

1 Fluide Einführung

DEFINITION 1.1. **Fluid** Flüssigkeiten und Gase werden unter dem Oberbegriff *Fluide* zusammengefasst.

DEFINITION 1.2. **Druck und Schubspannung** Für einfache Fälle der Cauchy Spannungstensor kann zu zwei Skalare p und τ vereinfacht werden, sie werden Druck bzw. Schubspannung genannt.

$$pA = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = F_{\perp} \quad \tau A = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} = F_{\parallel} \stackrel{\text{statik}}{=} 0$$

$$[p] = \text{N m}^{-2} = \text{Pa}$$

Folgerung 1.2.1. **Gesetz von Pascal** In ruhenden Fluiden $\tau = 0$, somit ist die Kraft immer senkrecht.

Name	Einheit
Kilopond	1 kp = $g \text{ N} \approx 9.81 \text{ N}$ 1 at = 1 kp cm^{-2}
Technische Atmosphäre	$\approx 0.98 \text{ bar}$
Physikalische Atmosphäre	1 atm = 101 325 Pa
Torr	1 Torr = $1/760 \text{ atm}$
Bar	1 bar = $1 \times 10^5 \text{ Pa}$ $\approx 750 \text{ Torr}$

Tabelle 1: Einheiten des Drucks

DEFINITION 1.3. **Dichte** Ist die Masse pro Volumeneinheit.

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad [\varrho] = \text{kg m}^{-3}$$

2 Hydrostatik

DEFINITION 2.1. **Schweredruck**

$$dp = \varrho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{y} = -\varrho g dy \quad (2.1)$$

Folgerung 2.1.1. **Hydrostatischer Druck** Für Flüssigkeiten, da die Dichte konstant ist folgt:

$$p = \varrho gh$$

Folgerung 2.1.2. **Schweredruck eines Gase** Angenommen dass, die Dichte nur von Druck abhängt (barotrop)

$$\varrho(p) = \varrho_0 \frac{p}{p_0}$$

Die Lösung von (2.1) ergibt die *Barometrische Höhenformel* für eine isotherme Atmosphäre.

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0}{p_0} gh\right)$$

DEFINITION 2.2. **Gesetz von Boyle-Mariotte** Für ein ideales Gas gilt bei konstanter Temperatur

$$pV = (\text{konstant})$$

Folgerung 2.2.1. Die Dichte ist proportional zum Druck

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

DEFINITION 2.3. **Kompressibilität** Die Druckerhöhung Δp bewirkt in einem Fluid stets eine Volumenabnahme. Die relative Volumenänderung ist proportional zur Druckänderung

$$\Delta V/V = -\kappa \Delta p$$

Bemerkung 2.3.1. Eine ideale Flüssigkeit ist reibungsfrei und inkompressibel.

Bemerkung 2.3.2. In einer idealen Flüssigkeit ist die Dichte konstant.

DEFINITION 2.4. **Statische Auftriebskraft** Auch als Archimedische Prinzip bekannt.

$$F_A = G_f = \varrho_f V_k g \quad \hat{\mathbf{F}}_a = -\hat{\mathbf{g}}$$

Der auftrieb eines in ein Fluid eingetauchten Körper ist gleich dem Gewicht des von ihm verdrängten Fluids.

2.1 Grenzflächeneffekte

DEFINITION 2.5. **Oberflächenspannung** Zwischen zwei Atomen oder Molekülen tritt die *Van der Waals-Kraft*. An der Oberfläche der Flüssigkeit ist der mittlere Abstand der Moleküle etwas grösser als im Innern. Das bewirkt eine Parallel zur Oberfläche gerichtete anziehende Kraft zwischen den Molekülen.

$$\sigma = \frac{F}{\ell} \quad [\sigma] = \text{N m}^{-1}$$

Bemerkung 2.5.1. Die Oberflächenspannung kann auch als *spezifische Oberflächenenergie* bezeichnet werden.

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \Delta s}{\ell \Delta s} = \frac{F}{\ell}$$

Die *Oberflächenenergie* ist ein Maß für die Energie, die zum Aufbrechen der chemischen Bindungen notwendig ist, wenn eine neue Oberfläche einer Flüssigkeit oder eines Festkörpers erzeugt wird.

Folgerung 2.5.1. **Grenzflächenspannung** Bei einer Vergrößerung der Grenzfläche muss Arbeit geleistet werden, da die Grenzflächenenergie vergrößert wird. Es gibt dann auch die Grenzflächenspannungen $\sigma_{sl}, \sigma_{sg}, \sigma_{lg}$ (flüssig = liquid, fest = solid, gas) die zwischen Festkörper und Flüssigkeit wirken. φ ist dann der *Kontaktwinkel*, und die Geometrie ergibt die Beziehung

$$\sigma_{sg} = \sigma_{sl} + \sigma_{lg} \cos \varphi$$

Beispiel 2.5.1. **Druck in Seifenblase**

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

DEFINITION 2.6. **Kapillarität** Allgemein an die Grenze gilt:

$$F_{\text{Oberfläche}} = F_{G, \text{Flüssigkeit}}$$

Folgerung 2.6.1. In einem Rohr (Zylinder)

$$2\pi r\sigma = \rho\pi r^2hg \implies h = \frac{2\sigma}{\rho gr}$$

3 Hydrodynamik

3.1 Einführung

DEFINITION 3.1. **Kontinuitätsgleichung**

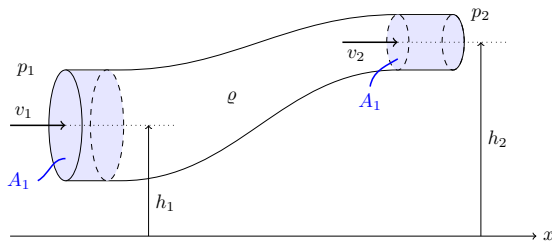
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.1)$$

Folgerung 3.1.1. **Ideales Fluid** Da die Dichte konstant ist (inkompressibel), man kann (3.1) durch ρ teilen und folgt:

$$\dot{V} = \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = vA \quad [\dot{V}] = \text{m}^3 \text{s}^{-1}$$

DEFINITION 3.2. **Bernoulli Gleichung** Der Term $\rho v^2/2$ wird *dynamische Druck* genannt.

$$p + \rho gh + \frac{\rho}{2}v^2 = (\text{Konstant})$$



Bemerkung 3.2.1. Bernoulli gilt für inkompressible Fluide, und genügt für Flüssigkeiten und Gase, sofern $v \ll$ Schallgeschwindigkeit.

Folgerung 3.2.1.

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2$$

oder $-\Delta p = \rho g \Delta h + \frac{\rho}{2} \Delta(v^2)$

Folgerung 3.2.2. Wo die Geschwindigkeit am schnellsten ist, dort ist die Druck am tiefsten.

3.2 Reale Strömungen

DEFINITION 3.3. **Newtonsche Reibungsgesetz** Die Proportionalitätskonstante η wird *dynamische Viskosität* oder *Zähigkeit* genannt.

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz} \stackrel{!}{=} \frac{F_{\parallel}}{A}$$

$$[\eta] = \text{kg m}^{-1} \text{s} = \text{Ns m}^{-1} = \text{Pa s}$$

DEFINITION 3.4. **Formel von Stokes** (Stokes'sche Reibung) Reibungskraft einer Kugel im Öl

$$F_R = 6\pi\eta Rv_0$$

DEFINITION 3.5. **Laminare Rohrströmung** Laufen die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte innerhalb des Zylinders.

$$F_{\text{Res,Druck}} - F_{\text{Reib}} = 0$$

$$\pi r^2(p_1 - p_2) - 2\pi r l \tau = 0$$

Folgerung 3.5.1. **Geschwindigkeitsverteilung** Innerhalb des Zylinders (r von 0 bis R)

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Folgerung 3.5.2. **Gesetz von Hagen Poiseuille**

$$\dot{V} = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l} \quad (3.2)$$

Folgerung 3.5.3. **Druckabfall** Wenn man in (3.2) $\dot{V} = \pi R^2 v$ einsetzt, folgt:

$$\Delta p = 32\eta l \frac{v}{d^2}$$

Bemerkung 3.5.1. Bei einer Zunahme des Rohrradius wird nicht nur die zur Verfügung stehende Querschnittsfläche grösser, sondern zugleich wächst in der Rohrmitte auch die maximale Geschwindigkeit.

DEFINITION 3.6. **Prandtl'sche Grenzschicht** h ist die Höhe der Schicht in unmittelbarer Nähe einer Oberfläche $A = \ell b$ an ein Fluid, der vorbeiströmt, mitgezogen wird.

$$h = \frac{\ell}{\sqrt{\mathcal{R}}} = \sqrt{\frac{\eta \ell}{\rho v}}$$

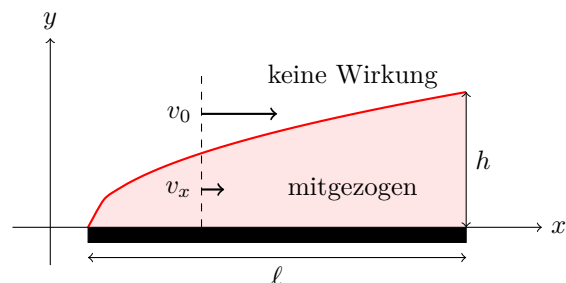


Abbildung 1: Laminare Grenzschicht für eine Plattenströmung

3.3 Turbulente Strömung

DEFINITION 3.7. **Reynolds Zahl** Ist ein dimensionslose Koeffizient aus der Navier-Stokes Gleichung, der das Verhältnis zwischen kinetischer Energie des Fluides und dessen innerer Reibung (proportional zur Viskosität) beschreibt.

$$\mathcal{R} = \frac{E_k}{E_r} = \frac{\rho}{\eta} v^* \ell^*$$

v^*, ℓ^* sind eine charakteristische Länge bzw. Geschwindigkeit. Sie sind dimensionslose Variablen für geometrische und physikalische Größen.

Folgerung 3.7.1. Rohrströmung Wird bei der Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt der Durchmesser d als charakteristische Abmessung gewählt, so ist die Reynolds-Zahl

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v d}{\eta}$$

DEFINITION 3.8. **Kritische Reynoldszahl** \mathcal{R}_k

DEFINITION 3.9. **Reale Rohrströmung** Turbulente Rohrströmung, je nach turbulent oder laminares λ

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho \ell}{2d} v^2$$

Beispiel 3.9.1. **Turbulente λ nach Blasius**

$$\lambda_t = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\mathcal{R}}}$$

Beispiel 3.9.2. **Laminare λ nach Hagen-Poiseuille**
Das ist tatsächlich (3.2) umformuliert.

$$\lambda_l = \frac{64}{\mathcal{R}}$$

3.4 Dynamischer Auftrieb

DEFINITION 3.10. **Auftriebskraft nach Kutta-Jukowski** Dieser Auftrieb ist eine Folgerung vom *Magnus Effekt*.

$$F_A = \rho v \ell \Gamma$$

DEFINITION 3.11. **Druckwiderstand**

$$F_D = c_W \frac{\rho}{2} v^2 A_{\perp}$$

DEFINITION 3.12. **Zirkulation** Ist ein Mass für die Wirbelstärke. Die Zirkulation ist eine makroskopische Grösse und hängt vom Weg ab.

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

3.5 Tragflügel

Induzierter Widerstand

$$F_W = c_W^* \frac{\rho}{2} v^2 A_{\parallel}$$

Dynamischer Auftrieb

$$F_A = c_A \frac{\rho}{2} v^2 A_{\perp}$$

Gleitwinkel

$$\tan(\varphi) = \frac{F_W}{F_A} = \frac{c_W}{c_A} = \frac{v_V}{v_H}$$

4 Wärmelehre Einführung

DEFINITION 4.1. **Absolute Temperatur**

$$T = \vartheta + 273.15 \text{ K} = \vartheta - \vartheta_0$$

DEFINITION 4.2. **Stoffmenge** Hier *Partikel* steht für Moleküle, Atome oder Ionen.

$$1 \text{ mol} = N_A \text{ Partikeln} = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Der Avogadro-Zahl N_A entspricht Anzahl von Partikeln in eine Mole, und 1 Mol ist als der Anzahl von Atome ^{12}C in 0.012 kg definiert worden.

4.1 Flüssigkeiten und Festkörpern

DEFINITION 4.3. **Thermische Ausdehnung**

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

$$\Delta A = \beta A \Delta T$$

$$\Delta V = \gamma V \Delta T$$

$$\beta \approx 2\alpha$$

$$\gamma \approx 3\alpha$$

Bemerkung 4.3.1. Anomalie des Wassers Bei der Temperatur 4°C verschwindet sein Volumenausdehnungskoeffizient. Ebenfalls ungewöhnlich ist, dass die Dichte des festen Zustandes kleiner ist als die des flüssigen Zustandes.

Folgerung 4.3.1. **Thermische Spannung**

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\Delta l}{l} = E \alpha \Delta T$$

5 Ideale Gase

DEFINITION 5.1. **Universelle Gasgleichung für ideale Gase**

$$pV = nRT = N_A k_B T = (\text{konstant})$$

$$\text{oder } \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

- $R = N_A k_B = 8.313 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ist die Universelle Gaskonstante
- $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ ist die Boltzmann-Konstante.

DEFINITION 5.2. **Molzahl**

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$$

wobei M ist die sogenannte Molmasse in kg mol^{-1} .

Folgerung 5.2.1. **Spezifische Gaskonstante** R_s

$$pV = \frac{m}{M} RT = m R_s T$$

Folgerung 5.2.2. **Dichte eines Gases**

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V_m} = \frac{pM}{RT}$$

Kapitel 9

Gesetz von Dalton

$$p = \sum_{i=1}^n p_i$$

Volumen-Konzentration

$$q_i = \frac{V_i}{V}$$
$$q_i = \frac{n_i}{n}$$

Massen-Konzentration

$$\mu_i = \frac{m_i}{m}$$
$$\mu_i = \frac{M_i}{M} q_i$$

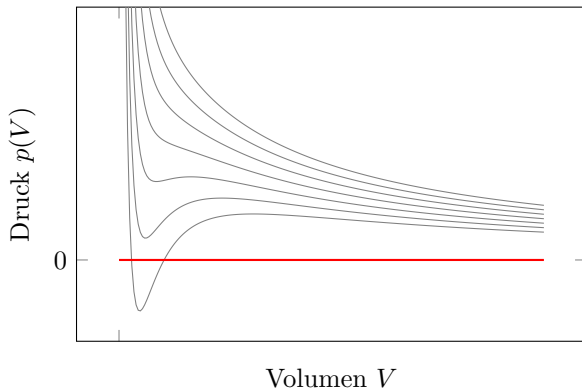
Mol-Masse eines Gas-Gemischs

$$M = \sum_{i=1}^n q_i M_i$$

Reales Gas

Van der Waals-Korrektur

$$p' V'_m = nRT \quad p' = p + \frac{a}{V_m^2} \quad V'_m = V_m - b$$



Van der Waals-Gleichung

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right) (V - nb) = nRT$$

Van der Waals-Parameter

$$a = \frac{9}{8} RT_k V_{mk} \quad b = \frac{V_{mk}}{3}$$

Kritische Größen

$$V_{mk} = 3b \quad T_k = \frac{8a}{27Rb} \quad p_k = \frac{a}{27b^2}$$

Kapitel 10

Änderung innere Energie

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q$$

Mechanische Arbeit von einem Gas

$$\Delta W = p \Delta V$$

Schmelz-/Erstarrungs-Wärme

$$Q_f = q_f m$$

Verdampfungs-/Kondensations-Wärme

$$Q_s = q_s m$$

Wärmekapazität

$$Q = cm \Delta T = n C_m \Delta T = C \Delta T$$

Wärme-Bilanz

$$0 = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i + \Delta Q_{f_i} + \Delta Q_{s_i}$$

Literatur

- [1] HOCHSCHULE FÜR TECHNIK RAPPERSWIL (HSR). *Ph2HAT Vorlesungen und die dazugehörige Unterlagen*, Sourlier David, Frühlingssemester 2020, Rapperswil.
- [2] ARTHUR RUH, BENNO BUCHER. *Physik 1: Mechanik, Fluide, Wärmelehre*. Vol I, HSR, 2014, Rapperswil.
- [3] RICHARD FEYNMAN. *Mainly Mechanics, radiation, and heat. The Feynman Lectures on Physics*, Leighton, Sands, New Millenium Edition, Vol I, Basic Books, California Institute of Technology (Caltech).
- [4] RICHARD FEYNMAN. *Mainly electromagnetism and matter. The Feynman Lectures on Physics*, Leighton, Sands, New Millenium Edition, Vol II, Basic Books, California Institute of Technology (Caltech).

License

Ph2HAT-ZF (c) by Naoki Pross

Ph2HAT-ZF is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 Unported License.

You should have received a copy of the license along with this work. If not, see

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>