

# SigSys 1

Schmidt, Selvarajah, weitere HSR-Studenten

14. August 2021

## **Inhaltsverzeichnis**

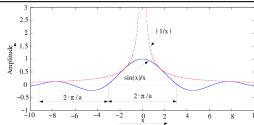
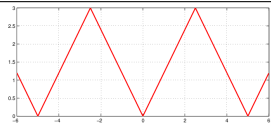
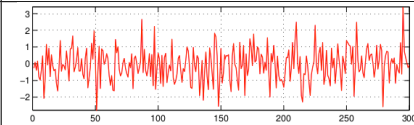
# 1 Signalbeschreibung Skript S.1

## 1.1 Signalklassen Skript S.2

periodisch	↔	nicht-periodisch	Nachrichtensignal:	-Trägt Information -nicht deterministisch
kontinuierlich	↔	zeitdiskret		Hilfssignal:
analog	↔	digital	Störsignal:	
reell	↔	komplex		
eindimensional	↔	mehrdimensional		
deterministisch	↔	stochastisch		

**Stochastische Signale** sind schwach stationär (Linearer Mittelwert  $X_0$  und Autokorrelation  $\phi_x x(t)$  hängen nicht von der Zeit  $t$ ) und können nur durch **Wahrscheinlichkeitsverteilungen** beschrieben werden.

### 1.1.1 Energie- und Leistungssignale Skript S.3

	Klasse 1: Energiesignale	Klasse 2: Leistungssignale	
		Klasse 2a: periodisch 	Klasse 2b: aperiodisch 
<b>Dichtespektrum</b>	$E(j\omega) =  F(j\omega) ^2$	$\Phi(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{ F(j\omega) ^2}{T}$	
<b>Normierte Signalleistung</b>	$P_n = 0$	$P_n = X^2$ (quadr. Mittelwert) (Formeln rechts gelten auch)	$P_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2}  f(t) ^2 dt$ $P_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) d\omega$
<b>Normierte Signalenergie</b>	$W_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2}  f(t) ^2 dt$ $W_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) d\omega$	$W_n = \infty$	

## 1.2 Mittelwerte Skript S.5

Kenngrosse	Formel	Bemerkung(en)
Arithmetischer Mittelwert, Linearer MW	$X_0 = \bar{X} = X_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$	Ist die Fläche unter der Zeitfunktion über eine Periode, nur Klasse 2a
Quadratischer MW, Leistung	$X^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$	nur Klasse 2a
Mittelwert n. Ordnung	$X^n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t) dt$	nur Klasse 2a
Effektivwert	$X = X_{\text{eff}} = \sqrt{X^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt}$	nur Klasse 2a
Gleichrichtwert	$X_{ m } =  \bar{X}  = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2}  x(t)  dt$	Arithm. Mittelwert der Zweiweggleichrichterschaltung
Varianz	$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - X_0)^2 dt = X^2 - X_0^2$	Mittlerer Fehler im Quadrat
Standardabweichung	$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)}$	

**Hinweis:**

Für Signale der **Klasse 2b** lassen sich Mittelwerte usw. allgemein mit  $\lim_{T \rightarrow \infty}$  berechnen!

Für **reelle Signale** gilt:  $X^2 = |X|^2 = Var(|x|) + |X_0|^2$  Dies kann die Berechnung des quadratischen Mittelwertes eines zum linearen Mittelwert symmetrischen Signales erleichtern.

### 1.3 Korrelation **Skript S.8**

Mittels Vergleichen von Funktionen mit sich selbst oder mit einer anderen Funktion, kann herausgefunden werden, ob eine Korrelation vorliegt oder nicht.

**Hinweis:** Korrelation  $\neq$  Kausalität, aber Kausalität = Korrelation

- Autokorrelation: Vergleich mit sich selbst.
- Kreuzkorrelation: Vergleich mit einer anderen Funktion.

#### 1.3.1 Autokorrelationsfunktion (AKF) **Skript S.8**

Die Autokorrelation ist ein Mass für die innere **Kohärenz** (Ähnlichkeit) eines Signals (Wie weit stehen die verschobenen Signale zu einander?).

Energiesignale (Klasse 1)	periodische Leistungssignale (2a)	stochastische Leistungssignale (2b)
$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t - \tau)dt$ $= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau)x(t)dt$ $= \varphi_{xx}(-\tau)$	$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t - \tau)dt$ $= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau)x(t)dt$ $= \varphi_{xx}(-\tau)$	$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t - \tau)dt$ $= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau)x(t)dt$ $= \varphi_{xx}(-\tau)$

#### Eigenschaften

- $\varphi_{xx}(0) = X^2 = (X_0)^2 + \sigma^2$  (Hat immer Diracstoss bei  $\tau = 0$ )
- $\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau \pm mT)$ , d.h. die AKF ist periodisch mit der gleichen Periode  $T$  wie das Signal  $x(t)$ .
- $\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(-\tau)$ : d.h. die AKF ist eine **gerade Funktion**
- $\varphi_{xx}(0) \geq |\varphi_{xx}(\tau)|$
- $\varphi_{xx}(\tau) \geq (X_0)^2 - \sigma^2$

Für Leistungssignale gilt:  $\Phi(j\omega)$ : Leistungsdichtespektrum

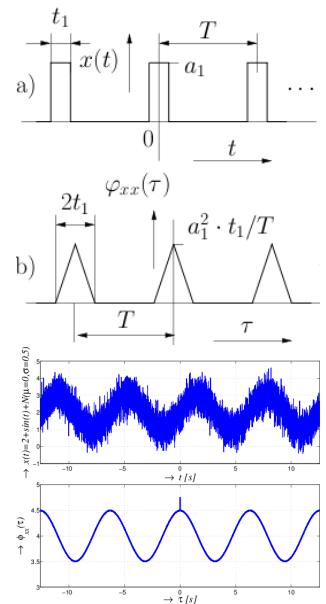
$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \varphi_{xx}(t) \circ \bullet \Phi(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Für Energiesignale gilt:  $E(j\omega)$ : Energiedichtespektrum

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \varphi_{xx}(t) \circ \bullet E(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

#### Beispiele

- $x(t) = a_k \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \varphi_{xx}(t) = \frac{a_k^2}{2} \cos(\omega t)$
- $x(t) = b_k \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \varphi_{xx}(t) = \frac{b_k^2}{2} \cos(\omega t)$



### 1.3.2 Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) Skript S.11

Die Kreuzkorrelationsfunktion von periodischen Leistungssignalen (Klasse 2a) ist ein Mass für die Ähnlichkeit von zwei verschiedenen Signalen. "Wie ähnlich sind sich zwei Signale?" (Matlab: `xcorr`)

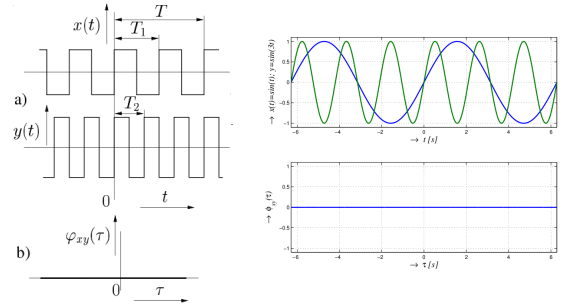
Energiesignale (Klasse 1)	periodische Leistungssignale (2a)	stochastische Leistungssignale (2b)
$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t - \tau)dt$ $= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau)y(t)dt$	$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t - \tau)dt$ $= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau)y(t)dt$	$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t - \tau)dt$ $= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau)y(t)dt$

#### Eigenschaften

- Bei Signalen mit verschiedenen Frequenzen ist  $\varphi_{xy}$  immer 0!
- Bei stochastischen Signalen ist  $\varphi_{xy}$  immer 0!

Für stochastische Leistungssignale (Klasse 2b) gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \varphi_{xy}(t) \longleftrightarrow \Phi_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(t)e^{-j\omega t}dt$$

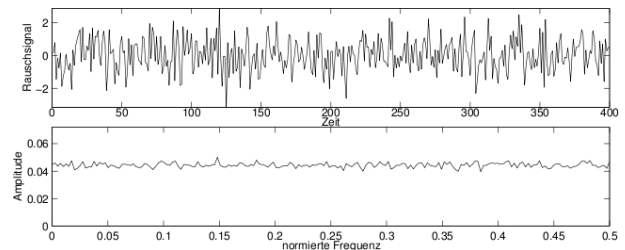


### 1.4 Rauschen Skript S.25 (Matlab: `randn`)

Ist die Intensität der Rauschspannung über viele Frequenzdekaden gleich verteilt, so spricht man von **weissem Rauschen**.

Ideale Blindwiderstände verursachen kein Rauschen!

- $SNR = \frac{P_s}{P_r} = \frac{\text{Signalleistung}}{\text{Rauschleistung}}$  (rauschfrei:  $SNR \rightarrow \infty$ )
- Effektive Rauschspannung:  $U_r = \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot \Delta f \cdot R}$
- Effektive Rauschleistung:  $P_r = k \cdot T \cdot \Delta f$
- Boltzmann-Konstante:  $k = 1.380662 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$



### 1.5 Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) Skript S.27

Zur Qualitätsbeurteilung von Signalen wird das Verhältnis zwischen der Leistung des Nutzsignales  $P_s$  und der des Rauschsignales  $P_r$  gebildet. Dieses Verhältnis wird **Störabstand** oder **Rauschabstand**  $a_r$  genannt.

$$a_r = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_s}{P_r} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_s}{U_r} \right) \quad [a_r] = dB$$

Mindestwert für eine rauschfreie Übertragung:  
Musik und Sprache  $\rightarrow$  30 dB  
Bilder  $\rightarrow$  40 dB

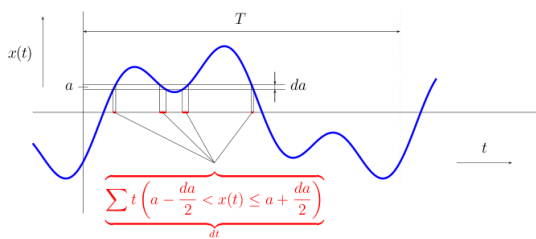
### 1.6 Rauschzahl $F$ und Rauschmass $a_F$ Skript S.27

Jeder Vierpol verkleinert den Rauschabstand des Ausgangssignales gegenüber dem Rauschabstand des Eingangssignales. Die Verschlechterung des Rauschleistungsabstandes wird durch die Rauschzahl  $F$  (*noise figure*) angegeben. Es ist das Verhältnis des Rauschabstandes am Eingang zum Rauschabstand am Ausgang eines Vierpols.

**Rauschzahl:** 
$$F = \frac{SNR_{Eingang}}{SNR_{Ausgang}} = \frac{\frac{P_{sEingang}}{P_{rEingang}}}{\frac{P_{sAusgang}}{P_{rAusgang}}} = \frac{P_{sEingang}}{P_{rEingang}} \cdot \frac{P_{rAusgang}}{P_{sAusgang}}$$
 Idealer Vierpol:  $F = 1$

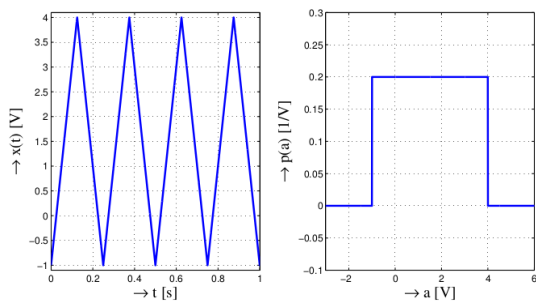
**Rauschmass (logarithmisch):** 
$$a_F = 10 \cdot \log_{10}(F) = a_{rEingang} - a_{rAusgang} \quad [a_F] = dB$$

### 1.7 Amplitudenanalyse von Signalen **Skript S.29**



Die Amplitudendichte  $p(a)$  ist ein Mass für u die relative Zeit ( Zeit / Gesamtzeit = Wahrscheinlichkeit), während der sich das Signal in einem bestimmten Amplitudenintervall  $a \pm da / 2$  aufhält.  
 "Zeit während sich Signal in bestimmtem Amplitudenintervall aufhält"

$$p(a) = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{\sum t \left( a - \frac{da}{2} < x(t) \leq a + \frac{da}{2} \right)}{T \cdot da} = \frac{1}{T} \cdot \frac{dt}{da}$$



#### Eigenschaften

- Es gibt keine negativen Werte!  $p(a) \geq 0 \quad \forall a$

- Gesamtwahrscheinlichkeit:  $\int_{-\infty}^{\infty} p(a) da = 1$

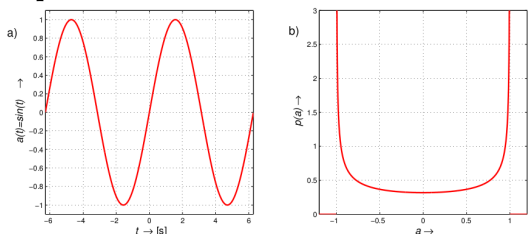
- Wahrscheinlichkeit  $a_1 < a < a_2$ :  $p(a_1 < a < a_2) = \int_{a_1}^{a_2} p(a) da$

**Linearer Mittelwert:**  $X_0 = \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot p(a) da$

**Mittelwert n. Ordnung:**  $X^n = \int_{-\infty}^{\infty} a^n \cdot p(a) da$

**Varianz:**  $Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (a - X_0)^2 \cdot p(a) da$

#### Beispiel:



$$f(t) = \sin(t)$$

$$t = \arcsin(a)$$

$$\frac{dt}{da} = 2 \cdot \frac{d(\arcsin(a))}{da} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

Der Faktor 2 kommt daher, dass die Sinusfunktion nicht eindeutig ist!

$$p(a) = \frac{1}{T} \cdot \frac{dt}{da} = \frac{2}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

### 1.8 Zentraler Grenzwertsatz

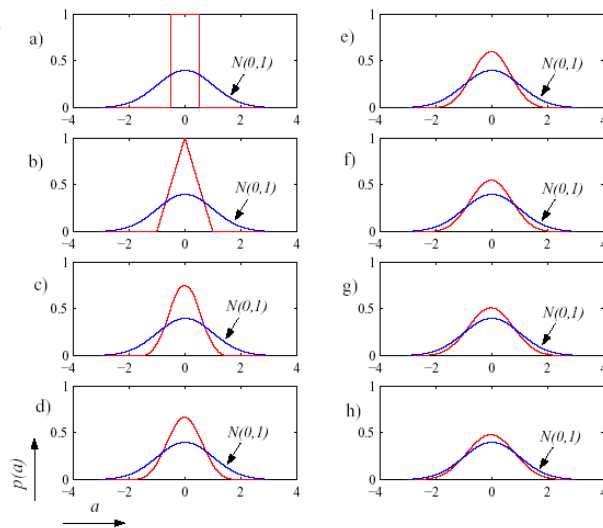
$X_1, X_2, \dots, X_n$  sind lauter identisch verteilte (nicht notwendig normalverteilt!) unabhängige Zufallsvariablen mit demselben Erwartungswert  $\mu$  und derselben Varianz  $\sigma^2$  und mit  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ . Dann hat die Summe

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i$$

den Erwartungswert  $n\mu$  und die Varianz  $n\sigma^2$ . Die damit verbundene standardisierte ( $E(S_n) = 0, var(S_n) = 1$ ) Variable  $S_n$  ist somit wie folgt definiert:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \left[ \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) - n\mu \right] = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

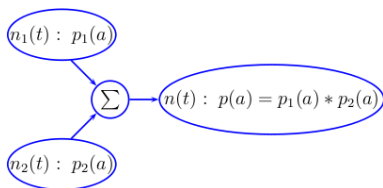
Für  $n \rightarrow \infty$  strebt die Verteilung von  $S_n$  gegen die Standardnormalverteilung.



### 1.9 Faltung Skript S.34

Convolution, "Addition zweier unabhängiger ergodischer Prozesse  $n_i$ " (Matlab: conv)

$$p(a) = p_1(a) * p_2(a) = p_2(a) * p_1(a) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\xi) \cdot p_2(a - \xi) d\xi$$



- Gesamtbreite der Faltung = Summe der Breiten aller Funktionen
- Startpunkt = Summe aller Startpunkte
- Endpunkt = Summe aller Endpunkte
- $f(t) * g(t) \circ \bullet \rightarrow F(s)G(s)$
- $F(s) * G(s) \bullet \circ \rightarrow \frac{1}{2\pi} f(t)g(t)$

**Faltung zweier Normalverteilungen:** Ergibt wieder eine Normalverteilung:

$$N(\mu_1, \sigma_1) * N(\mu_2, \sigma_2) = N\left( \underbrace{\mu_1 + \mu_2}_{\mu}, \underbrace{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}_{\sigma} \right)$$

**Zentraler Grenzwertsatz:** Unendlich viele unabhängige Prozesse miteinander gefaltet ergibt (unabhängig von den einzelnen Verteilungen) eine **Normalverteilung**.

1.10 Stochastische Signale und deren Verteilungen **Skript S.38**

Verteilung	gleichverteilt	gaussförmig	sinusförmig	exponentiell
Amplitudendichte	$p(a) = \begin{cases} \frac{1}{A} &  a - m  \leq \frac{A}{2} \\ 0 &  a - m  > \frac{A}{2} \end{cases}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - a^2}} &  a  \leq A \\ 0 &  a  > A \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda a} & a \geq 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$
Wahrscheinlichkeit, dass die Amplitude $a$ kleiner gleich $\alpha$ ist	$P(a \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} p(a) da = \begin{cases} \frac{\alpha - (m - \frac{A}{2})}{A} & \alpha < m - \frac{A}{2} \\ \frac{\alpha - m + \frac{A}{2}}{A} &  a - m  \leq \frac{A}{2} \\ 1 & \alpha \geq m + \frac{A}{2} \end{cases}$	$Q\left(\frac{\mu - \alpha}{\sigma}\right)$	$\begin{cases} 0 & \alpha \leq -A \\ \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{A}\right) \right) &  \alpha  < A \\ 1 & \alpha \geq A \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & a < 0 \\ 1 - e^{-\lambda a} & a \geq 0 \end{cases}$
linearer Mittelwert $X_0 =$	$m$	$\mu$	$0$	$\frac{1}{\lambda}$
Varianz $\text{Var}(x) = X^2 - X_0^2$	$\frac{A^2}{12}$	$\sigma^2$	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Leistung $X^2 = \text{Var}(x) + X_0^2$ (quadratischer Mittelwert)	$m^2 + \frac{A^2}{12}$	$\mu^2 + \sigma^2$		$\frac{2}{\lambda^2}$

**Stochastische Signale** sind schwach stationär (Linearer Mittelwert  $x_0$  und Autokorrelation  $\phi_{xx}(t)$  hängen nicht von der Zeit  $t$  ab) und können nur durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben werden.

**Anmerkung zur gaussförmigen Verteilung:**

Im Intervall  $\mu \pm 3\sigma$  sind 99,73% aller Messwerte zu finden. In der Zeichnung ist diese Stelle mit **b** gekennzeichnet.

Allgemein:  $\text{Var}(x) = X^2 - X_0^2$

**1.10.1 Addition von zweier stochastischen Signalen**

Die Addition von zwei unabhängigen Signalen entspricht der Faltung ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

$$x_1(t) : p_1(a) \oplus x_2(t) : p_2(a) = x(t) : p(a) = p_1(a) * p_2(a)$$

1.11 Zusammenstellung einiger wichtiger Funktionen **Skript S.44**

Signal / Funktion	Endliche Signalleistung $0 < P_n < \infty, (W_n = \infty)$		Endliche Signalenergie $W_n < \infty$ abklingend, zeitbegrenzt
	periodisch ( $\omega_0 = 2\pi/T_0$ )	stochastisch (stationär)	
Autokorrelationsfunktion (AKF)	$\varphi(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)f(t+\tau)dt$	$\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)dt$	$\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt$
Fourier-Transformation der AKF	$P_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \varphi(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}d\tau$	$\Phi(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$	$E(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$
Rücktransformation der AKF	$\varphi(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0\tau}$	$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$	$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$
Amplitudenspektrum	$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0t}dt$	-	-
Amplitudendichtespektrum	-	-	$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$
Leistungsspektrum	$P_n =  c_n ^2$	-	-
Leistungsdichtespektrum	-	$\Phi(j\omega) = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left  \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega t}dt \right ^2 \right\}$	-
Energiedichtespektrum	-	-	$E(j\omega) =  F(j\omega) ^2$
Energie	-	-	$W = \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)d\omega$
Leistung	$P = \varphi(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n$	$P = \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega)d\omega$	-
Fourier-Reihe	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$	-	-
Fourier-Integral	-	-	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$



## 2 Signalfussdiagramm **Skript S.55**

- Graphische Lösung linearer Gleichungen
- Graphische Darstellung von LTI-Systemen
- Änderung der Topologie ohne UTF zu ändern

### 2.1 Glossar **Skript S.56**

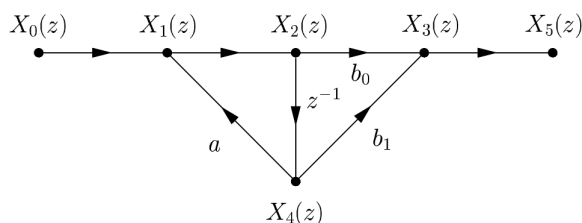
<b>Knoten:</b>	Darstellung einer Grösse, eines Signals oder einer Variable
Quelle:	Unabhängiger Knoten, es münden keine Zweige ein
Senke:	Knoten, ohne weggehende Zweige
<b>Zweig:</b>	Funktionelle Abhängigkeit einer Grösse
<b>Pfad:</b>	Kontinuierliche Folge von Zweigen, die in die gleiche Richtung zeigen
Offener Pfad:	Ein Pfad, bei dem jeder beteiligte Knoten nur <b>einmal</b> durchquert wird
Vorwärtspfad:	Ein offener Pfad zwischen einer Quelle und einer Senke
<b>Schleife (L):</b>	Ein geschlossener Pfad, welcher zum Ausgangsknoten zurückkehrt, wobei jeder beteiligte Knoten nur einmal durchlaufen wird, ausgenommen der Ausgangsknoten
Eigenschleife:	Eine (Rückkopplungs)schleife, die aus einem Zweig und einem Knoten besteht
<b>Zweigtransmittanz:</b>	Die lineare Grösse, unabhängig von ihrer Dimension, die einen Knoten eines Zweiges zum anderen Knoten in Beziehung setzt.
<b>Schleifentransmittanz:</b>	Das Produkt der Zweigtransmittanzen in einer Schleife.

### 2.2 Konstruktionsregel **Skript S.61**

- Knoten = Variablen und Zweigtransmittanzen = Koeffizienten des linearen Gleichungssystem.
- Signale durchqueren Zweige nur in Pfeilrichtung und werden mit der entsprechenden Zweigtransmittanz multipliziert.
- Wert der Variable (Knoten) = Summe aller Signale, die in diesen Knoten einmünden.
- Wert der Variable (Knoten) wird auf alle weggehenden Zweige übertragen.

**Beispiel:**

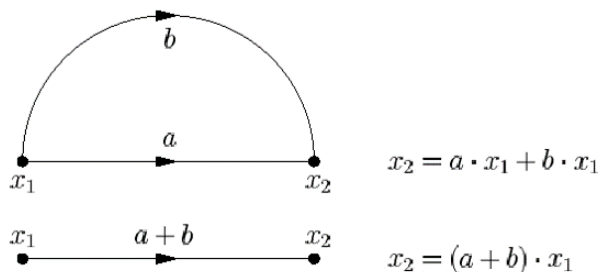
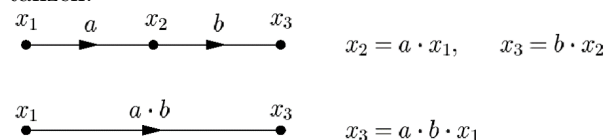
$$\begin{aligned}
 X_1(z) &= a \cdot X_4(z) + X_0(z) \\
 X_2(z) &= X_1(z) \\
 X_3(z) &= b_0 \cdot X_2(z) + b_1 \cdot X_4(z) \\
 X_4(z) &= z^{-1} \cdot X_2(z) \\
 X_5(z) &= X_3(z)
 \end{aligned}$$



### 2.3 Reduktionsregel **Skript S.61**

#### 2.3.1 Regel 1: Kettentransformation **Skript S.61**

Die gesamte Übertragung einer Kaskade von Zweigen (d.h. einem Pfad) ist gleich dem Produkt der einzelnen Transmittanzen.

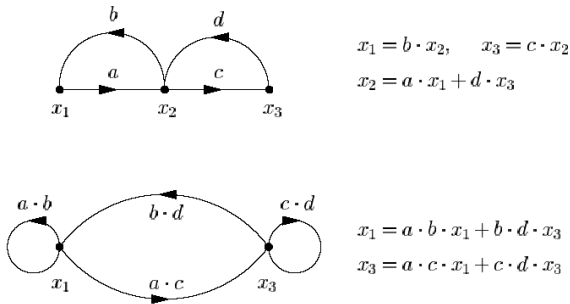


#### 2.3.3 Regel 3: Entfernung eines Knotens **Skript S.61**

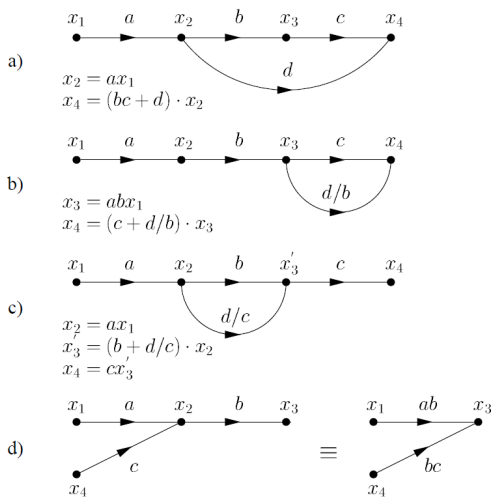
Der Anfangs- oder Endpunkt einer Transmittanz kann entfernt oder verschoben werden, solange die Transmittanz zwischen den interessierenden Knoten im System unverändert bleibt.

#### 2.3.2 Regel 2: Paralleltransformation **Skript S.61**

Die gesamte Transmittanz paralleler Zweige ist gleich der Summe der einzelnen Zweigtransmittanzen.

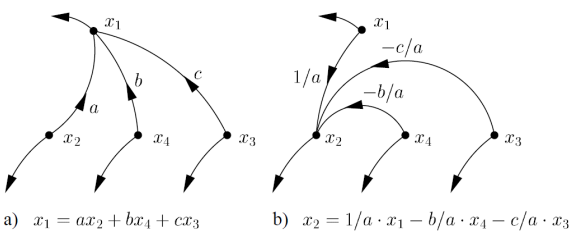


**2.3.4 Regel 4: Transmittanzverschiebung Skript S.62**



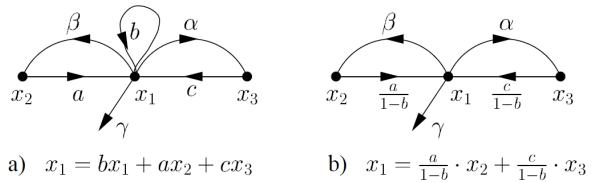
Wichtig ist, dass eine neue Variable  $x'_3$  eingeführt wird, wenn der Endpunkt eines inneren Zweiges verschoben wird. (siehe c)

**2.3.5 Regel 5: Pfadinversion Skript S.63**



Es gilt zu beachten, dass die Inversion eines Pfades (dessen Anfangspunkt nach Definition eine Quelle sein muss) den Effekt hat, dass die Quelle vom einen Ende des Pfades zum anderen Ende verschoben wird. Der Pfad von  $x_i$  nach  $x_j$  hat eine Transmittanz von  $L$ . Den zu invertierenden Pfad setzen wir  $\frac{1}{L}$  und alle Pfade welche ursprünglich in  $x_i$  endeten, werden verschoben, dass sie neu in  $x_j$  enden und ihre Transmittanzen werden mit  $-\frac{1}{L}$  multipliziert.

**2.3.6 Regel 6: Entfernen einer Eigenschleife Skript S.64**

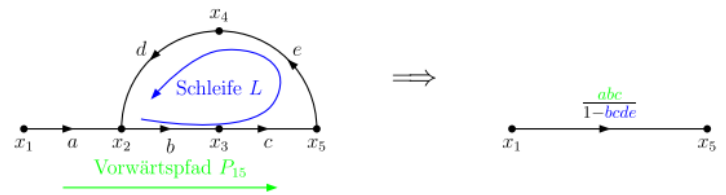


Die Eigenschleife hat die Transmittanz  $L$ . Sie wird entfernt indem man bei allen anderen Zweigen welche **in den Knoten münden**, durch  $(1 - L)$  dividiert.

**2.3.7 Regel 7: Schleifenreduktion Skript S.65**

**2.3.7.1 Einzelne Schleife**

Die Transmittanz einer unabhängigen Variablen  $x_i$  (d. h. einer Quelle) zu einer abhängigen Variable (d. h. einem inneren Knoten oder einer Senke) in einem SFD, das nur eine Schleife und einen Vorwärtspfad enthält, ist gleich  $H_{ij} = \frac{P_{ij}}{1-L}$  wobei  $P_{ij}$  die Transmittanz des Vorwärtspfades von  $x_i$  nach  $x_j$  und  $L$  die Transmittanz der Schleife ist. Die Formel lässt sich mittels der Lösung des entsprechenden Gleichungssystems oder äquivalent durch Transmittanzverschiebung und Entfernung der Eigenschleife beweisen.

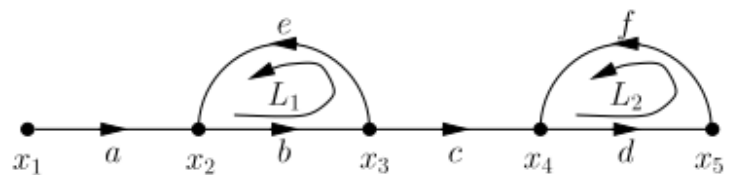


a)  $x_2 = a \cdot x_1 + d \cdot e \cdot x_5$   
 $x_5 = b \cdot c \cdot x_2$   
 $\Rightarrow \frac{x_5}{bc} = ax_1 + dex_5 \Rightarrow \frac{x_5}{x_1} = \frac{abc}{1-bcde}$

b)  $H_{15} = \frac{x_5}{x_1} = \frac{P_{15}}{1-L}$   
 Vorwärtspfad  $P_{15} = abc$   
 Schleifentransmittanz  $L = bcde$

**2.3.7.2 Mehrere sich nicht berührende Schleifen**

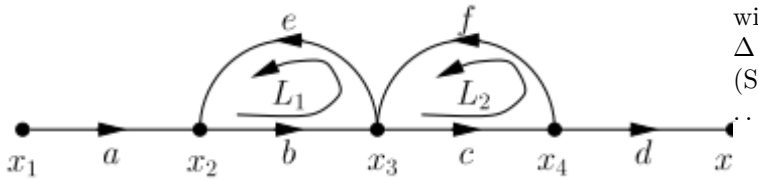
Bei einer Kaskade von sich nicht berührenden Schleifen (d. h. , dass sie keine jeweils gemeinsamen Knoten haben) ist die gesamte Transmittanz gleich dem Produkt der einzelnen Transmittanzen:  $H_{in} = \frac{P_{ij}}{1-L_j} \cdot \frac{P_{jk}}{1-L_k} \cdot \dots \cdot \frac{P_{(n-1)n}}{1-L_n}$



$H_{15} = \frac{x_5}{x_1} = \frac{P_{13}}{1-L_1} \cdot \frac{P_{35}}{1-L_2} = \frac{P_{15}}{1-L_1-L_2+L_1 \cdot L_2} = \frac{abcd}{1-be-df+bedf}$

**2.3.7.3 Mehrere sich berührende Schleifen**

Für den Fall, dass die zwei Schleifen mindestens einen gemeinsamen Knoten haben, ist die gesamte Transmittanz gegeben durch:  $H_{ij} = \frac{P_{ij}}{1-L_i-L_j}$



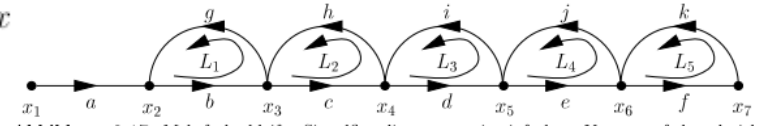
$$H_{15} = \frac{x_5}{x_1} = \frac{P_{15}}{1-L_1-L_2} = \frac{abcd}{1-be-cf}$$

**2.3.8 Regel 8: Allgemeine Mehrfachschleifen-Reduktionsregel für einfache Pfade** Skript S.66

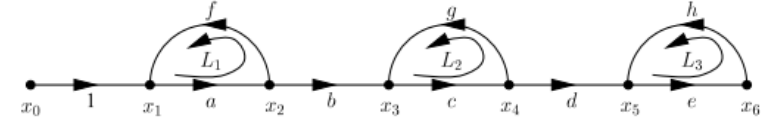
Wir betrachten hier den Mehrfachschleifenfall wo nur ein Pfad zwischen einer Quelle  $x_i$  und einem abhängigen Knoten  $x_j$  existiert, wobei dieser Pfad jede Schleife im SFD berührt, (d. h. dass er wenigstens einen Knoten mit jeder Schleife gemeinsam hat). Kurz ausgedrückt, lautet die Mehrfachschleifen Reduktionsregel für einfache Pfade:  $H_{ij} = \frac{P_{ij}}{\Delta}$   
 Die Grösse  $\delta$  ist die Graph- oder Netzwerkdeterminante.  $\Delta$

wird folgendermassen ermittelt:

$\Delta = 1 - (\text{Summe alle Schleifen}) + (\text{Summe aller Produkte zweier Sch}) - (\text{Summe aller Produkte dreier Schleifen, die sich nicht berühren}) + \dots$



$$H_{17} = \frac{x_7}{x_1} = \frac{P_{17}}{\Delta} = \frac{P_{17}}{1-(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5)+(L_1L_3+L_1L_4+L_1L_5+L_2L_4+L_2L_5)+\dots}$$



$$H_{06} = \frac{x_6}{x_0} = \frac{P_{06}}{\Delta} = \frac{P_{06}}{1-(L_1+L_2+L_3)+(L_1L_2+L_1L_3+L_2L_3)-L_1L_2L_3} = \frac{abcde}{1-af-cg-eh+afcg+afeh+cgeh-afcgeh}$$

## 2.4 Mason's Regel Skript S.69

$$H_{ij} = \frac{\sum_k P_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

$P_k$ : Vorwärtspfad  $k$  (bez. auf 1 Eingang)  
 $\Delta_k$ : Kofaktor des  $k$ -ten Pfades  
 $\Delta$ : Netzwerkdet/Graphdet

**Hinweis:** UTF von  $x_i$  nach  $x_j$ , wobei  $x_i$  eine **Quelle**,  $x_j$  jedoch nicht zwingend eine **Senke** sein muss.

$\Delta_k = 1 -$  (Summe aller Schleifen die  $P_k$  nicht berühren) + (Summe aller Produkte zweier Schleifen, die  $P_k$  und sich selbst nicht berühren) - (Summe aller Produkte dreier Schleifen, die  $P_k$  und sich selbst nicht berühren) + ...

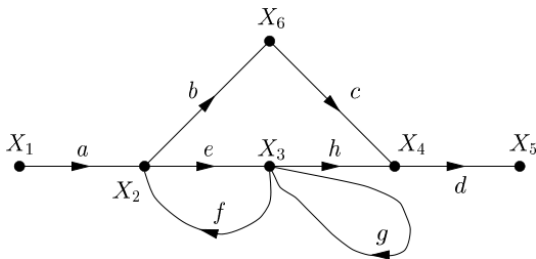
$\Delta = 1 -$  (Summe aller Schleifen) + (Summe aller Produkte zweier Schleifen, die sich nicht berühren) - (Summe aller Produkte dreier Schleifen, die sich nicht berühren) + ...

Falls die **UTF eines SFD von einem beliebigen Knoten** (keiner Quelle) gesucht wird, kann Mason's Regel nicht direkt angewandt werden. Abhilfe:

$$H_{ij} = \frac{x_j}{x_i} = \frac{x_j x_q}{x_q x_i} = \frac{H_{qj}}{H_{qi}}$$

Wobei  $x_q$  eine Quelle sei. Schlussendlich kürzt sich die Netzwerkdeterminante heraus.

## 2.5 Beispiel eines SFD Skript S.73



a) Die UTF zwischen  $X_1$  und  $X_4$  ist (mit Mason's Regel):

$$H_{14} = \frac{X_4}{X_1} = \frac{aeh+abc(1-g)}{1-ef-g}$$

b) Das folgende Gleichungssystem beschreibt das SFD.

$$\begin{aligned} X_2 &= a \cdot X_1 + f \cdot X_3 \\ X_3 &= e \cdot X_2 + g \cdot X_3 \\ X_4 &= h \cdot X_3 + c \cdot X_6 \\ X_5 &= d \cdot X_4 \\ X_6 &= b \cdot X_2 \end{aligned}$$

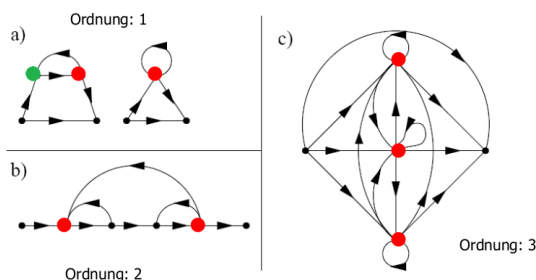
1. Nach Umformung der Gleichungen erhalten wir:

$$X_4 = h \cdot X_3 + \frac{bc}{e} \cdot (1-g) \cdot X_3 \quad \& \quad X_3 \cdot \frac{1-g}{e} = a \cdot X_1 + f \cdot X_3.$$

2. Somit ist

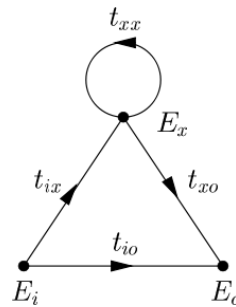
$$X_4 = \frac{h + \frac{bc}{e}(1-g)}{\frac{1-g}{e} - f} X_1 = \frac{aeh+abc(1-g)}{1-g-ef} X_1.$$

## 2.6 Fundamentales SFD Skript S.74



**Ordnung eines SFD = Anzahl der fundamentalen Knoten:** Knoten, welche entfernt werden müssen, um *alle* Schleifen aufzubrechen.

### 2.6.1 Fundamentales SFD erster Ordnung Skript S.75



Durch Reduzieren auf das fundamentale SFD 1. Ordnung, kann die UTF direkt ermittelt werden:

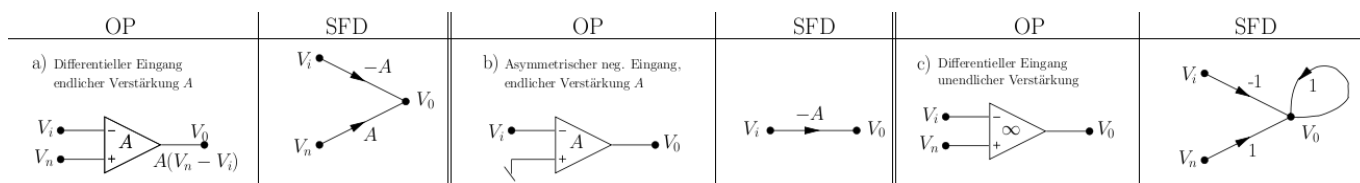
$$H_{io} = \frac{E_o}{E_i} = t_{io} + \frac{t_{ix}t_{xo}}{1-t_{xx}} = \frac{t_{io} - t_{io}t_{xx} + t_{ix}t_{xo}}{1-t_{xx}}$$

- $E_x$  = Fundamentaler Knoten
- $E_i$  = Quelle (Eingang)
- $E_o$  = Senke (Ausgang)
- $t_{xx}$  = alle Eigenschleifen des Knoten  $E_x$
- $t_{ix}$  = alle Pfade von der Quelle zum Knoten  $E_x$
- $t_{xo}$  = alle Pfade vom Knoten  $E_x$  zur Senke
- $t_{io}$  = Leckpfad, alle Pfade von der Quelle zur Senke, welche nicht durch den Knoten  $E_x$  führen.

Wenn es mehrere Wege gibt, dann zusammen zählen:

Bsp.:  $t_{ix} = t_{ix_1} + t_{ix_2}$

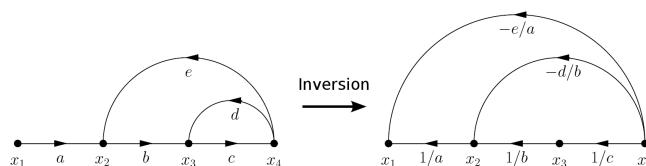
## 2.7 Einbezug analoger Verstärker **Skript S.80**



## 2.8 Inversion **Skript S.84**

Durch schrittweise Pfadinversion erhält man das "invertierte" Signalflussdiagramm. Es hat folgende Eigenschaften:

- Richtungsumdrehung aller Zweigtransmittanzen bei gleichbleibenden Transmittanzen
- Spiegelung des resultierenden SFD
- Bezeichnungswechsel von Eingangs- und Ausgangsknoten

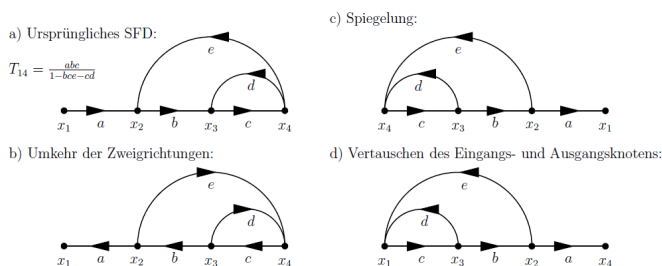


## 2.9 Transposition **Skript S.84**

**Ablauf:**

1. Richtungsumdrehung aller Zweigtransmittanzen bei gleichbleibenden Transmittanzen
2. Spiegelung des resultierenden SFD
3. Bezeichnungswechsel von Eingangs- und Ausgangsknoten

Die UTF des transponierten SFD ist **identisch** mit der UTF des ursprünglichen SFD, aber ihre Topologie ist verschieden.



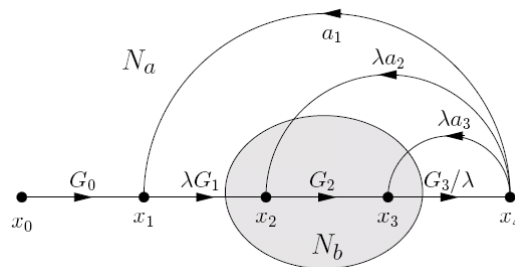
## 2.10 Skalierung **Skript S.85**

Um einen oder mehrere Knoten zu ändern, ohne das gesamte System zu ändern (Voraussetzung: Start/Endknoten werden nicht mitmaskiert), kann man diese Knoten skalieren.

Vorgehen:

1. Skalierungszone festlegen (Trennbündel)  $N_b$
2. Alle eingehende Zweige mit  $\lambda$  multiplizieren
3. Alle ausgehende Zweige mit  $\frac{1}{\lambda}$  multiplizieren

Wenn alle maximalen Signalniveaus gleich  $\rightarrow$  maximal möglichen Dynamikbereich



Die Skalierung kann verwendet werden um den Dynamikbereich zu maximieren, Inverter zu entfernen und die Verstärkung und Signalniveaus innerhalb eines Systems zu ändern.

### 3 Frequenzanalyse **Skript S.132**

#### 3.1 Wichtige Theoreme

Bessel's Theorem <b>Skript S.124</b>	$\int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  F(j\omega) ^2 d\omega$
Parseval's Theorem <b>Skript S.124</b>	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot G^*(j\omega) d\omega$
Gibbschesphänomen <b>Skript S.112</b>	Überschwinger beträgt ca. 18% der Amplitude oder ca. 9% der Sprunghöhe. $S_{\infty} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$ (approximiert)
Autokorrelation <b>Skript S.132</b>	$\varphi_{xx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{-k} e^{-j\frac{2\pi k}{T_0} \tau} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}  c_k ^2 e^{-j\frac{2\pi k}{T_0} \tau} =  c_0 ^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}  c_k ^2 \cdot \cos(\frac{2\pi k}{T_0} \tau)$
Leistung <b>Skript S.119</b>	$X^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}  c_k ^2 =  c_0 ^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}  c_k ^2 = (\frac{a_0}{2})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} = (\frac{a_0}{2})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2}$
Bandbreitentheorem <b>Skript S.122</b>	$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \gamma$ mit $\gamma \geq \frac{1}{2}$

#### 3.2 Leistungsdichtespektrum **Skript S.132**

$\phi(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(j\omega)|^2}{T}$   $\phi(j\omega)$ : Leistungsdichtespektrum

$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(j\omega) d\omega$   $P_n$ : normierte Leistung

$E(j\omega) = |F(j\omega)|^2$   $E(j\omega)$ : Energiedichtespektrum

#### 3.3 Wiener-Chintchine Theorem **Skript S.133**

Leistungssignal 2a:

$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \circ \bullet \phi(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(t) e^{-j\omega t} dt$

Energiesignal:

$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \circ \bullet E(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(t) e^{-j\omega t} dt$

Leistungssignal 2b:

$\varphi_{xy}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \circ \bullet \phi_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(t) e^{-j\omega t} dt$

#### 3.4 Eigenschaften von $\phi(j\omega)$

1.  $\phi(j\omega)$  ist reell
2.  $\phi(j\omega) \geq 0$
3.  $\phi(j\omega) = \phi(-j\omega)$
4.  $P = X^2 = \varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(j\omega) d\omega$
5.  $\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) d\tau$

### 4 Systeme **Skript S.161**

#### 4.1 Begriffe

Bezeichnung	Beschreibung	Bedingung, Erkennung
Wirkungsfreiheit <b>Skript S.161</b>	Eingang des Systems hochohmig, Ausgang niederohmig	Kaskadierte Systeme durch Einheitsverstärker verbunden
Statische bzw. dynamische Systeme <b>Skript S.162</b>	Statisch: ohne Gedächtnis Dynamisch: mit Gedächtnis	Statisch: $u_2(t)$ nur vom Eingangssignal $u_1(t)$ bei $t$ abhängig Dynamisch: $\int dt; \frac{d}{dt}; f(t \pm t_0)$
Kausale bzw. akusale Systeme <b>Skript S.164</b>	Kausal: Keine zukünftigen Werte Akausal: System "sieht in die Zukunft" <b>Statische und reale (physikalische) Systeme sind immer kausal!</b>	Kausal: $f(t - t_0); \int^t f(\tau) d\tau$ ( $t_0 > 0$ ) Impulsantwort: $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$ Akausal: $f(-t); f(t + t_0); \int^{t+t_0} f(\tau) d\tau$
Lineare bzw. nichtlineare Systeme <b>Skript S.165</b>	Linear: Ausgangssignal hat keine neuen Frequenzanteile Nichtlinear: Ausgangssignal kann <b>neue Frequenzanteile</b> enthalten	<b>Linear:</b> $S(x1 + x2) = S(x1) + S(x2)$ $S(c \cdot x) = c \cdot S(x)$ , Superposition <b>Nichtlinear:</b> $f^\alpha(t); \alpha + f(t); \alpha^{x(t)}$ $\implies$ <b>Kennlinie nicht durch Ursprung</b>
Zeitinvariante bzw. zeitvariante Systeme <b>Skript S.170</b>	Zeitvariant: Von der Zeit abhängig Zeitinvariant: Von der Zeit unabhängig	Zeitvariant: $\cos(t)x(t); t^\alpha x(t)$ ( $\alpha \neq 0$ ) Zeitinvariant: $S(x(t - t_0)) = S(x) \cdot x(t - t_0)$

4.1.1 Beispiele **Skript S.118**

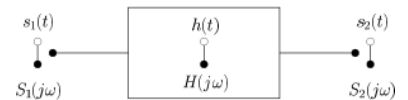
Systemtyp			Mathem. Form	Beispiel (kausal)	Beispiel (akausal)
statisch	linear	zeitinvariant	$y(t) = \gamma \cdot x(t)$	$y(t) = 3 \cdot x(t)$	
statisch	linear	zeitvariant	$y(t) = \gamma(t) \cdot x(t)$	$y(t) = t^2 \cdot x(t)$	
statisch	nichtlinear	zeitinvariant	$y(t) = f\{x(t)\}$	$y(t) = 4 \cdot x^2(t)$	
statisch	nichtlinear	zeitvariant	$y(t) = f\{x(t), t\}$	$y(t) = t \cdot x^3(t)$	
dynamisch	linear	zeitinvariant		$y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{2dx(t)}{dt}$	$y(t) = \frac{d^2x(t+1)}{dt^2} - \frac{2dx(t)}{dt}$
dynamisch	linear	zeitvariant		$y(t) = \cos(t) \cdot \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$y(t) = \cos(t) \cdot \int_{-\infty}^{t+1} x(\tau) d\tau$
dynamisch	nichtlinear	zeitinvariant		$y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{2dx(t)}{dt} + 1$	$y(t) = \frac{d^2x(t+1)}{dt^2} - \frac{2dx(t)}{dt} + 1$
dynamisch	nichtlinear	zeitvariant		$\ddot{y}(t) = \cos(t) \cdot x(t-1) - 0.5$	$\ddot{y}(t) = \cos(t) \cdot x(t+1) - 0.5$

4.1.2 Linearisierung von Systemen: Siehe **Skript S.169**

4.2 Übertragungsfunktion von LTI-Systemen **Skript S.174**

$$h(t) \circ \bullet H(s)$$

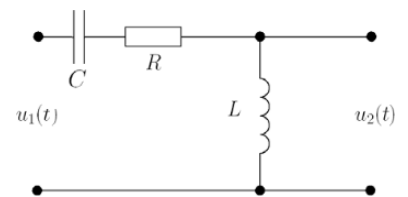
$$s_2(t) = h(t) * s_1(t) \circ \bullet S_2(s) = H(s)S_1(s)$$



Kaskadierung von wirkungsfreien Systemen:  $H_{total}(s) = H_1(s)H_2(s)$  bzw. bei  $n$  gleichen Systemen:  $H_{total} = (H(s))^n$

**Beispiel:** Gesucht UTF  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

$$H(s) = \frac{sL}{\frac{1}{sC} + sL + R} = \frac{s^2}{\frac{1}{LC} + s\frac{R}{L} + s^2}$$



$$\Rightarrow \text{Pole bei } s = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad ; \quad \text{Doppelte Nullstelle bei } s = 0$$

Differentialgleichung:  $\ddot{y}(t) + \frac{R}{L}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y = \ddot{x}(t)$

4.2.1 Bestimmung der UTF

Bauteil	Ersatz	
R	R	Parallelschaltung = $\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC}$
L	sL	
C	$\frac{1}{sC}$	

Das Potential in einem Punkt berechnet man mit  $= \frac{\text{Summe aller Elemente zwischen Punkt und GND}}{\text{Summe aller Elemente der Kompletten Schaltung}}$   
Die **Ordnung der UTF** ist die Anzahl unabhängiger Speicher (L oder C).

4.2.2 Asymptotische Steilheit

Die asymptotische Steilheit lässt sich aus der UTF bestimmen. Folgende Schritte sind vonnöten:

- Den Amplitudengang von der UTF bestimmen.
- Den Summand mit der höchsten Ordnung von  $\omega$  extrahieren/isolieren.
- Die Funktion ohne Faktor ist die Steilheit.

**Beispiel:**

$$H(s) = \frac{sL}{s^3L^2C + s^2RLC} \rightarrow |H(\omega)|_{\omega \gg 1} = \frac{sL}{s^3L^2C} = \frac{1}{LC} \cdot \frac{1}{\omega^2}$$

4.2.2.1 Steilheit in dB/Dekade

$$H(\omega = 10) = 20 \cdot \lg(f(\omega))$$

Die Funktion wird mit der dB-Formel berechnet und als Argument wird die Zahl 10 eingefügt.

**Beispiel:**

$$H(s) = \frac{sL}{s^3L^2C + s^2RLC} \rightarrow |H(\omega)|_{\omega \gg 1} = \frac{sL}{s^3L^2C} = \frac{1}{LC} \cdot \frac{1}{\omega^2}$$

$$|H(\omega = 10)|_{dB} = 20 \cdot \lg\left(\frac{1}{\omega^2}\right) = -40dB/Dekade$$



### 4.2.3 Beispiele von Übertragungsfunktionen (verschiedene Filter)

	Tiefpassfilter 1. Ordnung	Hochpassfilter 1. Ordnung	Bandpassfilter 2. Ordnung	Allpassfilter 1. Ordnung
Übertragungsfunktion $H(s)$	$\frac{1}{1 + sRC}$	$\frac{sRC}{1 + sRC}$	$\frac{sRC}{1 + sRC + s^2LC}$	$\frac{sRC - 1}{sRC + 1}$
Amplitudengang $ H(\omega) $	$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$	$\frac{ \omega RC }{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$	$\frac{ \omega RC }{\sqrt{(\omega^2 LC - 1)^2 + (\omega RC)^2}}$	1
Phasengang $\varphi(\omega)$	$-\arctan(\omega RC)$	$\arctan(\frac{1}{\omega RC})$	$-\arctan(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC})$	$\pi - 2\arctan(\omega RC)$
Grenzfrequenz $f_c$	$\frac{1}{2\pi RC}$	$\frac{1}{2\pi RC}$		
Spannung am Ausgang	Spannung am Eingang $\cdot  H(\omega) $			

### 4.2.4 Berechnung des Amplituden- und Phasengangs aus der Übertragungsfunktion

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \underbrace{|H(j\omega)|}_{\text{Amplitudengang}} \cdot e^{j \underbrace{\Theta(\omega)}_{\text{Phasengang}}} = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} e^{j(\arg(Y(j\omega)) - \arg(X(j\omega)))} = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} e^{j[\arctan(\frac{\text{Im}\{Y(j\omega)\}}{\text{Re}\{Y(j\omega)\}}) - \arctan(\frac{\text{Im}\{X(j\omega)\}}{\text{Re}\{X(j\omega)\}})]}$$

**Phasengang:**  $\Theta(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(H(j\omega))}{\text{Re}(H(j\omega))}\right)$

**Amplitudengang:**  $|H(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|}$

### 4.2.5 Zusammenhang zwischen Impuls- & Einheitssprungantwort, Endwerte **Skript S.175**

Einheitssprungantwort  $g(t)$ , Impulsantwort  $h(t)$

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad \text{bzw.} \quad g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)$$

### 4.2.6 Zusammenhang zwischen Impulsantwort und Kausalität eines Systems **Skript S.176**

Damit ein System kausal ist, muss dessen Impulsantwort  $h(t)$  für alle  $t < 0$  gleich Null sein.

$h(t) = 0 \quad \forall t < 0 \implies$  System kausal!

## 4.3 Stabilität von LTI-Systemen **Skript S.177**

### 4.3.1 BIBO-Stabilität **Skript S.177**

*BIBO = Bounded Input Bounded Output*

Ein beliebiges System ist **BIBO-stabil**, wenn auf jedes **beschränkte Eingangssignal** das **Ausgangssignal** ebenfalls **beschränkt** ist.  $|u_{in}(t)| < A \rightarrow |u_{out}(t)| < B$  mit  $0 < A, B \in \mathbb{N} < \infty$

### 4.3.2 Asymptotische Stabilität **Skript S.178**

Stabil:  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$  Pole **nur** in der linken s-Halbebene. **Achtung: Nur Pole, nicht Nullstellen!!**

Instabil: Mind. ein Pol in der rechten s-Halbebene oder mind. ein **mehrfacher** Pol auf der  $j$ -Achse der s-Ebene.

Grenzstabil: mindestens ein **einfacher Pol** (aber kein mehrfacher) auf der  $j$ -Achse, keine Pole rechts der  $j$ -Achse



### 4.3.3 Stabilität mit Hurwitz-Polynom **Skript S.179**

Es wird jeweils das Polynom im **Nenner der Übertragungsfunktion** betrachtet:  $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$   
 Ist ein solches Polynom ein Hurwitz-Polynom, so ist das System **asymptotisch stabil**. Handelt es sich um ein **modifiziertes Hurwitz-Polynom** so ergibt es ein **grenzstabiles** System.

$P(s)$  ist nur dann ein Hurwitz-Polynom, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. alle Koeffizienten  $a_i$  von  $P(s)$  sind grösser als Null (und sind vorhanden).  
 (bis zum und mit Polynomen von Grad 2, ist es notwendig, dass alle Koeffizienten positiv sind, damit das Polynom asymptotisch stabil ist)
2. alle Hurwitz-Determinanten  $D_1$  bis  $D_n$  sind grösser als Null

$$\begin{aligned}
 D_1 &= a_{n-1} > 0 \\
 D_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0 \\
 &\vdots \\
 D_{n-1} &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & a_1 \end{vmatrix} > 0 \\
 D_n &= a_0 D_{n-1} > 0
 \end{aligned}$$

#### Modifiziertes Hurwitz-Polynom

Nebst allen  $a_i \geq 0$  müssen alle Hurwitz-Determinanten  $D_1, D_2, \dots, D_{n-2} > 0$  und  $D_{n-1} = D_n = 0$  sein.

Für Polynome  $P(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s^1 + a_0$  vom Grad n gilt für  $a_i > 0$ :

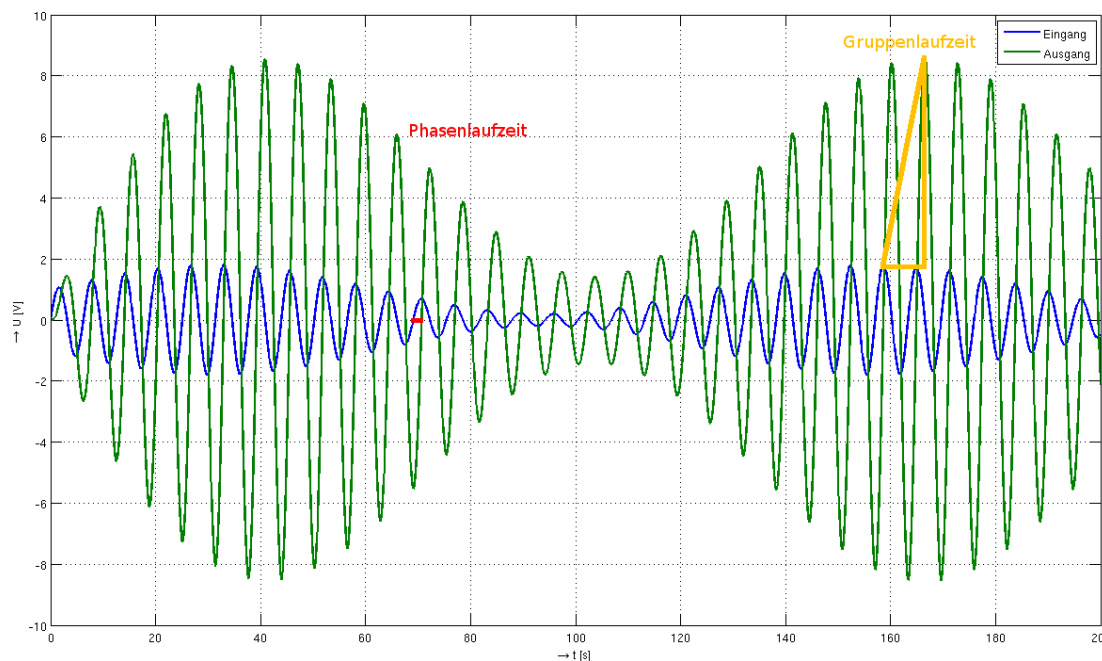
N	$P(s)$ ist ein Hurwitz-Polynom (stabil)	$P(s)$ ist ein modifiziertes Hurwitz-Polynom (grenzstabil)
1	gilt für alle $P(s)$	$a_0 = 0$
2	gilt für alle $P(s)$	$a_1 = 0$
3	$a_1 a_2 > a_0 a_3$	$a_1 a_2 = a_0 a_3$
4	$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) > a_1^2 a_4$	$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) = a_1^2 a_4$
5	$a_3 a_4 > a_2 a_5$ und $(a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) > (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2$	$a_3 a_4 > a_2 a_5$ $(a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) = (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2$

- Wenn **mindestens ein Koeffizient negativ** ist ( $a_x < 0$ ), dann ist das System **instabil**.
- Wenn **alle Koeffizienten negativ** sind, kann  $-1$  ausgeklammert werden und in den Zähler verschoben werden  
 $\Rightarrow$  **System stabil oder grenzstabil**
- Wenn **ein Koeffizient nicht vorhanden** ist ( $a_x = 0$ ), dann ist das System evtl. grenzstabil, d.h. es ist eine **Überprüfung mit modifiziertem Hurwitz-Polynom** nötig.

### 4.4 Phasen- & Gruppenlaufzeit **Skript S.182**

Die **Phasenlaufzeit** ist nur für reine Sinussignale bestimmbar:  $\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$

Die **Gruppenlaufzeit** hingegen ist für sämtliche Signale möglich:  $\tau_G(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}$



Eingangssignal  $x(t)$  und Ausgangssignal  $y(t)$  des Systems  $H(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$ . Bemerkung:  $y(t)$  ist grösser als  $x(t)$ .

#### 4.4.1 Signalverzögerung, Phasen- und Gruppenlaufzeit **Skript S.186**

Die **Signalverzögerung**, **Phasenlaufzeit**  $\tau_P(\omega)$  und **Gruppenlaufzeit**  $\tau_G(\omega)$  sind identisch, wenn:

- $\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0$
- und der Amplitudengang ebenfalls konstant ist

Das heisst,  $H(j\omega)$  hat die Form  $H(j\omega) = a \cdot e^{-j\omega t_0}$ .

Die Signalverzögerung beträgt dann für alle Frequenzen  $t_0 = \tau_G = \tau_P$ .

### 4.5 Verzerrungen und Klirrfaktor **Skript S.187**

#### 4.5.1 Verzerrungen **Skript S.187**

##### Lineare Verzerrungen:

- Erzeugen keine neuen Frequenzen
- z.B. Dämpfung (auch einzelner Frequenzen)

##### Nichtlineare Verzerrungen:

- Erzeugen neue Frequenzen
- z.B. Diode, Übersteuern, nichtlineare Kennlinien

#### 4.5.2 Masse für Verzerrung **Skript S.189**

Jedes verzerrte Signal kann durch ein Gütemass beschrieben werden.

Diese sind:

- **Klirrfaktor:** Dieser stellt das Verhältnis des Effektivwertes der entstandenen Harmonischen und des Effektivwertes des gesamten Ausgangssignals. Dieses Mass wird insbesondere in Europa verwendet.
- **Total Harmonic Distortion (THD):** Dieser stellt das Verhältnis des Effektivwertes der entstandenen Harmonischen und des Effektivwertes der Grundschwingung. Dieses Mass wird insbesondere in USA verwendet.

Effektivwert des gesamten Ausgangssignal:

$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}$$

Effektivwert der entstandenen Harmonischen:

$$\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}$$

Effektivwert der Grundschwingung:

$$U_1^2$$

Effektivwert m-ten Harmonischen:

$$U_m^2$$

**4.5.2.1 Klirrfaktor Skript S.189**

Als Mass für nichtlineare Verzerrungen gilt der *Klirrfaktor*. Betrachtet wird jeweils der Effektivwert am Ausgang.

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}} \quad 0 \leq k \leq 1$$

Teilkirrfaktor (frequenzselektiv):

$$k_m = \frac{U_m}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}}$$

Klirrdämpfungsmass:

$$a_k = 20 \log\left(\frac{1}{k}\right)$$

Teilkirrdämpfungsmass:

$$a_k = 20 \log\left(\frac{1}{k_m}\right)$$

**4.5.2.2 Total Harmonic Distortion (THD) Skript S.189**

$$\text{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}} \quad \infty > \text{THD} \geq k \geq 0; \quad \text{Für kleine Verzerrungen: THD} \approx k$$

**4.6 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen Skript S.190**

Für eine Übertragung ohne Amplitudenverzerrung (konstante Amplitude über alle Frequenzen) muss gelten:

$$|H(j\omega)| = \text{konstant}$$

Für eine Übertragung ohne Phasenverzerrung (Phase proportional zur Frequenz) muss gelten:

$$\theta(\omega) = -\omega t_0$$

Für eine **verzerrungsfreie Signalübertragung** müssen **beide Kriterien** erfüllt sein! Dann gilt:

- $y(t) = a \cdot x(t - t_0) \iff Y(j\omega) = a \cdot X(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
- $H(j\omega) = a \cdot e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \iff h(t) = a \cdot \delta(t - t_0)$

**4.7 Übertragung von stochastischen Signalen Skript S.193**

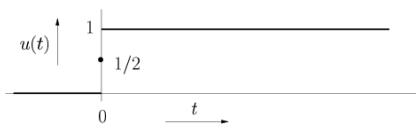
- Linearer Mittelwert und Autokorrelationsfunktion des Ausgangssignales **Skript S.193**
- Leistungsdichtespektrum **Skript S.193**
- Kreuzkorrelationen **Skript S.194**
- **Beispiel:** Leistungsdichtespektrum am Ausgang eines RC-Tiefpasses **Skript S.195**

**5 Einheitssignale**

**5.1 Funktionen**

**Sprungfunktion Skript S.17**

Einschaltfunktion, Einheitssprung, Heaviside-Funktion (Matlab: `heaviside`)

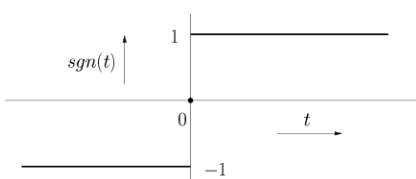


$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{L} : u(t) \iff \frac{1}{s}$$

**Signumfunktion Skript S.17**

Vorzeichenfunktion (Matlab: `sign`)

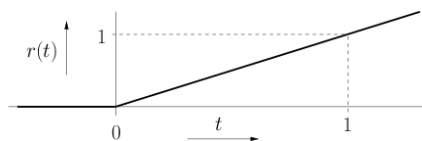


$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0, \\ 0 & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{F} : \text{sgn}(t) \iff \frac{-2j}{\omega}$$

**Rampenfunktion Skript S.18**

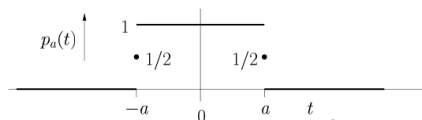
(Matlab: ramp)



$$r(t) = tu(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ t & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} : r(t) \circ \bullet \frac{1}{s^2}$$

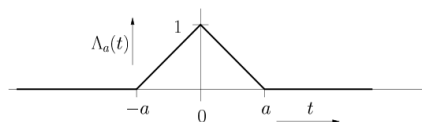
**Rechteckimpuls Skript S.19**



$$p_a(t) = u(t+a) - u(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < a \\ \frac{1}{2} & \text{für } |t| = a \\ 0 & \text{für } |t| > a \end{cases}$$

$$\mathcal{F} : p_a(t) \circ \bullet 2a \operatorname{sinc}(a\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(a\omega)$$

**Dreieckimpuls Skript S.20**

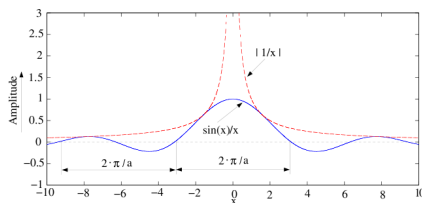


$$\Lambda_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{für } |t| < a \\ 0 & \text{für } |t| \geq a \end{cases}$$

$$\mathcal{F} : \Lambda_a(t) \circ \bullet a \left( \frac{\sin(\frac{a\omega}{2})}{\frac{a\omega}{2}} \right)^2 = a \operatorname{sinc}^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)$$

**Sincfunktion Skript S.20**

(Matlab: sinc)



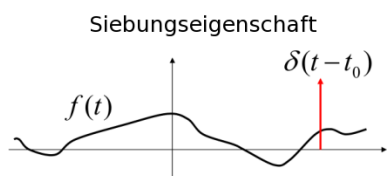
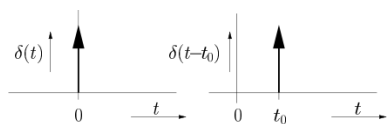
$$\operatorname{sinc}_\alpha(t) = \frac{\sin(\alpha t)}{t} \quad \operatorname{sinc}(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha t}$$

$$\mathcal{F} : \operatorname{sinc}_\alpha(t) \circ \bullet \frac{\sin(\alpha t)}{t} \circ \bullet \pi p_\alpha(\omega)$$

$$\mathcal{F} : \operatorname{sinc}(\alpha t) \circ \bullet \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha t} \circ \bullet \frac{\pi}{\alpha} p_\alpha(\omega)$$

**Impulsfunktion Skript S.21**

Diracimpuls, Diracstoss, Deltaimpuls (Matlab: dirac)



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1.	$\delta(at) = \frac{1}{ a } \delta(t)$	Skalierung
2.	$\delta(\frac{t-t_0}{a}) =  a  \cdot \delta(t-t_0)$	Skalierung und Verschiebung
3.	$\delta(-t+t_0) = \delta(t-t_0)$	symmetrisch
4.	$\delta(-t) = \delta(t)$	$\delta(t) =$ gerade Funktion
5.	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$	<b>Siebungseigenschaft</b>
6.	$\delta(t-t_0) f(t) = f(t_0) \delta(t-t_0)$	Abtastung
7.	$\int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t) dt = A$	<b>Spezialfall der Siebungseigenschaft</b>
8.	$\delta(t-t_0) * f(t) = f(t-t_0)$	Faltung
9.	$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$	Faltung
10.	$\delta(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial t}$	Ableitung des Einheitssprungs
11.	$\delta(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega t)}{\pi t}$	Definition
12.	$\mathcal{L}, \mathcal{F} : \delta(t) \circ \bullet 1$	Frequenzbereich

### 5.1.1 Signalmanipulationen

	Spiegeln	Um Faktor $a$		Verschieben um $c$	
		strecken	stauchen	nach Rechts/oben	nach links/unten
x-Achse (Abszisse)	$-f(x)$	$f(\frac{1}{a} \cdot x)$	$f(a \cdot x)$	$f(x - c)$	$f(x + c)$
y-Achse (Ordinate)	$f(-x)$	$a \cdot f(x)$	$\frac{1}{a} \cdot f(x)$	$f(x) + c$	$f(x) - c$

## 6 Tabelle der wichtigsten Ableitungen und Integrale

### 6.1 Ableitungen elementarer Funktionen S436

Funktion	Ableitung	Funktion	Ableitung
$C$ (Konstante)	0	$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$
$x$	1	$\sec^{-1} x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
$x^n$ ( $n \in \mathbb{R}$ )	$nx^{n-1}$	$\arcsin x$ ( $ x  < 1$ )	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\arccos x$ ( $ x  < 1$ )	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$ ( $n \in \mathbb{R}, n \neq 0, x > 0$ )	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$e^x$	$e^x$	$\operatorname{arcossec} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$e^{bx}$ ( $b \in \mathbb{R}$ )	$be^{bx}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$a^x$ ( $a > 0$ )	$a^x \ln a$	$\cosh x$	$\sinh x$
$a^{bx}$ ( $b \in \mathbb{R}, a > 0$ )	$ba^{bx} \ln a$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{coth} x$ ( $x \neq 0$ )	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$
$\log_a x$ ( $a > 0, a \neq 1, x > 0$ )	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{Arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\lg x$ ( $x > 0$ )	$\frac{1}{x} \lg e \approx \frac{0.4343}{x}$	$\operatorname{Arcosh} x$ ( $x > 1$ )	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{Artanh} x$ ( $ x  < 1$ )	$\frac{1}{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{Arcoth} x$ ( $ x  > 1$ )	$-\frac{1}{x^2-1}$
$\tan x$ ( $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ )	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$[f(x)]^n$ ( $n \in \mathbb{R}$ )	$n[f(x)]^{n-1} f'(x)$
$\cot x$ ( $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ )	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\ln f(x)$ ( $f(x) > 0$ )	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

6.2 Einige unbestimmte Integrale **S1074**

$\int dx = x + C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, x \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C, x \neq 0$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\int \cosh x dx = \sinh x + C$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C, x \neq 0$
$\int \frac{-dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b  + C, a \neq 0, x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \frac{-dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{b}{a}x + C, a \neq 0, b \neq 0$	$\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left  \frac{ax-b}{ax+b} \right  + C, a \neq 0, b \neq 0, x \neq \frac{b}{a}, x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \sqrt{a^2x^2+b^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2x^2+b^2} + \frac{b^2}{2a} \ln(ax + \sqrt{a^2x^2+b^2}) + C, a \neq 0, b \neq 0$	$\int \sqrt{a^2x^2-b^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2x^2-b^2} - \frac{b^2}{2a} \ln ax + \sqrt{a^2x^2-b^2}  + C, a \neq 0, b \neq 0, a^2x^2 \geq b^2$
$\int \sqrt{b^2-a^2x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{b^2-a^2x^2} + \frac{b^2}{2a} \arcsin \frac{a}{b}x + C, a \neq 0, b \neq 0, a^2x^2 \leq b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a} \ln ax + \sqrt{a^2x^2-b^2}  + C, a \neq 0, b \neq 0, a^2x^2 < b^2$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a} \ln ax + \sqrt{a^2x^2-b^2}  + C, a \neq 0, b \neq 0, a^2x^2 > b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{b}x + C, a \neq 0, b \neq 0, a^2x^2 < b^2$
Die Integrale $\int \frac{dx}{X}, \int \sqrt{X} dx, \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X = ax^2 + 2bx + c, a \neq 0$ werden durch die Umformung $X = a(x + \frac{b}{a})^2 + (c - \frac{b^2}{a})$ und die Substitution $t = x + \frac{b}{a}$ in die oberen 4 Zeilen transformiert.	$\int \frac{xdx}{X} = \frac{1}{2a} \ln X  - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{X}, a \neq 0, X = ax^2 + 2bx + c$
$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax + C, a \neq 0$	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax + C, a \neq 0$
$\int \sin^n ax dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax dx, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$	$\int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax dx, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln \left  \tan \frac{ax}{2} \right  + C, a \neq 0, x \neq k\frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln \left  \tan \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right  + C, a \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax  + C, a \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$	$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln \sin ax  + C, a \neq 0, x \neq k\frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
$\int x^n \sin ax dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax dx, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$	$\int x^n \cos ax dx = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax dx, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$
$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$	$\int e^{ax} \sin b dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C, a \neq 0, b \neq 0$
$\int e^{ax} \cos b dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C, a \neq 0, b \neq 0$	$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C, x \in \mathbb{R}^+$
$\int x^\alpha \cdot \ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} [(\alpha+1) \ln x - 1] + C, x \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	

## Anhang zum Kapitel 2

### 2.A Tabelle von Fourier-Transformationspaaren

Die Fourier-Transformationspaare sind zum Teil von [6, 47, 69] entnommen. Es gilt jeweils:  $0 < (\alpha, \beta, t_0, \omega_0, A) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ .

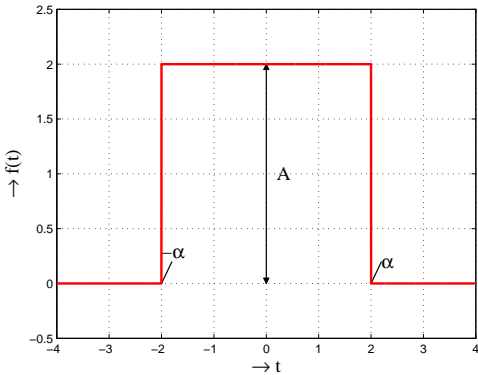
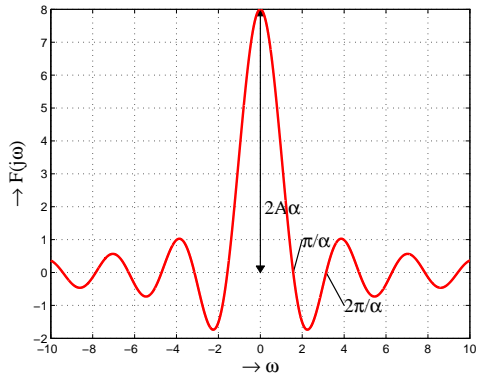
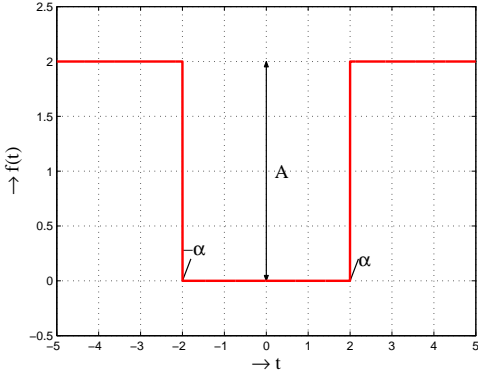
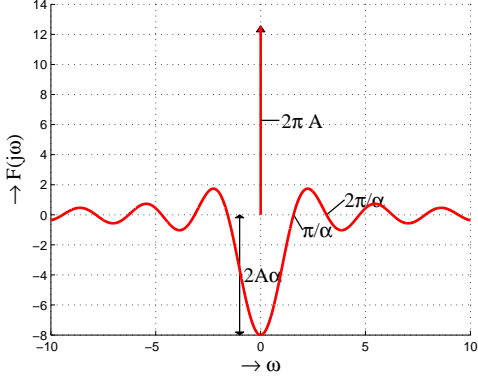
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
1	$A \cdot p_\alpha(t) = \begin{cases} A & \text{für }  t  < \alpha, \\ \frac{A}{2} & \text{für }  t  = \alpha, \\ 0 & \text{für }  t  > \alpha. \end{cases}$ 	$\frac{2A}{\omega} \sin(\alpha\omega) = 2A\alpha \cdot \text{sinc}(\alpha\omega)$ 
3	$A(1 - p_\alpha(t)) = \begin{cases} 0 & \text{für }  t  < \alpha, \\ \frac{A}{2} & \text{für }  t  = \alpha, \\ A & \text{für }  t  > \alpha. \end{cases}$ 	$2 \cdot \pi \cdot A\delta(\omega) - 2A\alpha \cdot \text{sinc}(\alpha\omega)$ 

Tabelle 2.3: Fourier-Transformationspaare

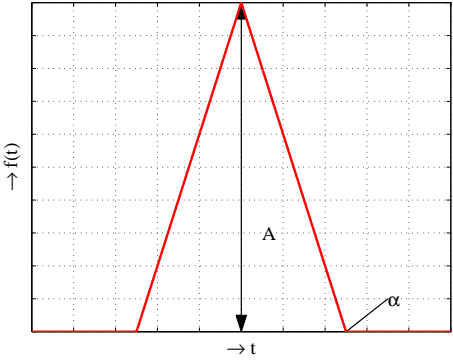
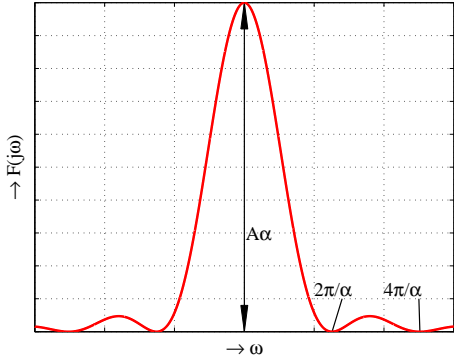
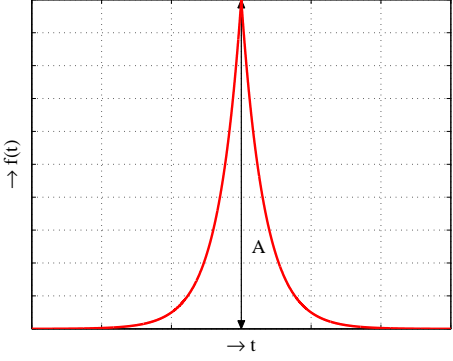
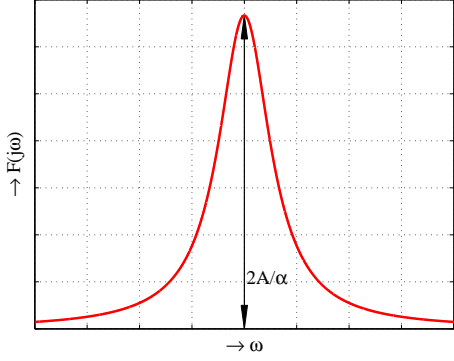
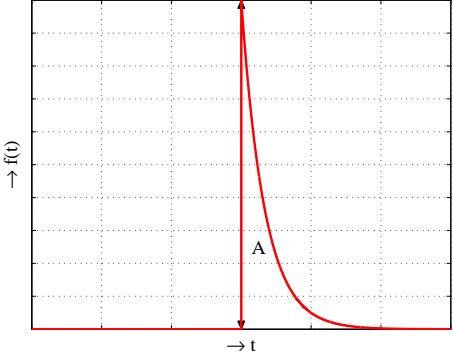
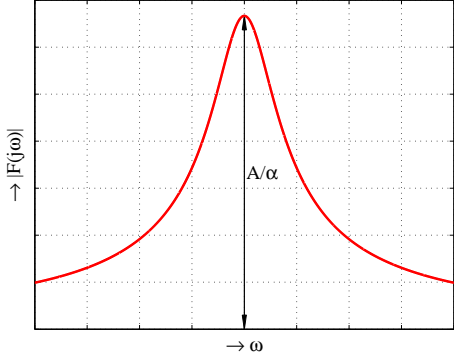
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
4	$A \cdot \Lambda_\alpha(t) = \begin{cases} A - \frac{A t }{\alpha} & \text{für }  t  < \alpha, \\ 0 & \text{für }  t  \geq \alpha. \end{cases}$ 	$A\alpha \cdot \left( \frac{\sin\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)}{\frac{\alpha\omega}{2}} \right)^2 = A\alpha \cdot \left( \text{sinc}\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right) \right)^2$ 
5	$Ae^{-\alpha t }$ 	$\frac{2\alpha A}{\alpha^2 + \omega^2}$ 
6	$Ae^{-\alpha t} u(t)$ 	$A \frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{A}{\alpha + j\omega}$ 

Tabelle 2.4: Fourier-Transformationspaare



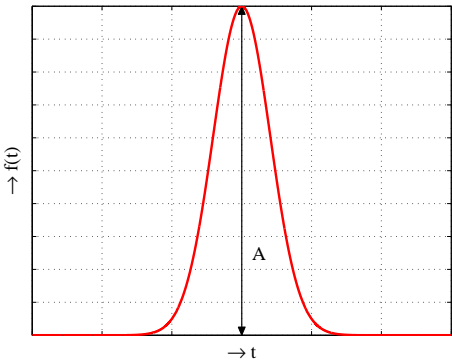
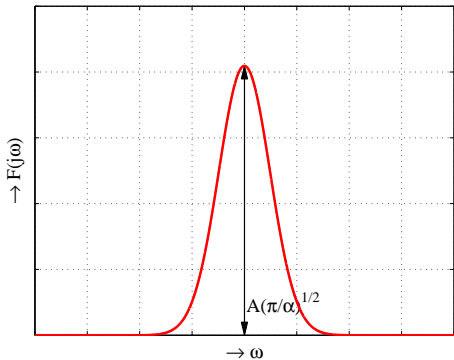
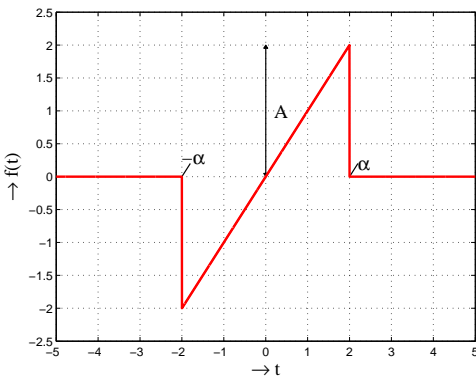
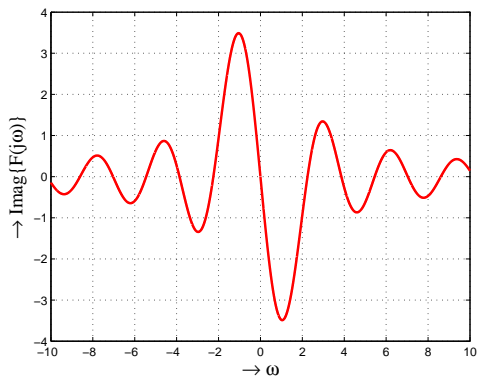
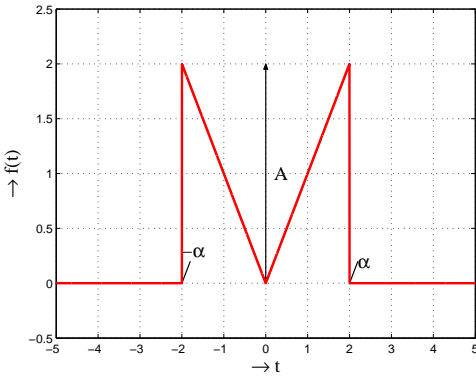
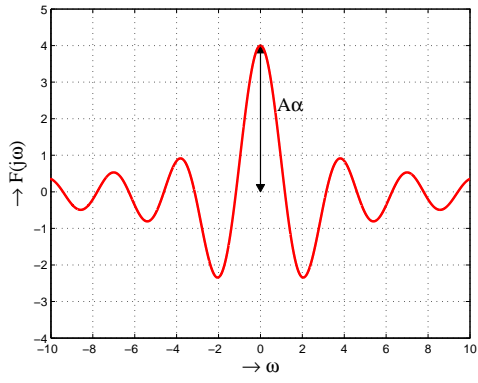
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
7	$Ae^{-\alpha t^2}$ 	$A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ 
8	$e^{-\alpha t^2 + \beta t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2 - j2\alpha\beta\omega - \omega^2}{4\alpha}}$
9	$e^{\pm j\alpha t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\mp j\frac{\omega^2 - \alpha\pi}{4\alpha}}$
10	$\frac{1}{t} \sin(\alpha t) = \text{sinc}_\alpha(t)$	$\pi \cdot p_\alpha(\omega)$
11	$\text{sinc}(\alpha t)$	$\frac{\pi}{\alpha} \cdot p_\alpha(\omega)$
12	$\frac{A \cdot t}{\alpha} \cdot p_\alpha(t)$ 	$j\frac{2A}{\omega} \left( \cos(\omega\alpha) - \frac{\sin(\omega\alpha)}{\omega\alpha} \right)$ 
13	$\frac{A \cdot  t }{\alpha} \cdot p_\alpha(t)$ 	$2A\alpha \left( \frac{\sin(\omega\alpha)}{\omega\alpha} - 2 \left( \frac{\sin(\frac{\omega\alpha}{2})}{\omega\alpha} \right)^2 \right)$ 

Tabelle 2.5: Fourier-Transformationspaare

#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
14	$\left(\frac{1}{t} \sin(\alpha t)\right)^2 = (\text{sinc}_\alpha(t))^2$	$\frac{\pi}{2} \cdot (2\alpha -  \omega ) \cdot p_{2\alpha}(\omega) = \pi\alpha \cdot \Lambda_{2\alpha}(\omega)$
15	$\frac{1}{ t } \sin(\alpha t)$	$-j \cdot \text{sgn}(\omega) \ln \left  \frac{ \omega  + \alpha}{ \omega  - \alpha} \right $
16	<p>A</p>	<p><math>2\pi \cdot A \cdot \delta(\omega)</math></p>
17	<p><math>A \cdot e^{j\omega_0 t}</math></p>	<p><math>2\pi A \cdot \delta(\omega - \omega_0)</math></p>
18	$\delta(t - \beta)$	$e^{-j\beta\omega}$
19	<p><math>A \sin(\alpha t)</math></p>	<p><math>jA\pi[\delta(\omega + \alpha) - \delta(\omega - \alpha)]</math></p>

Tabelle 2.6: Fourier-Transformationspaare

#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
20	$A \sin(\omega_0 t) p_\alpha(t)$	$jA \left( \frac{\sin(\alpha(\omega + \omega_0))}{\omega + \omega_0} - \frac{\sin(\alpha(\omega - \omega_0))}{\omega - \omega_0} \right)$
21	$A (\sin(\alpha t))^2$	$\frac{A\pi}{2} [-\delta(\omega + 2\alpha) + 2\delta(\omega) - \delta(\omega - 2\alpha)]$
22	$A \cos(\alpha t)$	$A\pi [\delta(\omega + \alpha) + \delta(\omega - \alpha)]$
23	$A \cdot \sin(\omega_0 t) e^{-at} u(t)$	$\frac{A\omega_0}{a^2 + \omega_0^2 - \omega^2 + j2a\omega} = \frac{A\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$
24	$A \cdot \cos(\omega_0 t) e^{-at} u(t)$	$\frac{A(a + j\omega)}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$

Tabelle 2.7: Fourier-Transformationspaare

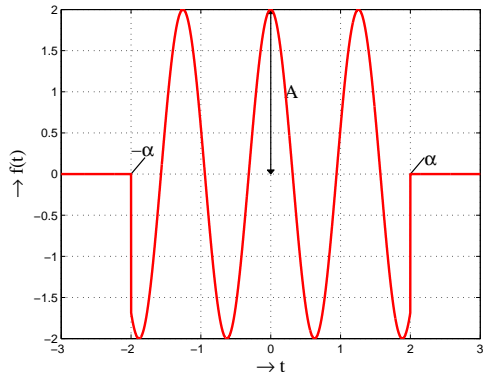
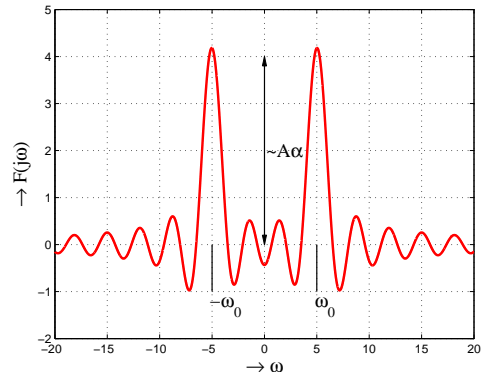
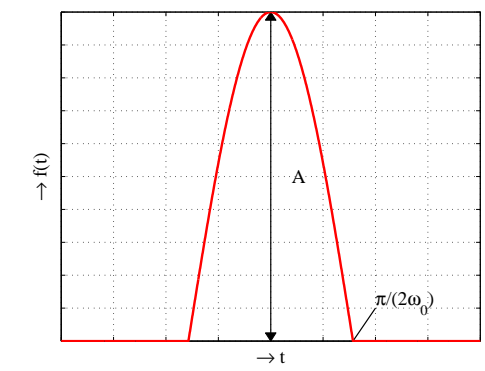
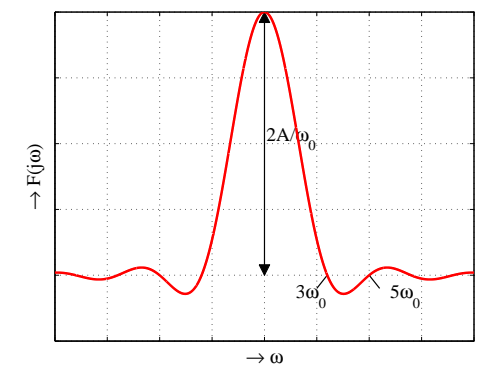
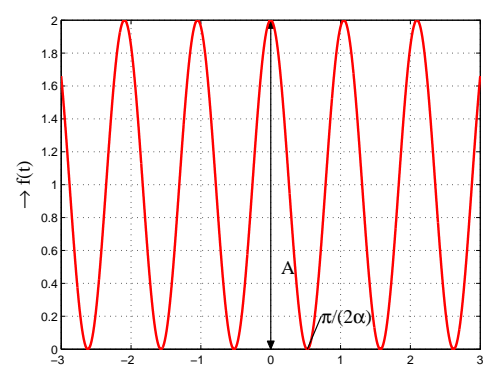
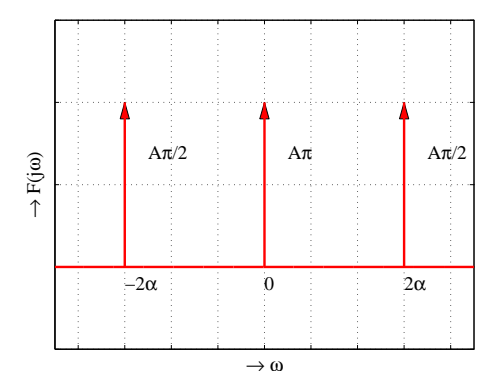
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
25	$A \cos(\omega_0 t) p_\alpha(t)$ 	$A \left( \frac{\sin(\alpha(\omega+\omega_0))}{\omega+\omega_0} + \frac{\sin(\alpha(\omega-\omega_0))}{\omega-\omega_0} \right)$ 
26	$A \cos(\omega_0 t) p_{\frac{\pi}{2\omega_0}}(t)$ 	$A \frac{2\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_0}\right)$ 
27	$A (\cos(\alpha t))^2$ 	$\frac{A\pi}{2} [\delta(\omega + 2\alpha) + 2\delta(\omega) + \delta(\omega - 2\alpha)]$ 
28	$\sin(\alpha t^2)$	$-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\omega^2 - \alpha\pi}{4\alpha}\right)$
29	$\cos(\alpha t^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\left(\frac{\omega^2 - \alpha\pi}{4\alpha}\right)$

Tabelle 2.8: Fourier-Transformationspaare

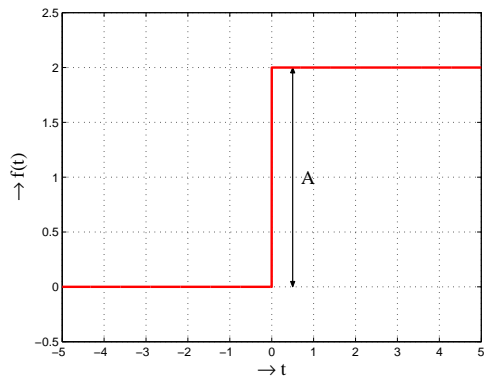
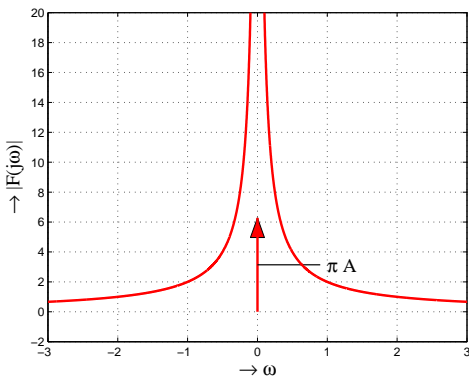
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
30	$A \cdot u(t)$ 	$A \cdot \left( \pi \cdot \delta(\omega) - j \frac{1}{\omega} \right)$ 
31	$\frac{1}{t}$	$j\pi \operatorname{sgn}(\omega)$
32	$t^{-n}$	$-j\pi \frac{(-j\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{sgn}(\omega)$
33	$ t $	$-\frac{2}{\omega^2}$
34	$r(t) = t \cdot u(t)$	$j\pi \frac{d\delta(\omega)}{d\omega} - \frac{1}{\omega^2}$
35	$A \cdot \operatorname{sgn}(t)$	$\frac{-2jA}{\omega}$
36	$t^{-n} \operatorname{sgn}(t)$	$(-j)^{n+1} \frac{2 \cdot n!}{\omega^{n+1}}$
37	$\sqrt{ t }$	$-\sqrt{\frac{2\pi}{ \omega }}$
38	$A \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0)$	$\frac{2\pi A}{t_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{t_0})$
39	$A \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0 - \frac{t_0}{2})$	$\frac{2\pi A}{t_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{t_0})$
40	$A \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n \cdot t_0 - \beta + \frac{(N-1)t_0}{2})$	$A e^{j\beta\omega} \frac{\sin(N\omega t_0/2)}{\sin(\omega t_0/2)}$
41	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0) (A + \alpha \cos(\omega_0 t))$	$\frac{2\pi}{t_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( A\delta(\omega - n \frac{2\pi}{t_0}) + \frac{\alpha}{2} (\delta(\omega - n \frac{2\pi}{t_0} + \omega_0) + \delta(\omega - n \frac{2\pi}{t_0} - \omega_0)) \right)$
42	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0) (A + \alpha \sin(\omega_0 t))$	$\frac{2\pi}{t_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( A\delta(\omega - n \frac{2\pi}{t_0}) + \frac{j\alpha}{2} (\delta(\omega - n \frac{2\pi}{t_0} + \omega_0) - \delta(\omega - n \frac{2\pi}{t_0} - \omega_0)) \right)$
43	$A\delta(t)$	$A$
44	$A\delta(t - t_0)$	$A e^{-jt_0\omega}$
45	$A(\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0))$	$2A \cos(\omega t_0)$
46	$e^{j\beta t} (A + \alpha \cos(\omega_0 t))$	$2\pi (A\delta(\omega - \beta) + \frac{\alpha}{2} (\delta(\omega - \beta + \omega_0) + \delta(\omega - \beta - \omega_0)))$
47	$e^{j\beta t} (A + \alpha \sin(\omega_0 t))$	$2\pi (A\delta(\omega - \beta) + \frac{j\alpha}{2} (\delta(\omega - \beta + \omega_0) - \delta(\omega - \beta - \omega_0)))$
48	$A(1 - e^{-at}) u(t)$	$\pi A\delta(\omega) - A \left( \frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{j a^2}{\omega(a^2 + \omega^2)} \right)$
49	$\operatorname{sgn}(t) \cdot A \cdot e^{-a t }$	$-2jA \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$
50	$A \cdot e^{j\omega_0 t - a t }$	$\frac{2A}{a} \cdot \frac{a^2}{(\omega - \omega_0)^2 + a^2}$
51	$A \cdot \cos(\omega_0 t) e^{-a t }$	$\frac{A}{a} \cdot \frac{2a^2(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2)}{(a^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}$
52	$A \cdot p_\alpha(t - \beta)$	$2A e^{-j\beta\omega} \frac{\sin(\alpha\omega)}{\omega} = \frac{jA}{\omega} (e^{-j\omega(\beta+\alpha)} - e^{-j\omega(\beta-\alpha)})$
53	$A \cdot e^{j\omega_0 t} p_\alpha(t)$	$2A \frac{\sin(\alpha(\omega_0 - \omega))}{\omega_0 - \omega}$
54	$A \cdot (p_\alpha(t - \beta) + p_\alpha(t + \beta))$	$2A \frac{\cos(\beta\omega) \sin(\alpha\omega)}{\omega}$

Tabelle 2.9: Fourier-Transformationspaare

## 2.B Tabelle von Laplace-Transformationspaaren

Die Transformationspaare sind mehrheitlich [6, 7, 21, 47, 69] entnommen. Es gilt:  $0 < \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a, \nu \in \mathbb{C}, s = \sigma + j\omega$  und somit  $\Re\{s\} = \sigma$  und  $\Im\{s\} = \omega$ .

#	$f(t)$ , wobei $f(t) = 0$ für $t < 0$	$F(s)$ mit Konvergenzbereich
1	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df(0)}{dt} - \dots - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}}$
2	$\int_0^t f(x) dx$	$\frac{F(s)}{s}$
3	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_0^\infty F(s) ds$
4	$f(t - \alpha)u(t - \alpha)$	$e^{-s\alpha} F(s)$
5	$f(t + \alpha)u(t + \alpha)$	$e^{+s\alpha} \left( F(s) - \int_0^a e^{-st} f(t) dt \right)$
6	$f_1(t) * f_2(t) * f_3(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s) \cdot F_3(s)$
7	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} (F_1(s) * F_2(s))$
8	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
9	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
10	$u(t)$	$\frac{1}{s}$ mit $\sigma > 0$
11	$\delta(t)$	1 mit $\sigma \in \mathbb{R}$
12	$\frac{d\delta(t)}{dt}$	$s$
13	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
14	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
15	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
16	$\frac{n! 4^n t^{n-\frac{1}{2}}}{(2n)! \sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{s^n \sqrt{s}}$
17	$J_\nu(at)$ mit $\Re\{\nu\} > -1$	$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^\nu}{a^\nu \sqrt{s^2+a^2}}$ mit $\sigma >  \Im\{a\} $
18	$I_\nu(at)$ mit $\Re\{\nu\} > -1$	$\frac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^\nu}{a^\nu \sqrt{s^2-a^2}}$ mit $\sigma >  \Re\{a\} $
19	$\frac{\sin(\alpha t)}{t}$	$\underbrace{\arctan\left(\frac{\alpha}{s}\right)}_{\tan^{-1}}$ mit $\sigma > 0$

Tabelle 2.10: Laplace-Transformationspaare

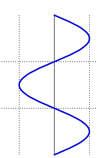
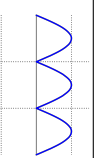
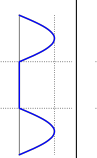
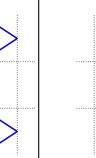
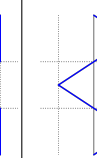
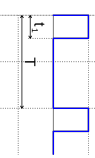
$J_\nu(at)$  ist die **Bessel- oder Zylinderfunktion  $\nu$ . Ordnung 1. Gattung** und  $I_\nu(at)$  ist die **modifizierte Bessel-Funktion  $\nu$ . Ordnung** [7].

Die folgende Tabelle ist nach dem Grad des Nenners geordnet. Die Tabelle ist bis zum Nennergrad 3 vollständig und stammt von [6, 21].

$F(s)$ ,	Konvergenzbereich	$f(t)$ , wobei $f(t) = 0$ für $t < 0$ mit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}$ .
1,	$\sigma \in \mathbb{R}$	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$ ,	$\sigma > 0$	1 ( $\equiv u(t)$ )
$\frac{1}{s+\alpha}$ ,	$\sigma > -\Re\{\alpha\}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{s^2}$ ,	$\sigma > 0$	$t$
$\frac{1}{s(s+\alpha)}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, 0\}$	$\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, \Re\{\beta\}\}$	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, \Re\{\beta\}\}$	$\frac{\alpha e^{-\alpha t}-\beta e^{-\beta t}}{\alpha-\beta}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$ ,	$\sigma > -\Re\{\alpha\}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$ ,	$\sigma > -\Re\{\alpha\}$	$e^{-\alpha t}(1-at)$
$\frac{1}{s^2-\alpha^2}$ ,	$\sigma >  \Re\{\alpha\} $	$\frac{\sinh(\alpha t)}{\alpha}$
$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$ ,	$\sigma >  \Re\{\alpha\} $	$\cosh(\alpha t)$
$\frac{1}{s^2+\alpha^2}$ ,	$\sigma >  \Im\{\alpha\} $	$\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}$
$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$ ,	$\sigma >  \Im\{\alpha\} $	$\cos(\alpha t)$
$\frac{1}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$ ,	$\sigma >  \Im\{\alpha\}  - \Re\{\beta\}$	$\frac{e^{-\beta t} \sin(\alpha t)}{\alpha}$
$\frac{s}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$ ,	$\sigma >  \Im\{\alpha\}  - \Re\{\beta\}$	$\frac{e^{-\beta t}(\alpha \cos(\alpha t) - \beta \sin(\alpha t))}{\alpha}$
$\frac{1}{s^3}$ ,	$\sigma > 0$	$\frac{t^2}{2}$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, 0\}$	$\frac{e^{-\alpha t} + \alpha t - 1}{\alpha^2}$
$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, \Re\{\beta\}, 0\}$	$\frac{(\alpha-\beta) + \beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, 0\}$	$\frac{1-e^{-\alpha t}-\alpha t e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, \Re\{\beta\}, \Re\{\gamma\}\}$	$\frac{(\gamma-\beta)e^{-\alpha t} + (\alpha-\gamma)e^{-\beta t} + (\beta-\alpha)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, \Re\{\beta\}, \Re\{\gamma\}\}$	$\frac{\alpha(\beta-\gamma)e^{-\alpha t} + \beta(\gamma-\alpha)e^{-\beta t} + \gamma(\alpha-\beta)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, \Re\{\beta\}, \Re\{\gamma\}\}$	$\frac{-\alpha^2(\beta-\gamma)e^{-\alpha t} - \beta^2(\gamma-\alpha)e^{-\beta t} - \gamma^2(\alpha-\beta)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)^2}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, \Re\{\beta\}\}$	$\frac{e^{-\alpha t} - [1 + (\beta-\alpha)t]e^{-\beta t}}{(\beta-\alpha)^2}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)^2}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, \Re\{\beta\}\}$	$\frac{-\alpha e^{-\alpha t} + [\alpha + t\beta(\beta-\alpha)]e^{-\beta t}}{(\beta-\alpha)^2}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)(s+\beta)^2}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, \Re\{\beta\}\}$	$\frac{\alpha^2 e^{-\alpha t} + \beta(\beta-2\alpha-t\beta^2 + \alpha\beta t)e^{-\beta t}}{(\beta-\alpha)^2}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^3}$ ,	$\sigma > -\Re\{\alpha\}$	$\frac{t^2 e^{-\alpha t}}{2}$
$\frac{s}{(s+\alpha)^3}$ ,	$\sigma > -\Re\{\alpha\}$	$\frac{(2-\alpha t)te^{-\alpha t}}{2}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)^3}$ ,	$\sigma > -\Re\{\alpha\}$	$\frac{(2-4\alpha t + \alpha^2 t^2)e^{-\alpha t}}{2}$
$\frac{1}{s[(s+\beta)^2+\alpha^2]}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\beta\} -  \Im\{\alpha\} , 0\}$	$\frac{\alpha - e^{-\beta t}[\alpha \cos(\alpha t) + \beta \sin(\alpha t)]}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}$
$\frac{1}{s(s^2+\alpha^2)}$ ,	$\sigma >  \Im\{\alpha\} $	$\frac{1 - \cos(\alpha t)}{\alpha^2}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$ ,	$\sigma > -\min\{- \Im\{\beta\} , \Re\{\alpha\}\}$	$\frac{\beta e^{-\alpha t} + \alpha \sin(\beta t) - \beta \cos(\beta t)}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$ ,	$\sigma > -\min\{- \Im\{\beta\} , \Re\{\alpha\}\}$	$\frac{-\alpha e^{-\alpha t} + \alpha \cos(\beta t) + \beta \sin(\beta t)}{\alpha^2 + \beta^2}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$ ,	$\sigma > -\min\{- \Im\{\beta\} , \Re\{\alpha\}\}$	$\frac{\alpha^2 e^{-\alpha t} - \alpha\beta \sin(\beta t) + \beta^2 \cos(\beta t)}{\alpha^2 + \beta^2}$
$\frac{1}{(s+\alpha)[(s+\beta)^2+\gamma^2]}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, \Re\{\beta\} -  \Im\{\gamma\} \}$	$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \cos(\gamma t) + \frac{\alpha-\beta}{\gamma} e^{-\beta t} \sin(\gamma t)}{(\beta-\alpha)^2 + \gamma^2}$
$\frac{s}{(s+\alpha)[(s+\beta)^2+\gamma^2]}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, \Re\{\beta\} -  \Im\{\gamma\} \}$	$\frac{-\alpha e^{-\alpha t} + \alpha e^{-\beta t} \cos(\gamma t) - \frac{\alpha\beta - \beta^2 - \gamma^2}{\gamma} e^{-\beta t} \sin(\gamma t)}{(\beta-\alpha)^2 + \gamma^2}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)[(s+\beta)^2+\gamma^2]}$ ,	$\sigma > -\min\{\Re\{\alpha\}, \Re\{\beta\} -  \Im\{\gamma\} \}$	$\frac{\alpha^2 e^{-\alpha t} + [(\alpha-\beta)^2 + \gamma^2 - \alpha^2] e^{-\beta t} \cos(\gamma t) - (\alpha\gamma + \beta(\gamma - \frac{\beta(\alpha-\beta)}{\gamma})) e^{-\beta t} \sin(\gamma t)}{(\beta-\alpha)^2 + \gamma^2}$
$\frac{1}{s^4}$ ,	$\sigma > 0$	$\frac{t^3}{6}$

Tabelle 2.11: Laplace-Transformationspaare

### 5.2 Eigenschaften unterschiedlicher Schwingungsformen

Schwingungsform	Funktion	Gleichrichtwert	Formfaktor	Effektivwert	Scheitelfaktor	$X_0$	$X^2$	var( <b>X</b> )
	$A \cdot \sin(t)$	$ \bar{x}  = \frac{1}{T} \int_0^T  x(t)  dt$ $\frac{2}{\pi} \approx 0.637$	$\frac{X}{ \bar{x} }$ $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$	$X = \sqrt{X^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$k_s = \frac{X_{\max}}{X_{\text{eff}}}$ $\sqrt{2} \approx 1.414$	0	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^2}{2}$
	$A \cdot  \sin(t) $	$\frac{2}{\pi} \approx 0.637$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\sqrt{2} \approx 1.414$	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^2}{2} - \frac{4A^2}{\pi^2}$
	$\begin{cases} A \cdot \sin(t) & 0 < t < \pi \\ 0 & \text{True} \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \approx 0.318$	$\frac{\pi}{2} \approx 1.571$	$\frac{1}{2} = 0.5$	2	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{A^2}{4}$	$\frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2}$
	$A \cdot A(t)$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.557$	$\sqrt{3} \approx 1.732$	0	$\frac{A^2}{3}$	$\frac{A^2}{3}$
	$\begin{cases} A & 0 < x < t \\ 0 & \text{True} \end{cases}$	1	1	1	1	0	$A^2$	$A^2$
DC	1	1	1	1	1	-	-	-
		$\frac{t_1}{T}$	$\sqrt{\frac{T}{t_1}}$	$\sqrt{\frac{t_1}{T}}$	$\sqrt{\frac{T}{t_1}}$	$A \frac{t_1}{T}$	$A^2 \frac{t_1}{T}$	$\frac{A^2 t_1}{T} - \frac{A^2 t_1^2}{T^2}$