delta p = 32\eta\ell \frac{v}{d^2}$$

λ nach Blasius, *turulent*

$$\lambda_{\text{t}} = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\mathcal{R}}}$$

λ nach Hagen-Poiseuille, *laminar*

$$\lambda_{\text{l}} = \frac{64}{\mathcal{R}}$$

Turbulente Rohrstömung, je nach turbulent oder laminares λ

$$\Delta p = \lambda \frac{\varrho\ell}{2d} v^2$$

Kapitel 6

Druckwiederstand

$$F_D = c_W \frac{\varrho}{2} v^2 A_\perp$$

Auftriebskraft nach Kutta-Jukowski

$$F_A = \varrho v \ell \Gamma$$

Zirkulation

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{l}$$

Induzierter Widerstand

$$F_W = \dot{c}_W \frac{\varrho}{2} v^2 A_\parallel$$

Dynamischer Auftrieb

$$F_A = c_A \frac{\varrho}{2} v^2 A_\perp$$

Gleitwinkel

$$\tan(\varphi) = \frac{F_W}{F_A} = \frac{c_W}{c_A} = \frac{v_V}{v_H}$$

Kapitel 7

Absolute Temperatur

$$T = \vartheta + 273.15\,\mathrm{K} = \vartheta - \vartheta_0$$

Stoffmenge

$$1\,\mathrm{mol} = N_A \text{ Moleküle} = 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$$

Ausdehnung

$$\begin{aligned} \Delta\ell &= \alpha\ell\Delta T & & \\ \Delta A &= \beta A \Delta T & \beta &\approx 2\alpha \\ \Delta V &= \gamma V \Delta T & \gamma &\approx 3\alpha \end{aligned}$$

Termische Spannung

$$\sigma = E\alpha\Delta T$$

Kapitel 8

Universelle Gasgleichung für ideale Gase

$$pV = nRT = N_A kT = \text{ (konstant)}$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Molzahl

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$$

Dichte eines Gases

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V_m} = \frac{pM}{RT}$$

Kapitel 9

Gesetz von Dalton

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Volumen-Konzentration

$$q_i = \frac{V_i}{V}$$

$$q_i = \frac{n_i}{n}$$

Massen-Konzentration

$$\mu_i = \frac{m_i}{m}$$

$$\mu_i = \frac{M_i}{M} q_i$$

Mol-Masse eines Gas-Gemischs

$$M = \sum_{i=1}^{n} q_i M_i$$

Reales Gas

Van der Waals-Korrektur

$$p' V_m' = nRT \qquad p' = p + \frac{a}{V_m^2} \qquad V_m' = V_m - b$$

Van der Waals-Gleichung

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Van der Waals-Parameter

$$a = \frac{9}{8} R T_k V_{mk} \qquad b = \frac{V_{mk}}{3}$$

Kritische Grössen

$$V_{mk} = 3b \qquad T_k = \frac{8a}{27Rb} \qquad p_k = \frac{a}{27b^2}$$

Kapitel 10

Änderung innere Energie

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q$$

Mechanische Arbeit von einem Gas

$$\Delta W = p\Delta V$$

Schmelz-/Erstarrungs-Wärme

$$Q_f = q_f m$$

Verdampfungs-/Kondensations-Wärme

$$Q_s = q_s m$$

Wärmekapazität

$$Q = cm\Delta T = nC_m\Delta T = C\Delta T$$

Wärme-Bilanz

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i + \Delta Q_{f_i} + \Delta Q_{s_i}$$

Literatur

[1] Hochschule für Technik Rapperswil (HSR). *Ph2HAT Vorlesungen und die dazugehörige Unterlagen,* Sourlier David, Frühlingssemester 2020, Rapperswil.

[2] Arthur Ruh, Benno Bucher. *Physik 1: Mechanik, Fluide, Wärmelehre.* Vol I, HSR, 2014, Rapperswil.

[3] Richard Feynman. *Mainly Mechanics, radiation, and heat. The Feynman Lectures on Physics*, Leighton, Sands, New Millenium Edition, Vol I, Basic Books, California Institute of Technology (Caltech).

[4] Richard Feynman. *Mainly electromagnetism and matter. The Feynman Lectures on Physics*, Leighton, Sands, New Millenium Edition, Vol II, Basic Books, California Institute of Technology (Caltech).

License