

1 Einführung

DEFINITION 1.1. **Fluid** Flüssigkeiten und Gase werden unter dem Oberbegriff *Fluide* zusammengefasst.

DEFINITION 1.2. **Druck und Schubspannung** Für einfache Fälle der Cauchy Spannungstensor kann zu zwei Skalare p und τ vereinfacht werden, sie werden Druck bzw. Schubspannung genannt.

$$pA = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = F_{\perp} \quad \tau A = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} = F_{\parallel} \stackrel{\text{statik}}{=} 0$$
$$[p] = \text{Nm}^{-2} = \text{Pa}$$

Folgerung 1.2.1. **Gesetz von Pascal** In ruhenden Fluiden $\tau = 0$, somit ist die Kraft immer senkrecht.

DEFINITION 1.3. **Dichte** Ist die Masse pro Volumeneinheit.

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad [\varrho] = \text{kg m}^{-3}$$

2 Hydrostatik

DEFINITION 2.1. **Schweredruck**

$$dp = \varrho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{y} = -\varrho g dy \quad (2.1)$$

Folgerung 2.1.1. **Hydrostatischer Druck** Für Flüssigkeiten, da die Dichte konstant ist folgt:

$$p = \varrho gh$$

Folgerung 2.1.2. **Schweredruck eines Gase** Angenommen dass, die Dichte nur von Druck abhängt (barotrop)

$$\varrho(p) = \varrho_0 \frac{p}{p_0}$$

Die Lösung von (2.1) ergibt die *Barometrische Höhenformel* für eine isotherme Atmosphäre.

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0}{p_0} gh\right)$$

DEFINITION 2.2. **Gesetz von Boyle-Mariotte** Für ein ideales Gas gilt bei konstanter Temperatur

$$pV = (\text{konstant})$$

Folgerung 2.2.1. Die Dichte ist proportional zum Druck

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

DEFINITION 2.3. **Kompressibilität** Die Druckerhöhung Δp bewirkt in einem Fluid stets eine Volumenabnahme. Die relative Volumenänderung ist proportional zur Druckänderung

$$\Delta V/V = -\kappa \Delta p$$

BEMERKUNG Eine ideale Flüssigkeit ist reibungsfrei und inkompressibel.

BEMERKUNG In einer idealen Flüssigkeit ist die Dichte konstant.

DEFINITION 2.4. **Statische Auftriebskraft** Auch als Archimedische Prinzip bekannt.

$$F_A = G_f = \varrho_f V_k g \quad \hat{\mathbf{F}}_a = -\hat{\mathbf{g}}$$

Der auftrieb eines in ein Fluid eingetauchten Körper ist gleich dem Gewicht des von ihm verdrängten Fluids.

2.1 Grenzflächeneffekte

DEFINITION 2.5. **Oberflächenspannung** Zwischen zwei Atomen oder Molekülen tritt die *Van der Waals*-Kraft. An der Oberfläche der Flüssigkeit ist der mittlere Abstand der Moleküle etwas grösser als im Innern. Das bewirkt eine Parallel zur Oberfläche gerichtete anziehende Kraft zwischen den Molekülen.

$$\sigma = \frac{F}{\ell} \quad [\sigma] = \text{Nm}^{-1}$$

BEMERKUNG Die Oberflächenspannung kann auch als *spezifische Oberflächenenergie* bezeichnet werden.

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \Delta s}{\ell \Delta s} = \frac{F}{\ell}$$

Die *Oberflächenenergie* ist ein Maß für die Energie, die zum Aufbrechen der chemischen Bindungen notwendig ist, wenn eine neue Oberfläche einer Flüssigkeit oder eines Festkörpers erzeugt wird.

Folgerung 2.5.1. **Grenzflächenspannung** Bei einer Vergrößerung der Grenzfläche muss Arbeit geleistet werden, da die Grenzflächenenergie vergrößert wird. Es gibt dann auch die Grenzflächenspannungen $\sigma_{sl}, \sigma_{sg}, \sigma_{lg}$ (flüssig = liquid, fest = solid, gas) die zwischen Festkörper und Flüssigkeit wirken. φ ist dann der *Kontaktwinkel*, und die Geometrie ergibt die Beziehung

$$\sigma_{sg} = \sigma_{sl} + \sigma_{lg} \cos \varphi$$

Beispiel 2.5.1. **Druck in Seifenblase**

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

DEFINITION 2.6. **Kapillarität** Allgemein an die Grenze gilt:

$$F_{\text{Oberfläche}} = F_{G, \text{Flüssigkeit}}$$

Beispiel 2.6.1. **In einem Rohr (Zylinder)**

$$2\pi r \sigma = \varrho \pi r^2 h g \implies h = \frac{2\sigma}{\varrho g r}$$

3 Hydrodynamik

3.1 Einführung

DEFINITION 3.1. **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV = \oint_{\partial V} \varrho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.1)$$

Folgerung 3.1.1. Ideales Fluid Da die Dichte konstant ist (inkompressibel), man kann (3.1) durch ρ teilen und folgt:

$$\dot{V} = \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = vA \quad [\dot{V}] = \text{m}^3 \text{s}^{-1}$$

DEFINITION 3.2. Bernoulli Gleichung Der Term $\rho v^2/2$ wird *dynamische Druck* genannt.

$$p + \rho gh + \frac{\rho}{2} v^2 = (\text{Konstant})$$

BEMERKUNG Bernoulli gilt für inkompressible Fluide, und genügt für Flüssigkeiten und Gase, sofern $v \ll$ Schallgeschwindigkeit.

Folgerung 3.2.1.

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

oder $-\Delta p = \rho g \Delta h + \frac{\rho}{2} \Delta(v^2)$

Folgerung 3.2.2. Wo die Geschwindigkeit am schnellsten ist, dort ist die Druck am tiefsten.

3.2 Reale Strömungen

DEFINITION 3.3. Newtonsche Reibungsgesetz Die Proportionalitätskonstante η wird *dynamische Viskosität* oder *Zähigkeit* genannt.

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz} \stackrel{!}{=} \frac{F_{\parallel}}{A}$$

$[\eta] = \text{kg m}^{-1} \text{s} = \text{Ns m}^{-1} = \text{Pa s}$

DEFINITION 3.4. Formel von Stokes (Stokes'sche Reibung) Reibungskraft einer Kugel im Öl

$$F_R = 6\pi\eta Rv_0$$

DEFINITION 3.5. Laminare Rohrströmung Lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte innerhalb des Zylinders.

$$F_{\text{Res, Druck}} - F_{\text{Reib}} = 0$$

$$\pi r^2(p_1 - p_2) - 2\pi r l \tau = 0$$

Folgerung 3.5.1. Geschwindigkeitsverteilung Innerhalb des Zylinders (r von 0 bis R)

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta\ell} (R^2 - r^2)$$

Folgerung 3.5.2. Gesetz von Hagen Poiseuille

$$\dot{V} = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta\ell}$$

BEMERKUNG Bei einer Zunahme des Rohrradius wird nicht nur die zur Verfügung stehende Querschnittsfläche grösser, sondern zugleich wächst in der Rohrmitte auch die maximale Geschwindigkeit.

3.3 Turbulente Strömung

DEFINITION 3.6. Reynolds Zahl Ist ein dimensionslose Koeffizient aus der *Navier-Stokes* Gleichung, der das Verhältnis zwischen kinetischer Energie des Fluides und dessen innerer Reibung (proportional zur Viskosität) beschreibt.

$$\mathcal{R} = \frac{E_k}{E_r} = \frac{\rho}{\eta} v^* \ell^*$$

v^*, ℓ^* sind eine charakteristische Länge bzw. Geschwindigkeit. Sie sind dimensionslose Variablen für geometrische und physikalische Größen.

Folgerung 3.6.1. Rohrströmung Wird bei der Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt der Durchmesser d als charakteristische Abmessung gewählt, so ist die Reynolds-Zahl

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v d}{\eta}$$

Folgerung 3.6.2. Kritische \mathcal{R}

DEFINITION 3.7. Druckwiderstand

Druckdifferenz

$$\Delta p \propto \rho \Delta v \cdot \bar{v}$$

Schubspannung

$$\tau \propto \eta \frac{\Delta V}{\ell}$$

Prandtl'sche Grenzschicht

$$D = \sqrt{\frac{\eta \ell}{\rho v}}$$

Druckabfall laminar

$$\Delta p = 32\eta\ell \frac{v}{d^2}$$

λ nach Blasius, *turbulent*

$$\lambda_t = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\mathcal{R}}}$$

λ nach Hagen-Poiseuille, *laminar*

$$\lambda_l = \frac{64}{\mathcal{R}}$$

Turbulente Rohrströmung, je nach turbulent oder laminares λ

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho \ell}{2d} v^2$$

Kapitel 6

Druckwiderstand

$$F_D = c_W \frac{\rho}{2} v^2 A_{\perp}$$

Auftriebskraft nach Kutta-Jukowski

$$F_A = \rho v l \Gamma$$

Zirkulation

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \, d\mathbf{l}$$

Induzierter Widerstand

$$F_W = c_W \frac{\rho}{2} v^2 A_{\parallel}$$

Dynamischer Auftrieb

$$F_A = c_A \frac{\rho}{2} v^2 A_{\perp}$$

Gleitwinkel

$$\tan(\varphi) = \frac{F_W}{F_A} = \frac{c_W}{c_A} = \frac{v_V}{v_H}$$

Literatur

- [1] HOCHSCHULE FÜR TECHNIK RAPPERSWIL (HSR). *Ph2HAT Vorlesungen und die dazugehörige Unterlagen*, Sourlier David, Frühlingssemester 2020, Rapperswil.
- [2] ARTHUR RUH, BENNO BUCHER. *Physik 1: Mechanik, Fluide, Wärmelehre*. Vol I, HSR, 2014, Rapperswil.
- [3] RICHARD FEYNMAN. *Mainly Mechanics, radiation, and heat. The Feynman Lectures on Physics*, Leighton, Sands, New Millenium Edition, Vol I, Basic Books, California Institute of Technology (Caltech).
- [4] RICHARD FEYNMAN. *Mainly electromagnetism and matter. The Feynman Lectures on Physics*, Leighton, Sands, New Millenium Edition, Vol II, Basic Books, California Institute of Technology (Caltech).

License

Ph2HAT-ZF (c) by Naoki Pross

Ph2HAT-ZF is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 Unported License.

You should have received a copy of the license along with this work. If not, see

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>