Inhaltsverzeichnis

1 Frequenzverhalten S205-251

1.1 Logarithmische Darstellung S206-210

Lrel. (dB)	Lrel. (NP)	P2/P1	A2/A1
100.000	11.513	10^{10}	10^{5}
90.000	10.362	10^{9}	31622.777
80.000	9.210	10^{8}	10^{4}
70.000	8.059	10^{7}	3162.278
60.000	6.908	10^{6}	10^{3}
50.000	5.756	10^{5}	316.228
40.000	4.605	10^{4}	10^{2}
30.000	3.454	10^{3}	31.623
20.000	2.303	10^{2}	10.000
19.085	2.197	81.000	9.000
19.000	2.187	79.433	8.913
18.062	2.079	64.000	8.000
18.000	2.072	63.096	7.943
17.000	1.957	50.119	7.079
16.902	1.946	49.000	7.000
16.000	1.842	39.811	6.310
15.563	1.792	36.000	6.000
15.000	1.727	31.623	5.623
14.000	1.612	25.119	5.012
13.979	1.609	25.000	5.000
13.000	1.497	19.953	4.467
12.041	1.386	16.000	4.000
12.000	1.382	15.849	3.981
11.000	1.266	12.589	3.548
10.000	1.151	10.000	3.162
9.542	1.099	9.000	3.000
9.000	1.036	7.943	2.818
8.000	0.921	6.310	2.512
7.000	0.806	5.012	2.239
6.021	0.693	4.000	2.000
6.000	0.691	3.981	1.995
5.000	0.576	3.162	1.778
4.000	0.461	2.512	1.585
3.010	0.347	2.000	1.414
3.000	0.345	1.995	1.413
2.000	0.230	1.585	1.259
1.000	0.115	1.259	1.122
0.000	0.000	1.000	1.000
-1.000	-0.115	0.794	0.891
-2.000	-0.230	0.631	0.794
-3.000	-0.345	0.501	0.708
-4.000	-0.461	0.398	0.631
-5.000	-0.576	0.316	0.562
-6.000	-0.691	0.251	0.501
-7.000	-0.806	0.200	0.447
-8.000	-0.921	0.158	0.398
-9.000	-1.036	0.126	0.355
-10.000	-1.151	0.100	0.316
-15.000	-1.727	0.032	0.178
-20.000	-2.303	10^{-2}	0.100
-30.000	-3.454	10^{-3}	0.032
-40.000	-4.605	10^{-4}	0.010
-50.000	-5.756	10^{-5}	0.003
-60.000	-6.908	10^{-6}	0.001
-70.000	-8.059	10^{-7}	0.000
-80.000	-9.210	10^{-8}	10^{-4}
-90.000	-10.362	10^{-9}	$3.162 \cdot 10^{-5}$
-100.000	-11.513	10^{-10}	10^{-5}

Verstärkungsmass L in **Dezibel** (dB):

$L_P = 10 \cdot \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ Index P: Leistung

$L_A = 20 \cdot \log\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$ Index A: Amplitude

Dezibel L zu linear:

$P_2 = P_1 \cdot 10^{\frac{L_P}{10}}$

$A_2 = A_1 \cdot 10^{\frac{L_A}{20}}$

Verstärkungsmass L in **Neper** (Np):

$L_P = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$

$L_A = \ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$

Neper zu linear:

$P_2 = P_1 \cdot e^{2L_P}$

$A_2 = A_1 \cdot e^{L_A}$

Die Umrechnung zwischen **dB** und **Np** ist linear:

$1 \text{ dB} = \frac{\ln(10)}{20} \text{ Np} = 0.1151 \text{ Np}$

$1 \text{ Np} = 20 \cdot \log(e) \text{ dB} = 8.686 \text{ dB}$

Anstatt $\frac{X_2}{X_1}$ für Verstärkungsmasse (L) können auch $\frac{X_1}{X_2}$ für **Dämpfungsmasse (a)** verwendet werden!
(P für Leistungen, A für Amplituden)

Hilfen zur Berechnung

xdB	$T_P = P_2/P_1$	$T_A = A_2/A_1$
$-xdB$	$1/T_P = D_P$	$1/T_A = D_A$
$x + 3dB$	$T_P \cdot 2$	$T_A \cdot \sqrt{2} \approx T_A \cdot 1.414$
$x + 6dB$	$T_P \cdot 4$	$T_A \cdot 2$
$x + 10dB$	$T_P \cdot 10$	$T_A \cdot \sqrt{10} \approx T_A \cdot 3.162$

T: Verstärkungsfaktor D: Dämpfungsfaktor

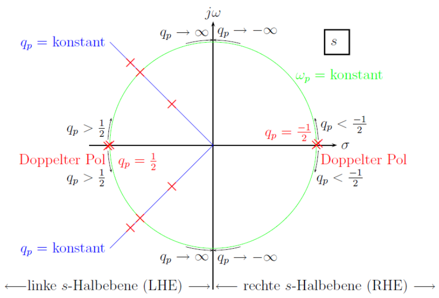
Relative Pegel

dBu	Spannungspegel bezogen auf 774.6 mV (1 mW an 600Ω)
dBV	Spannungspegel bezogen auf 1 V
dBμV	Spannungspegel bezogen auf 1 μV
dBW	Leistungspegel bezogen auf 1 W
dBm	Leistungspegel bezogen auf 1 mW

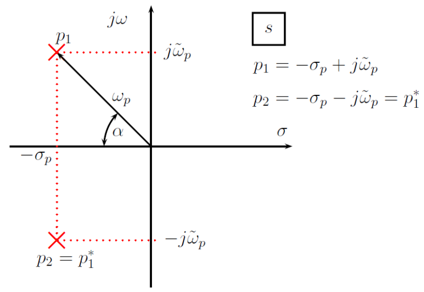
1.2 Frequenzgang S211-219

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$H(s) = K \cdot \frac{\overbrace{\prod_{i=1}^{r}(s^2 + 2\sigma_{zi}s + \omega_{zi}^2)}^{komplex}\ \overbrace{\prod_{i=2r+1}^{m}(s - z_i)}^{reell}}{\prod_{j=1}^{t}(s^2 + 2\sigma_{pj}s + \omega_{pj}^2)\ \prod_{j=2t+1}^{n}(s - p_j)}$$



Polfrequenz:	$\omega_p = \sqrt{\sigma_p^2 + \tilde{\omega}_p^2}$	(konj. komplexe Pole)
	$\omega_p = \sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}$	(reelle Pole)
Polgüte:	$q_p = \frac{\omega_p}{2 \cdot \sigma_p} = \frac{1}{2 \cdot \cos\alpha}$	(konj. komplexe Pole)
	$q_p = \frac{\sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}}{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}} \leq \frac{1}{2}$	(reelle Pole)



Für die **Nullstellen** gelten die gleichen geometrischen Beziehungen. Für einen **Einzelpol** ist die Güte nicht definiert! Die Polfrequenz entspricht dann dem Abstand zum Ursprung.

1.2.1 Bode-Diagramm und Pol-Nullstellenverteilung

siehe im Anhang

1.3 Minimal- und nicht-minimalphasige Systeme S220-224

1.3.1 Allpass-Systeme S220

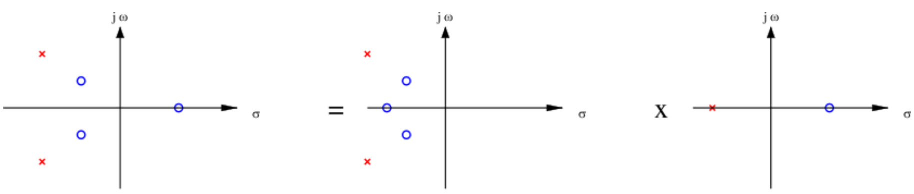
Allpässe werden vor allem als Laufzeitkorrekturglieder und als Verzögerungselemente verwendet. Der Amplitudengang ist konstant ($|H(jw)| = const \neq 0$) und die Pol- bzw. Nullstellen haben in Paaren auftretende Null- und Polstellen, die symmetrisch zur $j\omega$-Achse liegen. Dabei liegen die Nullstellen auf der RHE. UTF: $H_A(s) = K\frac{Q(-s)}{Q(s)}$
Wobei $Q(s)$ ein striktes Hurwitz-Polynom ist.

1.3.2 Minimalphasennetzwerke S221

- Keine Nullstellen in der rechten Halbebene
- Nullstellen auf der imaginären Achse erlaubt

1.3.3 Nicht-Minimalphasennetzwerk S221

Ein Nicht-Minimalphasennetzwerk kann durch Kaskadierung eines Allpasses und eine Minimalphasennetzwerk realisiert werden:



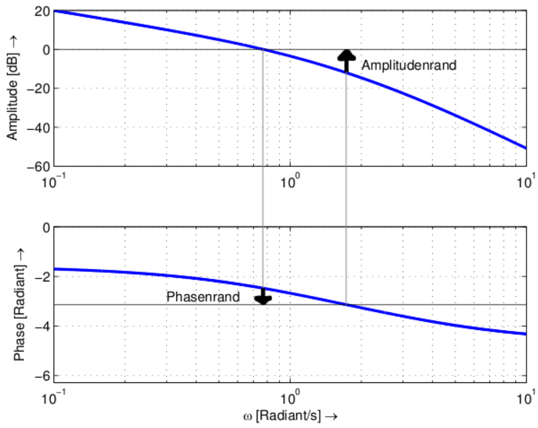
Nicht-Minimalphasennetzwerk (links) = Minimalphasennetzwerk (Mitte) · Allpass (rechts)
$H(s) = H_M(s) \cdot H_A(s)$

1.4 Stabilitätsbestimmung am Pol-/Nullstellendiagramm

asymptotisch stabil	=	alle Polstellen in der linken Halbebene (LHE)
grenzstabil	=	keine Polstellen in der RHE, keine mehrfachen Pole auf der imaginären Achse und auf der imaginären Achse mindestens ein einfacher Pol
instabil	=	Pol in RHE oder mehrfach Pole auf der imaginären Achse

1.5 Bode-Diagramm (Matlab: `bode`) S225-239

Siehe S225 für Beispiele



1.5.1 Definition

Das Bodediagramm besteht aus zwei Graphen, einer zeigt die Amplitude in doppelt-logarithmischer Form, der zweite zeigt die Phase in Grad und in linearer Form in Abhängigkeit der Frequenz dar.

1.5.2 Stabilitätsbestimmung S248-250 (Matlab: `margin`, `allmargin`)

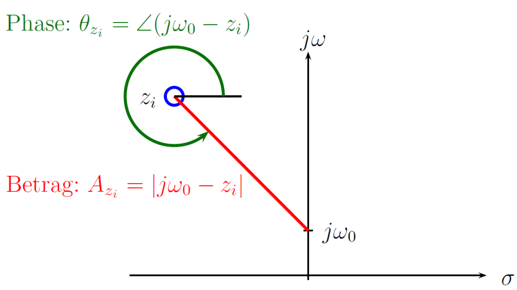
Der **Amplitudenrand** ist der Abstand des Amplitudenganges zur 0 dB-Linie bei der Kreisfrequenz ω, wo die Phase gleich $-\pi$ ist.

Der **Phasenrand** ist der Abstand das Phasenganges zur -π-Linie bei der Kreisfrequenz ω, wo die Amplitude gleich 0 dB ist.

Damit ein System stabil ist, müssen Phasen- und Amplitudenrand > 0 sein. Je grösser diese sind, desto "stabiler" ist das System.

1.5.3 Vom Pol-/Nullstellendiagramm zum Bode-Diagramm S230

$$\boxed{H(j\omega_0) = K \cdot \frac{(j\omega_0 - z_1)(j\omega_0 - z_2)\ldots(j\omega_0 - z_m)}{(j\omega_0 - p_1)(j\omega_0 - p_2)\ldots(j\omega_0 - p_n)} = |H(j\omega_0)| \cdot \mathrm{e}^{j\varphi(\omega_0)}}$$



$$|H(j\omega_0)| = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} A_{z_i}}{\prod_{j=1}^{n} A_{p_i}}$$

$$\varphi(\omega_0) = \text{Phase von } K + \sum_{i=1}^{m} \theta_{z_i} - \sum_{j=1}^{n} \theta_{p_j}$$

Grenzwerte:

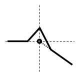
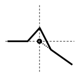
$\omega \to 0$	$\to \infty$	Polstelle bei $\omega = 0$
	endlich	keine Pol- oder Nullstelle bei $\omega = 0$
	$\to 0$	Nullstelle bei $\omega = 0$
$\omega \to \infty$	$\to \infty$	mehr Null- als Polstellen
	endlich	gleich viele Pol- und Nullstellen
	$\to 0$	mehr Pol- als Nullstellen

- Pol auf Höhe $j\omega_x \Longrightarrow$ Überhöhung bei ω_x
- Nullstelle auf Höhe $j\omega_x \Longrightarrow$ Dämpfung bei ω_x
- $\frac{\prod \text{Abstände NS zu } \omega}{\prod \text{Abstände PS zu } \omega} > 1 \Longrightarrow$ Verstärkung
- $\frac{\prod \text{Abstände NS zu } \omega}{\prod \text{Abstände PS zu } \omega} < 1 \Longrightarrow$ Dämpfung
- Beim Durchlaufen eines Pols oder einer Nullstelle auf der $j\omega$-Achse, macht der Phasengang einen Sprung von 180°

Regeln:

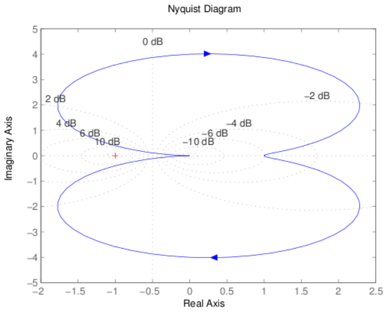
- reelle einfache Nullstellen "knicken nach oben weg"
- reelle einfache Polstellen "knicken nach unten weg"
- Pol-, Nullstellen auf der gleichen Stelle heben sich (theoretisch) auf
- konj. komplexe Nullstellen haben eine Senke
- konj. komplexe Polstellen haben eine Überhöhung

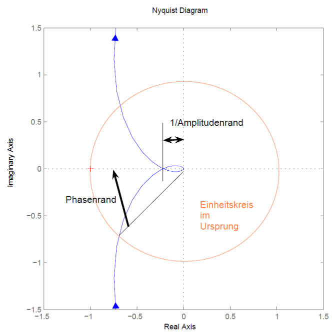
1.6 Approximation des Bode-Diagramms $_{\text{S230-239}}$

Pole	**UTF** $H(s)$	**Amplitude** $\lvert H(s)\rvert$	**Phase** $\angle(H(s))$
Keine, konstanter Faktor	$\alpha e^{j\beta}$	 Konstant: $20\log\alpha$	 Konstant: β
Pol im Ursprung	$\frac{\alpha}{s}$	 Lineare Steigung: $-20dB/Dek.$ $0dB$ bei $\omega=\alpha$	 Konstant: $-\frac{\pi}{2}$
Nullstelle im Ursprung	αs	 Lineare Steigung: $+20dB/Dek.$ $0dB$ bei $\omega=\frac{1}{\alpha}$	 Konstant: $+\frac{\pi}{2}$
Reeller Pol	$\frac{1}{s+\alpha}$	 $\omega<\alpha$: Konstant $-20\log\alpha$ $\omega>\alpha$: $-20dB/Dek.$	 $\omega<\frac{\alpha}{10}$: Konstant 0 $\omega>10\alpha$: Konstant $-\frac{\pi}{2}$
Reeller Pol	$\frac{\alpha}{s+\alpha}$	 $\omega<\alpha$: Konstant $0dB$ $\omega>\alpha$: $-20dB/Dek.$ $(\omega_r=\alpha)$	 $\omega<\frac{\alpha}{10}$: Konstant 0 $\omega>10\alpha$: Konstant $-\frac{\pi}{2}$
Reelle Nullstelle	$s+\alpha$	 $\omega<\alpha$: Konstant $20\log\alpha$ $\omega>\alpha$: $+20dB/Dek.$	 $\omega<\frac{\alpha}{10}$: Konstant 0 $\omega>10\alpha$: Konstant $+\frac{\pi}{2}$
Reelle Nullstelle	$\frac{s+\alpha}{\alpha}$	 $\omega<\alpha$: Konstant $0dB$ $\omega>\alpha$: $+20dB/Dek.$	 $\omega<\frac{\alpha}{10}$: Konstant 0 $\omega>10\alpha$: Konstant $+\frac{\pi}{2}$
Konjugiert-komplexe Pole für $\lvert q_p\rvert>1/2$	$\frac{1}{s^2+s\frac{\omega_p}{q_p}+\omega_p^2}$	 $\omega<\omega_p$: Konstant $-40\log\omega_p$ $\omega>\omega_p$: $-40dB/Dek.$ Überhöhung: $\frac{\omega_p}{2}$ bis $2\omega_p$ Maximum: $-40\log\omega_p+20\log q_p$ bei $\omega=\omega_p$	 $\omega<\frac{\omega_p}{10^{\frac{1}{2q_p}}}$: Konstant 0 $\omega>\omega_p 10^{\frac{1}{2q_p}}$: Konstant $-\pi$ $\omega=\omega_p$: $-\frac{\pi}{2}$
Konjugiert-komplexe Pole für $\lvert q_p\rvert>1/2$	$\frac{\omega_p^2}{s^2+s\frac{\omega_p}{q_p}+\omega_p^2}$	 $\omega<\omega_p$: Konstant $0dB$ $\omega>\omega_p$: $-40dB/Dek.$ Überhöhung: $\frac{\omega_p}{2}$ bis $2\omega_p$ Maximum: $20\log q_p$ bei $\omega=\omega_p$	 $\omega<\frac{\omega_p}{10^{\frac{1}{2q_p}}}$: Konstant 0 $\omega>\omega_p 10^{\frac{1}{2q_p}}$: Konstant $-\pi$ $\omega=\omega_p$: $-\frac{\pi}{2}$
Konjugiert-komplexe Nullstellen für $\lvert q_z\rvert>1/2$	$s^2+s\frac{\omega_z}{q_z}+\omega_z^2$ $\frac{s^2+s\frac{\omega_z}{q_z}+\omega_z^2}{\omega_z^2}$	Analog zu den Konjugiert-komplexen Polen jedoch gespiegelt an der $0dB$- / 0-Grad-Linie.	

Serieschaltung von Systemen erfolgt durch **Superposition** der einzelnen Bode-Diagramme (Multiplikation von UTFs entspricht Addition im dB-Bereich). $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. Für ω_p und q_p siehe Kapitel1.2

1.7 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (Matlab: nyquist) S240-247





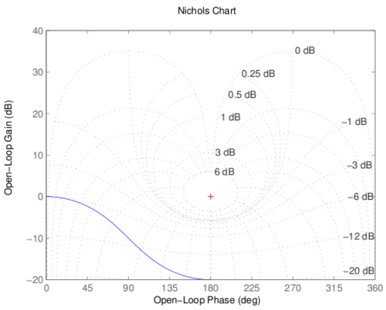
1.7.1 Definition

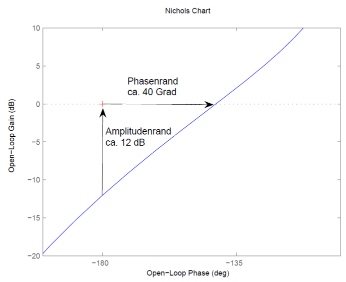
Im Gegensatz zum Bode-Diagramm wird beim Nyquist-Diagramm Betrag und Phase in einem einzigen Diagramm dargestellt, nämlich indem man den Real- und Imaginärteil des Ausgabewertes direkt in die komplexe Zahlenebene zeichnet.

1.7.2 Stabilitätsbestimmung S245-247

Ist der **offene** Regelkreis $H(s)$ **asymptotisch stabil**, so ist der **geschlossene** Regelkreis $1 + H(s) = D(s) + N(s)$ asymptotisch stabil, wenn die **Ortskurve** des **offenen** Regelkreises den kritischen Punkt (-1,j0) weder umkreist noch durchläuft.

1.8 Nichols-Diagramm (Matlab: nichols)





1.8.1 Definition

Das Nichols Diagramm (auch Amplituden-Phasen-Diagramm) ist die Darstellung des Absolutbetrages (Verstärkung, logarithmisch) in Abhängigkeit der Phase. Das Nichols Diagramm ist zur Bestimmung der Stabilität in rückgekoppelten Systemen verwendbar.

1.8.2 Stabilitätsbestimmung

Beim Nichols Diagramm lassen sich Amplitudenrand und Phasenrand am einfachsten aus dem Diagramm lesen.

1.9 Phasen-, und Gruppenlaufzeit S182-186

	Formel	Definition
Phasenlaufzeit S182	$\tau_P(\omega) = \frac{-\varphi(\omega)}{\omega}$	Die Phasenlaufzeit ist nur für **reine Sinusschwingungen** exakt bestimmbar. Mit einer Phasenlaufzeit wird das Ausgangssignal wird gegenüber dem Eingangsignal verzögert.
Gruppenlaufzeit S183	$\tau_g(\omega) = \frac{-\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$	Die Gruppenlaufzeit gilt für Signale mit mehreren Frequenzanteilen. Die Gruppenlaufzeit kann als **Laufzeit eines Signals** interpretiert werden.

1.10 Bestimmung der UTF aus dem Frequenzgang S292

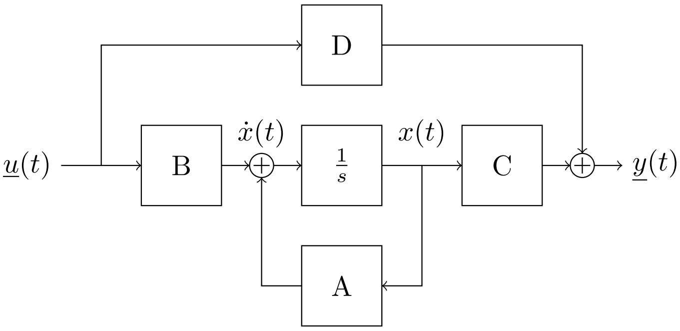
$$\frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{N(-s)}{D(-s)} = |H(j\omega)|^2\Big|_{\omega^2=-s^2}$$

Aus Stabilitätsgründen muss $D(s)$ ein Hurwitz-Polynom sein.

2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) S253-288

Darstellung einer Differentialgleichung n. Ordnung durch ein Differentialgleichungssystem von n Gleichungen 1. Ordnung.

2.1 Definition S255



Bestimmung der Matrizen A,B,C,D siehe auch S257

$\underline{\dot{x}}(t) = \boldsymbol{A}\underline{x}(t) + \boldsymbol{B}\underline{u}(t)$ (Zustandsgleichung)
$\underline{y}(t) = \boldsymbol{C}\underline{x}(t) + \boldsymbol{D}\underline{u}(t)$ (Ausgangsgleichung)

A Systemmatrix (n x n)
B Steuer- oder Eingangsmatrix (n x m) "senkrecht"
C Beobachtungs- oder Ausgangsmatrix (k x n) "waagrecht"
D Übergangs- oder Durchgangsmatrix (k x m)

m Anzahl Eingänge
n Anzahl Integratoren (Ordnung)
k Anzahl Ausgänge

2.2 Äquivalente ZRD S257-258

$$\underline{\dot{\xi}}(t) = \underbrace{\mathbf{TAT^{-1}}}_{\hat{A}}\underline{\xi}(t) + \underbrace{\mathbf{TB}}_{\hat{B}}\underline{u}(t) \qquad \underline{y}(t) = \underbrace{\mathbf{CT^{-1}}}_{\hat{C}}\underline{\xi}(t) + \underbrace{D}_{\hat{D}}\underline{u}(t)$$

T: Transformationsmatrix mit $\mathbf{TT^{-1}} = \mathbf{T^{-1}T} = \mathbf{I}$
Mit der Transformationsmatrix kann man verschiedenste Zustandgrössen und ZRD erhalten, die aber alle ein identisches Systemverhalten aufweisen.

2.3 Stabilität der inneren Systemzustände S274

Wenn alle Realteile der Eigenwerte λ der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ negativ sind, ist ein LTI-System asymptotisch stabil,
$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0 \rightarrow \forall\ \lambda \quad \Re\{\lambda\} < 0$ jedoch nicht umgekehrt.

2.4 ZRD im Zeitbereich S259-262

2.5 ZRD im Frequenzbereich S263-273 (Matlab: ss2tf)

$$\boldsymbol{H(s)} = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{U}(s)} = \boldsymbol{C}\,(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \qquad \text{(Anfangsbedingungen: } x(\vec{0}) = \vec{0})$$

Die Grösse der Matrix $\boldsymbol{H(s)}$ entspricht der Grösse der Durchgangsmatrix $\boldsymbol{D}$. $\boldsymbol{I}$ sei die Einheitsmatrix mit Grösse n x n.

Allgemeine Formel für $m = 1$ Eingang, $k = 1$ Ausgang, $n = 2$ Integratoren:

$$\begin{aligned} H(s) &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} + D \\ &= \frac{B_{11}C_{11}(s - A_{22}) + B_{11}C_{12}A_{21} + B_{21}C_{11}A_{12} + B_{21}C_{12}(s - A_{11})}{(s - A_{22})(s - A_{11}) - A_{12}A_{21}} + D \end{aligned}$$

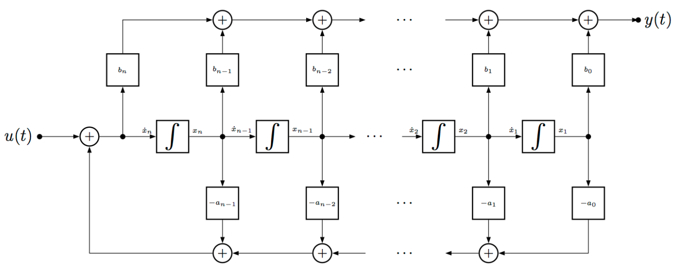
Ist die Übertragungsfunktion $H_{ba}(s)$ vom **Eingang b** zum **Ausgang a** gesucht, so gilt:

$$H_{ba}(s) = \frac{Y_a(s)}{U_b(s)} = C(a,:) \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B(:,b) + D(a,b)$$

2.6 Bestimmung der ZRD aus der UTF S266

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}}$$

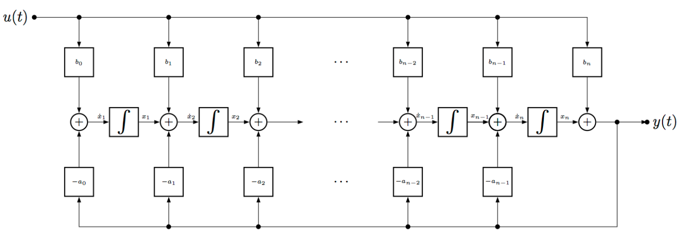
2.6.1 Regelungsnormalform S266



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & \dots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t).$$

2.6.2 Beobachtungsnormalform S268



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_2 - a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t),$$

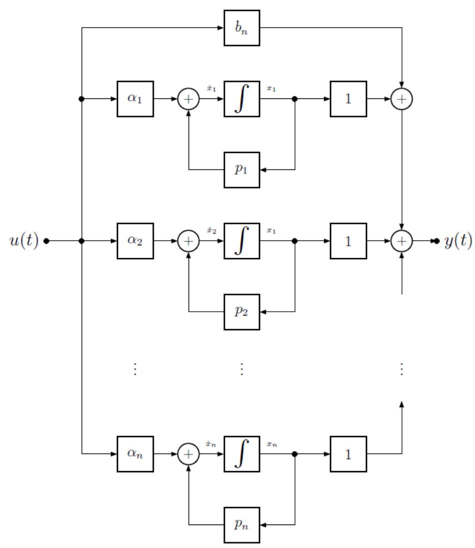
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t).$$

2.6.3 Diagonalform S270

Für einfache, reelle Pole mit $m = n$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & p_{n-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}}^{\mathbf{C}} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}} \cdot u(t)$$



2.6.4 Jordan-Normalform S273

Ist für mehrfache, reelle Pole. Die Jordan-Normalform ist gleich aufgebaut wie die Diagonalform, es kann jedoch auf der oberen Nebendiagonalen z.T 1 haben. Mehr Details im Skript S.283

2.7 Beobachtbar- & Steuerbarkeit S276-280

2.7.1 Steuerbarkeit S276 (Matlab: ctrb)

Gibt es Zustände von $\underline{x}(t)$ die nicht von den Eingängen $\underline{u}(t)$ beeinflusst werden? Wenn ja, dann ist das System nicht steuerbar!
Wenn $|Q_{Steuerbarkeit}| = \left|\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A^2B} & \ldots & \boldsymbol{A^{n-1}B}\end{bmatrix}\right| \neq 0$, dann ist das System vollständig steuerbar.

2.7.2 Ausgangssteuerbarkeit S279

Ein System ist vollständig ausgangssteuerbar, wenn es eine Steuerfunktion $\underline{u}(t)$ gibt, welche die Ausgänge $\underline{y}(t)$ innerhalb einer endlichen Zeitspanne in einen Endwert bringt.
Wenn $rang(Q_{AusgStrbrkeit}) = rang\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{CB} & \boldsymbol{CAB} & \boldsymbol{CA^2B} & \ldots & \boldsymbol{CA^{n-1}B} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}\right) = k$ (k= Anzahl Ausgänge), dann ist das System vollständig ausgangssteuerbar.
Rang einer Matrix: max. Anzahl lin. unabhängiger Zeilen (= lin. unabh. Spalten)

2.7.3 Beobachtbarkeit S277 (Matlab: obsv)

Gibt es Zustände $\underline{x}(t)$ die keinen Einfluss auf die Ausgänge $\underline{y}(t)$ haben? Wenn ja, kann man aus dem Verhalten von $\underline{y}(t)$ nicht auf die Zustände $\underline{x}(t)$ schliessen! Das System ist nicht beobachtbar!

Wenn $|Q_{Beobachtbarkeit}| = \left|\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA^2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA^{n-1}}\end{bmatrix}\right| \neq 0$, dann ist das System vollständig beobachtbar.

3 Matrizenrechnung

3.1 Übersicht

Transponierte Matrix: $A^T = [a^T_{ik}] = [a_{ki}]$ vertauschen der Zeilen mit Spalten

Einheitsmatrix: $I_n = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

3.2 Determinante

2x2 Matrix

$$\det\begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix} = ad - bc$$

3x3 Matrix

$$\begin{bmatrix}a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i\end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Dreiecksmatrix - Alle Elemente entweder ober- oder unterhalt der Hauptdiagonale = 0

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$ Die Det. ist das Produkt der Hauptdiagonal-Einträge. Gilt somit auch für Diagonalmatritzen.

Null ($|A| = 0$) - Wenn A eine (n,n)-Matrix ist, so wird $|A| = 0$ unter einer der folgenden Bedingungen:

- Zwei Zeilen/Spalten sind linear abhängig (gleich oder ein Vielfaches der anderen).
- Alle Elemente einer Zeile/Spalte sind Null.

Allgemein:

$$A \epsilon M_n : \det A = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & & \ldots & \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}D_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}D_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}D_{1n}$$

3.2.1 Unterdeterminante

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D_{ij} die (n-1)×(n-1)-Untermatrix von D ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.
Diese Methode ist zu empfehlen, wenn die Matrix in einer Zeile oder Spalte bis auf eine Stelle nur Nullen aufweisst. Dies lässt sich meist mit dem Gausverfahren bewerkstelligen.

3.3 Gaussverfahren

Durch Addition und Subtraktion einzelner Zeilen (auch von Vielfachen einer Zeile) werden einzelne Stellen auf Null gebracht.
zB:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \dots & \\ \dots & & & \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} - na_{11} & ka_{22} - na_{12} & \dots & ka_{2n} - na_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Die n * erste Zeile wurde von der k * zweiten Zeile abgezogen ($a_{2.} = ka_{2.} - na_{1.}$)

3.4 Inverse Matrix (Existiert nur wenn Matrix regulär: $\det A \neq 0$)

2x2 Matrix:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3x3 Matrix:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix (Alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonale = 0, Elemente auf Hauptdiagonale sind Eigenwerte λ_i):
Alle Elemete elementweise invertieren - Kehrwert. $\Rightarrow$ *Gilt nur wenn alle Elemente auf der Hauptdiagonale $\neq 0$ sind.*

Allgemein:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \dots & \\ \dots & & & \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

1. A^T bestimmen (Zeilen und Spalten vertauschen) $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & & \dots & \\ \dots & & & \\ a_{1n} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$
2. Bei A^T jedes Element a_{ij} durch Unterdet. D_{ij} mit richtigem Vorzeichen ersetzen $A^* = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}D_{11} & \dots & (-1)^{1+n}D_{1n} \\ \dots & & \\ (-1)^{n+1}D_{n1} & \dots & (-1)^{n+n}D_{nn} \end{bmatrix}$
3. $A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$

3.5 Diagonalisierung

1. Eigenwerte λ ausrechnen: $\det(A - I_n\lambda) = 0$
2. Eigenvektoren $\vec{v}$ bilden: $(A - \lambda I_n)\vec{v} = 0$
3. Transformationsmatrix: $T = [\vec{v_1} \dots \vec{v_n}]$
4. T^{-1} berechnen (Achtung ist A symmetrisch, dh. $A^T = A$ und/oder alle EV senkrecht zueinander, dann $T^{-1} = T^T$)
5. $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = A_{diag} = T^{-1}AT$
   $B_{diag} = T^{-1}B$
   $C_{diag} = CT$
   $D_{diag} = D$

3.6 Eigenwerte

Die Eigenwerte λ erhält man folgendermassen (I ist die Einheitsmatrix):

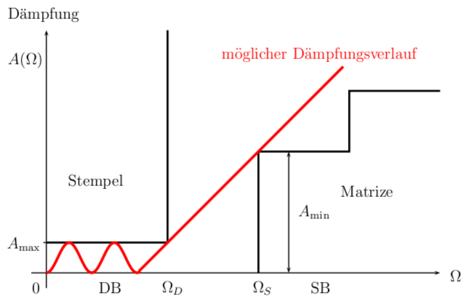
$$|\lambda I - A| = 0 \qquad \text{nach } \lambda \text{ auflösen}$$

4 Filtertheorie S289-415

Man unterscheidet die Filtertypen grundsätzlich zwischen Tief-(TP), Hoch-(HP), All-(AP) und Bandpässen(BP) sowie Bandsperren(BS).

4.1 Toleranzschema S293

Im Durchlassbereich (DB) bestimmt der Stempel die maximal zulässige Dämpfung A_{max}; im Sperrbereich (SB) bestimmt die Matrize die minimal nötige Dämpfung A_{min}.

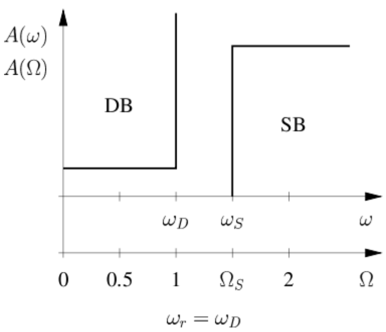


4.2 Realisation analoger Filter

4.2.1 Allgemeines Vorgehen

UTF	LC-Filter
1. Toleranzschema (Kap. 4.1) und Frequenznormierung (Kap. 4.2.2)	1. Toleranzschema (Kap. 4.1) und Frequenznormierung (Kap. 4.2.2)
2. Äquivalenten normierten TP bestimmen (Kap. 4.2.7) (TP)	2. Äquivalenten normierten TP bestimmen (Kap. 4.2.7) (TP)
3. Tiefpassapproximationsart bestimmen (Kap. 4.2.3) (TP)	3. Tiefpassapproximationsart bestimmen (Kap. 4.2.3) (TP)
4. Ordnung für TP bestimmen (Kap. 4.2.4) (TP)	4. Ordnung für TP bestimmen (Kap. 4.2.4) (TP)
5. normierte TP UTF bestimmen (Kap. 4.2.5) (TP)	5. Referenzwiderstand bestimmen (Kap. 4.2.9) (TP)
6. Ω_{3dB} bestimmen (Kap. 4.2.6) (TP)	6. L_{FI} und C_{FI} bestimmen (Kap. 4.2.10) (TP)
7. Rücktransformation und Entnormierung (Kap. 4.2.8 und Kap. 4.2.7)	7. Ω_{3dB} bestimmen (Kap. 4.2.6) (TP)
	8. LC Umnormieren (Kap. 4.2.11) (TP)
	9. Filtertransformation (Kap. 4.2.12)
	10. LC in Impedanz & Frequenz entnormieren (Kap. 4.2.13)

4.2.2 Frequenznormierung S295



Normierung

$$\boxed{S = \frac{s}{\omega_r} \qquad \Omega = \frac{\omega}{\omega_r} \qquad \sigma' = \frac{\sigma}{\omega_r}}$$

Bei BP: $\omega_r = \omega_m = \sqrt{\omega_{B1}\omega_{B2}} \underbrace{=}_{\text{wenn symmetrisch}} \sqrt{\omega_{S1}\omega_{S2}}$

Bei BS: $\omega_r = \omega_m = \sqrt{\omega_{S1}\omega_{S2}} \underbrace{=}_{\text{wenn symmetrisch}} \sqrt{\omega_{B1}\omega_{B2}}$

Bei TP & HP: $\omega_r = \omega_D$

ω_r: Referenzfrequenz
ω_m: Mittenfrequenz
ω_D: Durchlassfrequenz

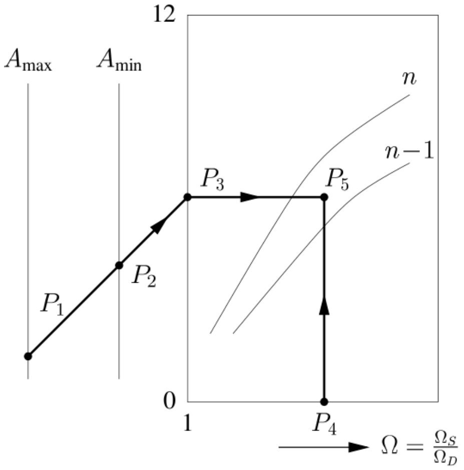
Zur Entnormierung wird ω_{3db} gebraucht, daher sind diese Formeln dafür nicht geeignet!

4.2.3 Tiefpassapproximationen (TP) S295-330

Butterworth S301 • Amplitudengang: Gute Approximation ("maximal flach", keine Welligkeit) • Allpolfilter: Pole liegen auf dem Einheitskreis mit Abstand $\frac{\pi}{n}$ • Gruppenlaufzeit: Leichte Überhöhung bei Grenzfrequenz • Bei $\Omega = 1$ hat $\|H(j\omega)\|$ einen Abfall von 3.01dB • Steilheit im SB: $-n \cdot 20dB/Dek$	**Kritisch gedämpftes (Gauss)-Filter** S297 • Keine Überschwinger bei Impuls- & Sprungantwort • Kaskadierung von wirkungsfreien identischer Filter 1.Ordnung • Allpolfilter: Pole nur auf negativer σ-Achse • Gruppen- und Phasenlaufzeit im DB relativ konstant • Bei $\Omega = 1$ hat es eine Dämpfung 3.01dB • Steilheit im SB: $-n \cdot 20dB/Dek$
Tschebyscheff I S308 • Amplitudengang: Definierte Welligkeit im DB, steiler Übergang • Allpolfilter, wobei alle Pole auf einer Ellipse liegen • Gruppen- und Phasenlaufzeit im DB relativ wellig. • Steilheit im SB: $-n \cdot 20dB/Dek$	**Inverser Tschebyscheff / Tscheby. II** S317 • Definierte Welligkeit im Sperrbereich • kein Allpolfilter • Gruppen- und Phasenlaufzeit im DB relativ konstant (besser als Teschbyscheff I)
Cauer (elliptisches Filter) S320 • Amplitudengang: Definierte Welligkeit im SB und DB • Steilster Übergang zwischen SB und DB • bei geradem N je N konjugiert komplexe Pol- und Nullstellen • bei ungeradem N 1 reeler Pol und N-1 konjugiert komplexe Pol-Nullstellen • kein Allpolfilter • Gruppen- und Phasenlaufzeit im DB relativ schlecht • kleinste Ordnung	**Bessel** S326 • Sehr linearer Phasengang • Flachster Übergang zw. DB und SB im Amplitudengang • ergibt ein Allpolfilter • immer asymptotisch stabil • Gruppen- und Phasenlaufzeit im DB sehr konstant

4.2.4 Bestimmung der minimal nötigen Ordnung (TP)

Mittels Nomogramm



Oder mittels Formeln

$$n_{\text{Butterworth}} = \left\lceil \frac{\log\left[\frac{10^{A_{\min}/10}-1}{10^{A_{\max}/10}-1}\right]}{2\cdot\log\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil \quad \text{S307}$$

$$n_{\text{Tschebyscheff}_{(\text{I,II})}} = \left\lceil \frac{\text{Arcosh}\sqrt{\frac{10^{A_{\min}/10}-1}{10^{A_{\max}/10}-1}}}{\text{Arcosh}(\Omega_S/\Omega_D)} \right\rceil \quad \text{S314}$$

$$n_{\text{Cauer}} = \left\lceil \frac{K\left(\left(\frac{\Omega_D}{\Omega_S}\right)^2\right) K\left(1-\frac{10^{A_{\max}/10}-1}{10^{A_{\min}/10}-1}\right)}{K\left(1-\left(\frac{\Omega_D}{\Omega_S}\right)^2\right) K\left(\frac{10^{A_{\max}/10}-1}{10^{A_{\min}/10}-1}\right)} \right\rceil, \text{mit} \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k\sin^2\theta}} \quad \text{S324}$$

Oder mit Matlab

`buttord, cheb1ord, cheb2ord, ellipord`

Grundsätzlich gilt (für gleiche Spezifikationen) $n_{\text{Butterworth}} \geq n_{\text{Tschebyscheff}_{(\text{I,II})}} \geq n_{\text{Cauer}}$

4.2.5 normierte TP UTF bestimmen (TP)

Die UTF kann meist aus Tabellen herausgelesen werden und variiert je nach Filtertyp.

Filtertyp	**Tabellen auf Seite**	**normiert auf**	$H(S)$ **von TP approximation**
Butterworth	397 - 398	ω_{3dB}	$H(S) = \frac{1}{S^n+b_{n-1}S^{n-1}+\ldots+b_2S^2+b_1S+b_0}$
Kritisch-gedämpfte Filter	395 - 397	ω_{3dB}	$H(S) = \frac{K}{S^n+b_{n-1}S^{n-1}+\ldots+b_2S^2+b_1S+b_0}$
Tschebyscheff I	399 - 403	ω_D	$H(S) = \frac{K}{S^n+b_{n-1}S^{n-1}+\ldots+b_2S^2+b_1S+b_0}$
Bessel	403 - 405	ω_{3dB}	$H(S) = \frac{K}{S^n+b_{n-1}S^{n-1}+\ldots+b_2S^2+b_1S+b_0}$
Cauer	406		mittels Software

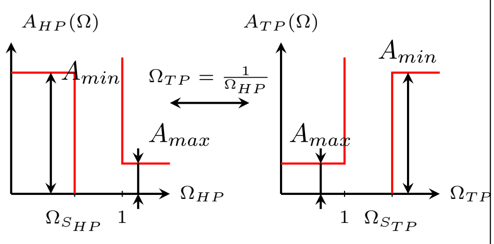
4.2.6 Ω_{3dB} bestimmen (TP)

$$\boxed{\Omega_{3dB} = \frac{\omega_{3dB}}{\omega_r}}$$

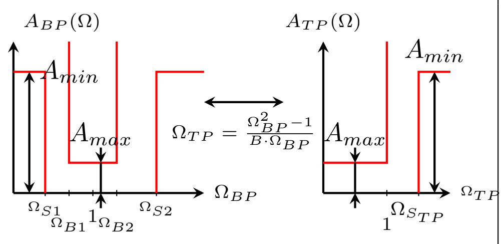
Butterworth S397 $\omega_{3\text{dB}} = \underbrace{\sqrt[2n]{\frac{1}{10^{A_{\max}/10}-1}}}_{\Omega_{3dB}} \cdot\omega_D$	Tschebyscheff I S399 $\omega_{3\text{dB}} = \underbrace{\cosh\left[\left(\frac{1}{n}\right)\text{Arcosh}\left(\frac{1}{e}\right)\right]}_{\Omega_{3dB}} \cdot\omega_D$	Kritisch gedämpfte Filter S395 $\omega_{3\text{dB}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2^{1/n}-1}}{\sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10\cdot n}}-1}}}_{\Omega_{3dB}} \cdot\omega_D$
Cauer S406 Keine Tabelle, (Matlab: `ellip, ellipap`)	Bessel S403 $\omega_{3\text{dB}}$ aus Abb. 7.111 S404	Rippelfehler: $e = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}}-1}$

4.2.7 Filtertransformationen (TP) S342-361

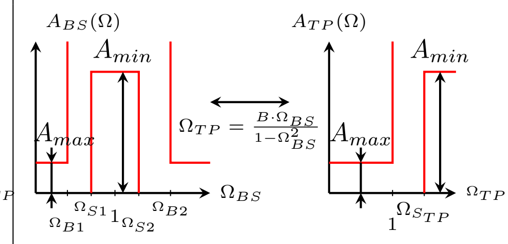
Tiefpass-Hochpass



Tiefpass-Bandpass



Tiefpass-Bandsperre



	TP ⇔ HP S342	**TP ⇔ BP** S346	**TP ⇔ BS** S355
Ordnung:	n	$2n$	$2n$
Ansatz:	$S \longrightarrow \frac{1}{S}$	$S \longrightarrow \frac{S^2+1}{B\cdot S}$	$S \longrightarrow \frac{B\cdot S}{S^2+1}$
UTF:	$H_{HP}(S) = H_{TP}\left(\frac{1}{S}\right)$	$H_{BP}(S) = H_{TP}\left(\frac{S^2+1}{B\cdot S}\right)$	$H_{BS}(S) = H_{TP}\left(\frac{B\cdot S}{S^2+1}\right)$
Norm. Frequenz:	$\Omega_{S_{TP}} = \frac{1}{\Omega_{S_{HP}}}$	$\Omega_{S_{TP}} = \frac{\Omega_{S2}-\Omega_{S1}}{B} = \frac{\Omega_{S2}-\Omega_{S1}}{\Omega_{B2}-\Omega_{B1}} = \frac{\omega_{S2}-\omega_{S1}}{\omega_{B2}-\omega_{B1}}$	$\Omega_{S_{TP}} = \frac{B}{\Omega_{S2}-\Omega_{S1}} = \frac{\Omega_{B2}-\Omega_{B1}}{\Omega_{S2}-\Omega_{S1}} = \frac{\omega_{B2}-\omega_{B1}}{\omega_{S2}-\omega_{S1}}$
normierte Bandbreite:		$B = \frac{\omega_{B2}-\omega_{B1}}{\omega_r} = \Omega_{B2}-\Omega_{B1}$	
geometrisch-symmetrische BP/BS:		$\Omega_{B1}\Omega_{B2} = \Omega_{S1}\Omega_{S2} = 1$	

Direkte Substitution der UTF

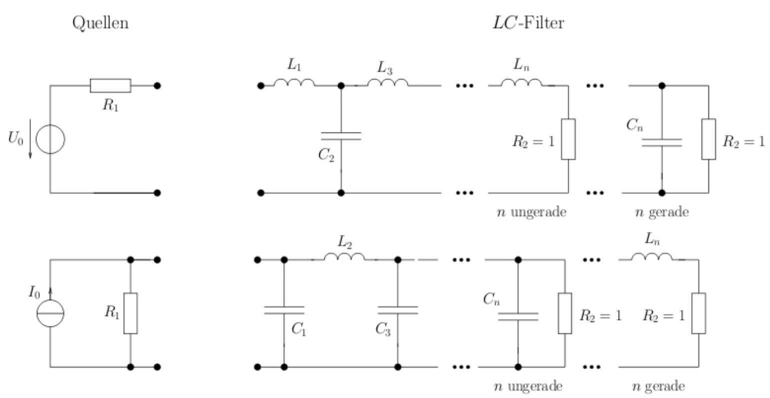
HP-TP	$H_{TP}(S) = \frac{K}{b_n S^n + b_{n-1}S^{n-1}+\ldots+b_1 S + b_0}$	$\longrightarrow H_{HP}(S) = \frac{KS^n}{b_0 S^n + b_1 S^{n-1}+\ldots+b_{n-1}S+b_n}$
BP-TP 1. Ordnung	$H_{TP}(S) = \frac{1}{S+a}$	$\longrightarrow H_{BP}(S) = H_{TP}\left(\frac{S^2+1}{B\cdot S}\right) = \frac{B\cdot S}{S^2+aB\cdot S+1}$
BP-TP 2. Ordnung	$H_{TP}(S) = \frac{1}{S^2+aS+b}$	$\longrightarrow H_{BP}(S) = H_{TP}\left(\frac{S^2+1}{B\cdot S}\right) = \frac{B^2S^2}{S^4+aBS^3+(bB^2+2)S^2+aB\cdot S+1}$
BS-TP 1. Ordnung	$H_{TP}(S) = \frac{1}{S+a}$	$\longrightarrow H_{BS}(S) = H_{TP}\left(\frac{B\cdot S}{S^2+1}\right) = \frac{\frac{1}{a}(S^2+1)}{S^2+\frac{B}{a}S+1}$
BS-TP 2. Ordnung	$H_{TP}(S) = \frac{1}{S^2+aS+b}$	$\longrightarrow H_{BS}(S) = H_{TP}\left(\frac{B\cdot S}{S^2+1}\right) = \frac{\frac{1}{b}(S^2+1)^2}{S^4+\frac{aB}{b}S^3+\left(\frac{B^2}{b}+2\right)S^2+\frac{aB}{b}S+1}$

4.2.8 UTF Entnormierung

TP S295	**HP** S346	**BP** S352	**BS** S360
$S = \frac{s}{\Omega_{3dB}\cdot\omega_D}$	$S \rightarrow \frac{1}{S}$ $S = \frac{s\cdot\Omega_{3dB}}{\omega_D}$	$S \rightarrow \frac{S^2+1}{S\cdot B\cdot\Omega_{3dB}}$ $S = \frac{s}{\omega_m}$	$S \rightarrow \frac{S\cdot B\cdot\Omega_{3dB}}{S^2+1}$ $S = \frac{s}{\omega_m}$

Falls es schon auf Ω_D (Tschebyscheff I) normiert ist, so gilt $\Omega_{3dB} = 1$

4.2.9 LC-Tiefpass bestimmen (TP) S362,407



Die Struktur unterscheidet sich nicht zwischen den Filtertypen.
Es ist zwischen Minimal-C (meistens) und Minimal-L-Netzwerken auszuwählen.

Referenzwiderstand: $\boxed{R_r = R_{\text{Last}} = R_{2_{\text{unnormiert}}}}$

4.2.10 LC Tabellenindex (TP)

Butterworth S409	Tschebyscheff I S410-411	Kritisch gedämpfte Filter S408
Cauer S414-415	Bessel S412	

Erläuterungen zu den Tabellen:

- Die Legende oben beschreibt die Stromquellenstruktur, die untere die Spannungsquellenstruktur.
- Normierung auf $R_2 = 1$, folglich $R_1 = \frac{R_{\text{Quelle}}}{R_r} = \frac{R_{1\text{unnormiert}}}{R_r}$

4.2.11 LC umnormieren (TP)

$$\boxed{L_{FI} = \frac{L_{FI3dB}}{\Omega_{3dB}} \qquad C_{FI} = \frac{C_{FI3dB}}{\Omega_{3dB}}}$$

(nicht bei Cauer-Filter)

4.2.12 Bauteiltransformation zum gewünschten Filter S386

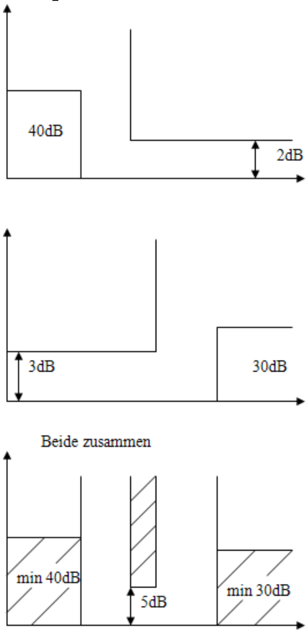
Tiefpass-Hochpass S373	L_{TP} $\quad s \longrightarrow \frac{1}{s}$	$C_{HP} = \frac{1}{L_{TP}}$
	C_{TP} $\quad s \longrightarrow \frac{1}{s}$	$L_{HP} = \frac{1}{C_{TP}}$
Tiefpass-Bandpass S374	L_{TP} $\quad s \longrightarrow \frac{s^2+1}{B \cdot s}$	$L_{BP} = \frac{L_{TP}}{B}$, $C_{BP} = \frac{B}{L_{TP}}$
	C_{TP} $\quad s \longrightarrow \frac{s^2+1}{B \cdot s}$	$L_{BP} = \frac{B}{C_{TP}}$, $C_{BP} = \frac{C_{TP}}{B}$
Tiefpass-Bandsperre S375	C_{TP} $\quad s \longrightarrow \frac{B \cdot s}{s^2+1}$	$L_{BS} = \frac{1}{B \cdot C_{TP}}$, $C_{BS} = C_{TP} \cdot B$
	L_{TP} $\quad s \longrightarrow \frac{B \cdot s}{s^2+1}$	$L_{BS} = L_{TP} \cdot B$, $C_{BS} = \frac{1}{B \cdot L_{TP}}$

4.2.13 LC in Impedanz und Frequenz entnormieren S377

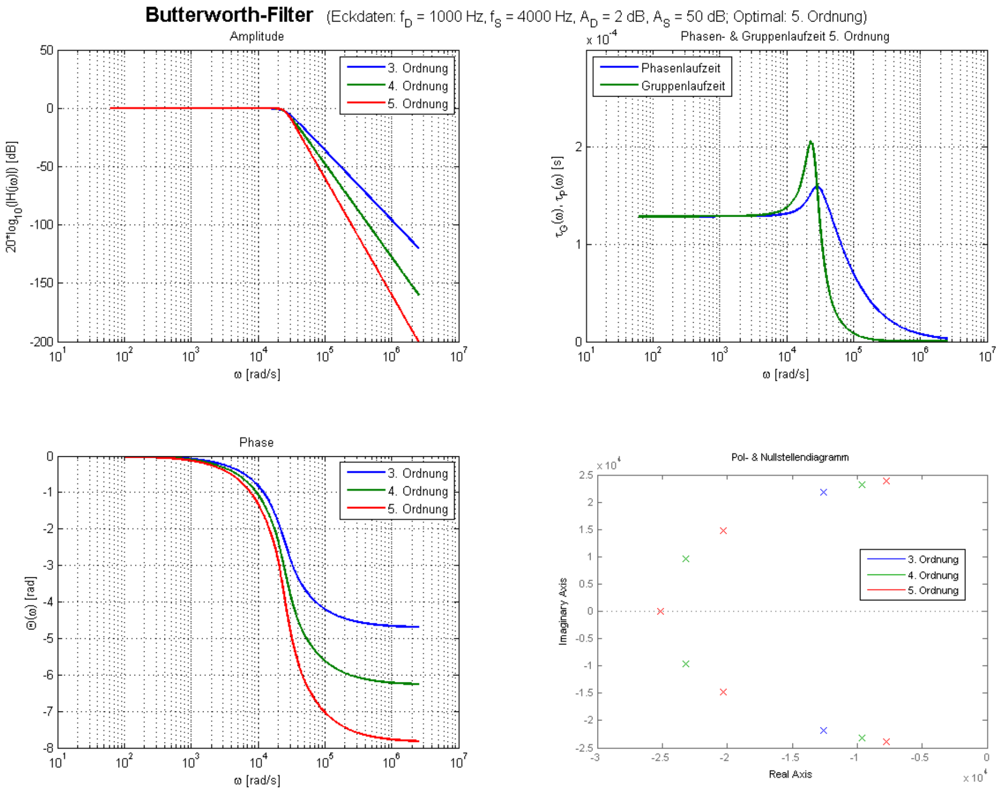
$$\boxed{L = L_{FI} \cdot \frac{R_r}{\omega_r} \qquad C = C_{FI} \cdot \frac{1}{R_r \cdot \omega_r}}$$

4.3 Kaskadierung von Filtern

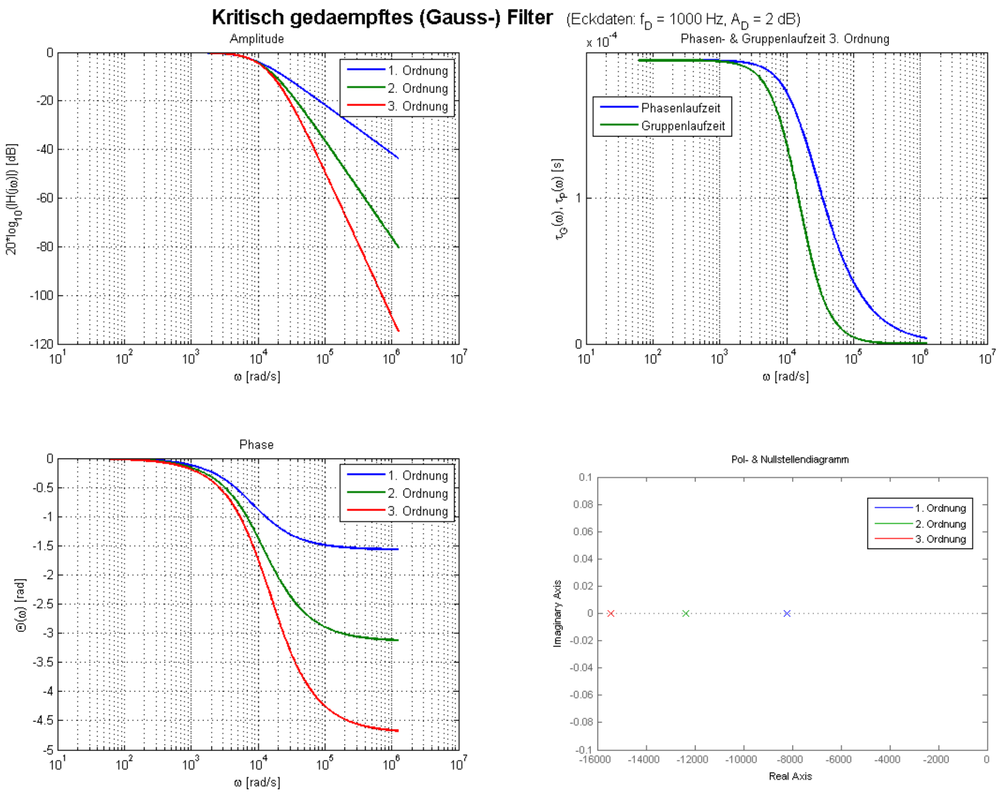
Wenn mehrere Filter kaskadiert werden, ändern sich die Spezifikationen wie in folgendem Beispiel:



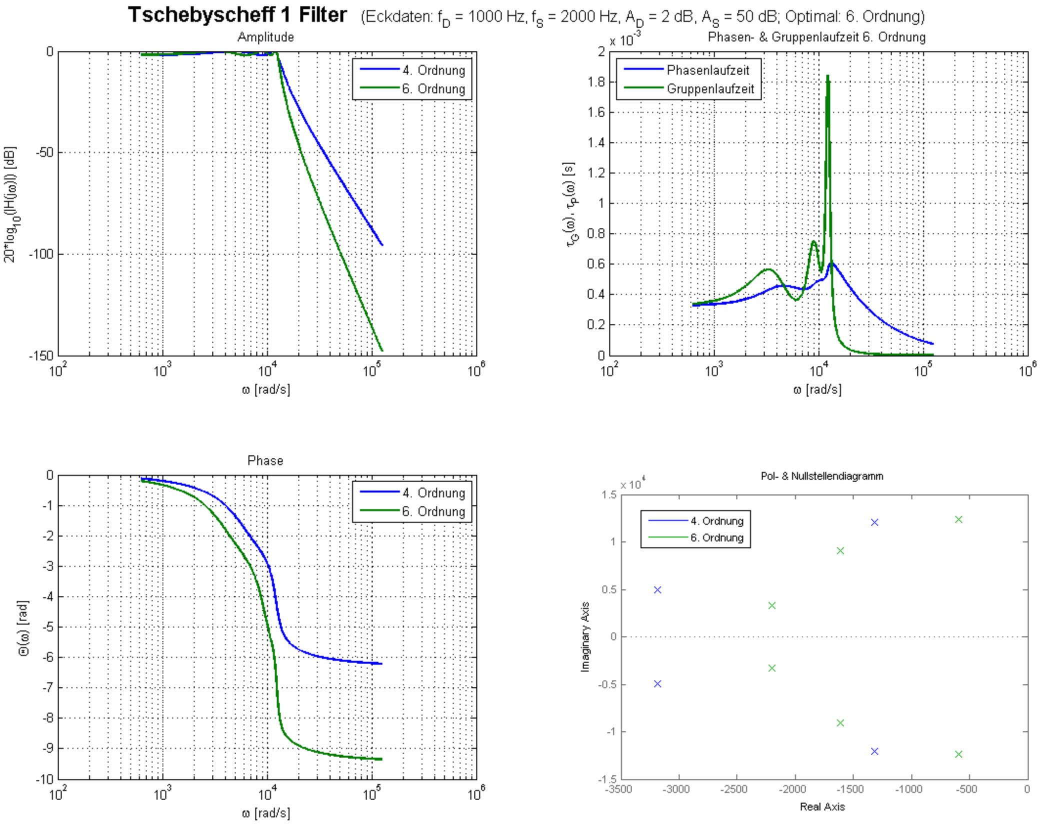
4.4 Vergleich der Approximationsarten S331-341



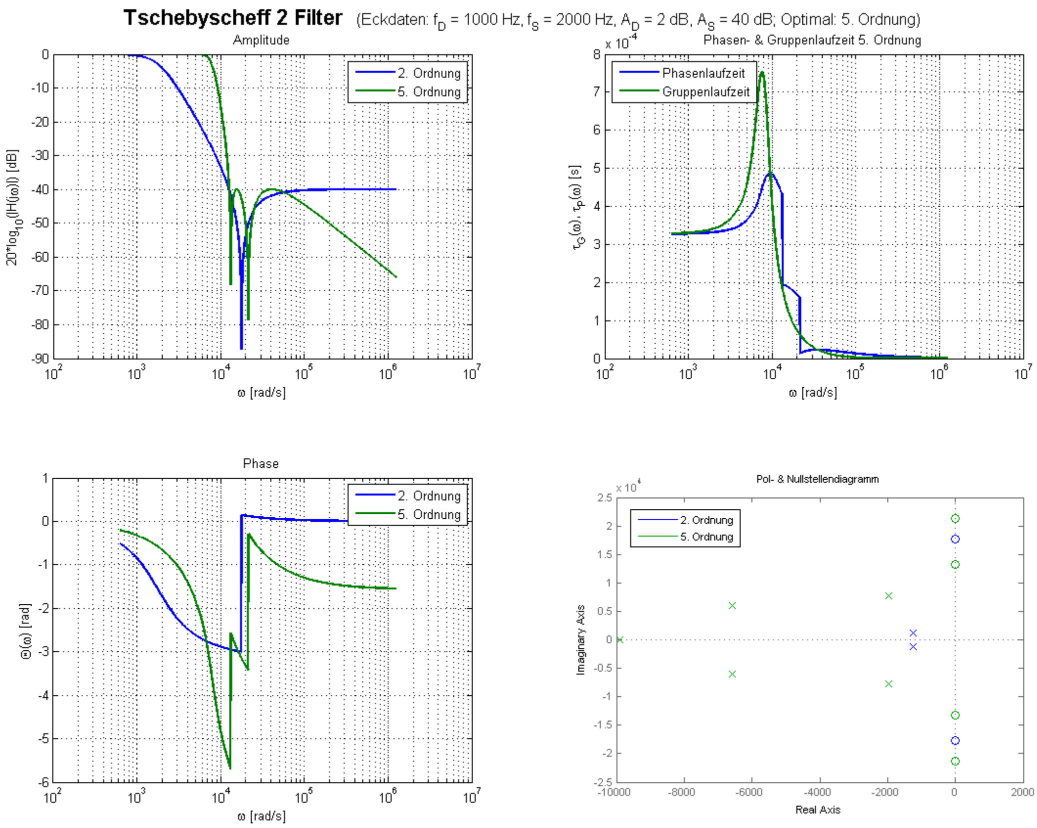
Butterworth-Filter mit UTF $H(s) = \frac{1.003e022}{s^5+8.133e004s^4+3.307e009s^3+8.312e013s^2+1.291e018s+1.003e022}$



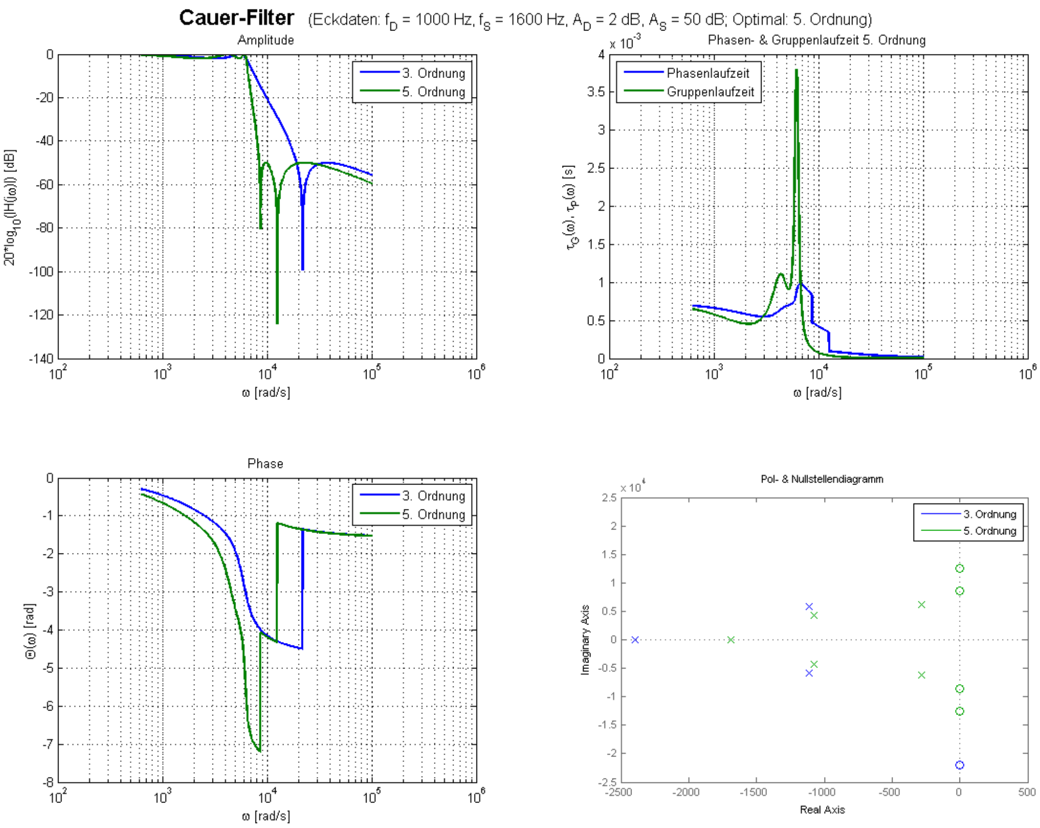
Kritisch gedämpftes Filter mit UTF $H(s) = \frac{1}{2.724e-013s^3+1.261e-008s^2+0.0001945s+1}$



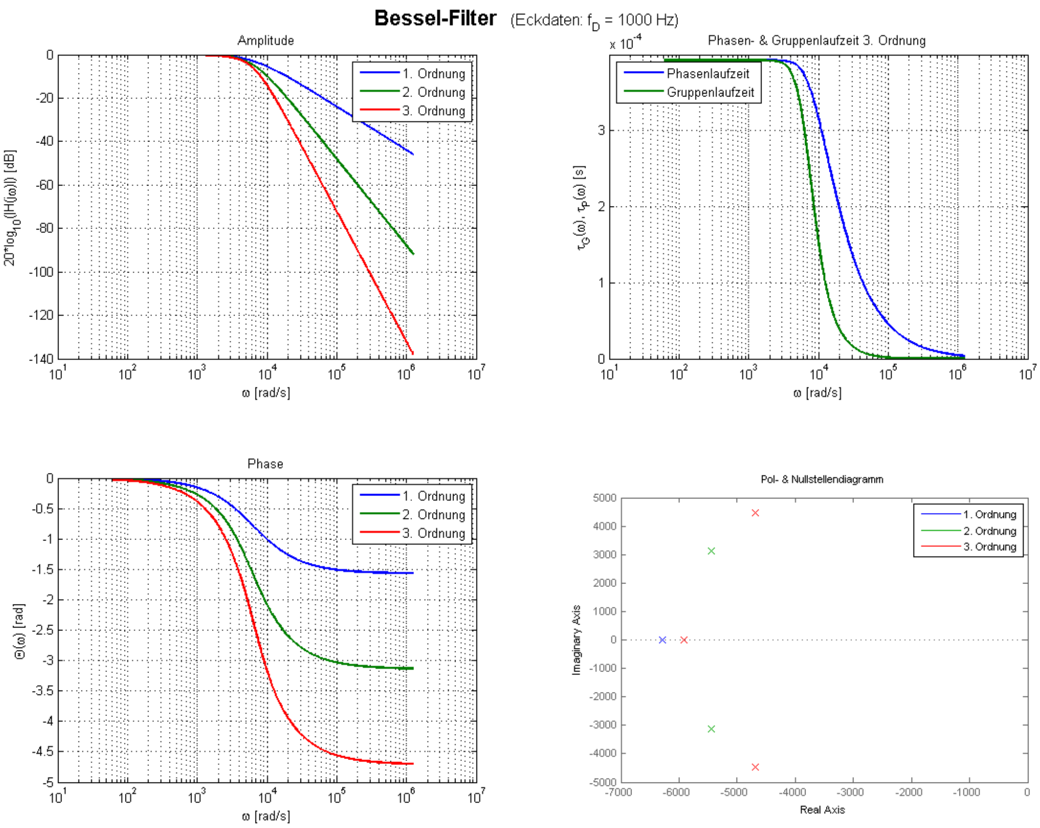
Tschebyscheff-I-Filter mit UTF $H(s) = \frac{1.609e023}{s^6+8812s^5+2.757e008s^4+1.721e012s^3+1.924e016s^2+6.589e019s+2.026e023}$



Tschebyscheff-II-Filter mit UTF $H(s) = \frac{628.3s^4+1.081e-009s^3+3.969e011s^2+1.975s+5.014e019}{s^5+2.701e004s^4+3.645e008s^3+3.076e012s^2+1.639e016s+5.014e019}$



$$\text{Cauer-Filter mit UTF } H(s) = \frac{108.8s^4 - 6.596e{-}010s^3 + 2.538e010s^2 - 0.08009s + 1.29e018}{s^5 + 4398s^4 + 6.408e007s^3 + 1.939e011s^2 + 9.227e014s + 1.29e018}$$



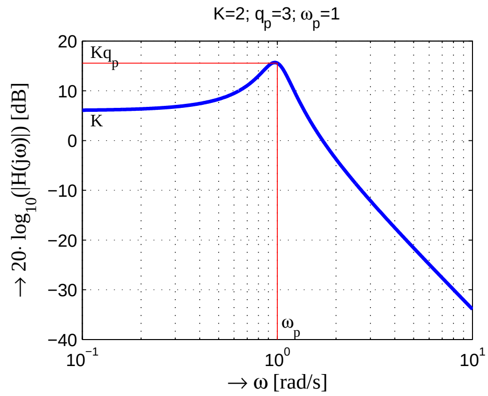
$$\text{Bessel-Filter mit UTF } H(s) = \frac{2.481e011}{s^3 + 1.529e004s^2 + 9.736e007s + 2.481e011}$$

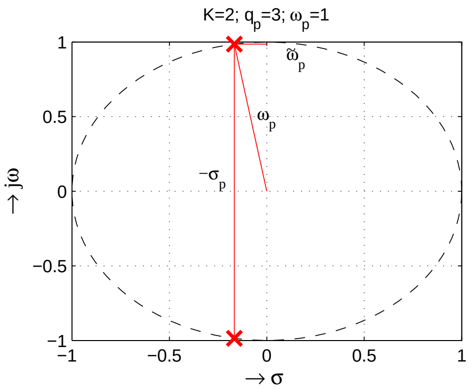
4.4.3 Bode-Diagramm und Pol- Nullstellenverteilung von verschiedenen UTF 2. Ordnung

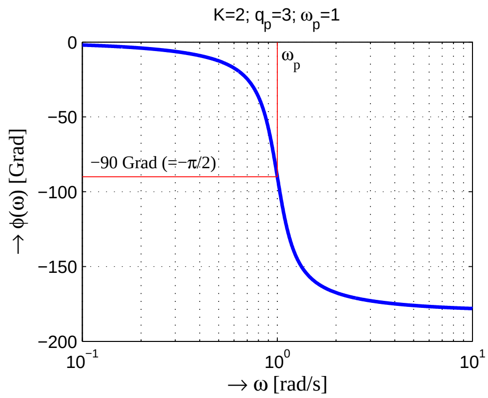
Für alle Beispiele a) bis f) gilt: $2\sigma_p = \frac{\omega_p}{q_p}$ (Formel 4.17), wobei $|q_p| > \frac{1}{2}$ sein muss, damit die Pole konjugiert-komplex sind.

a) **Tiefpass**

$H(s) = \frac{K \cdot \omega_p^2}{s^2 + 2\sigma_p s + \omega_p^2}$

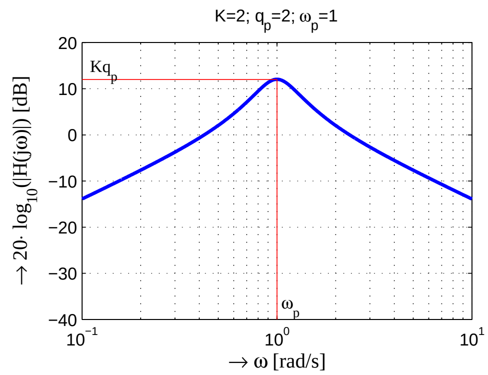


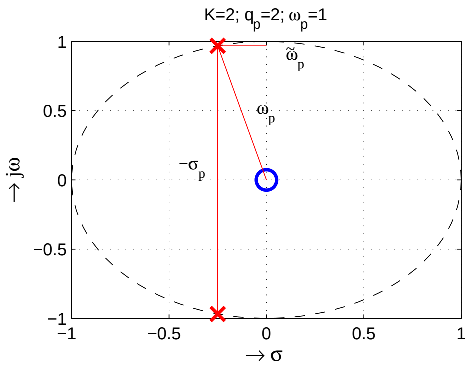


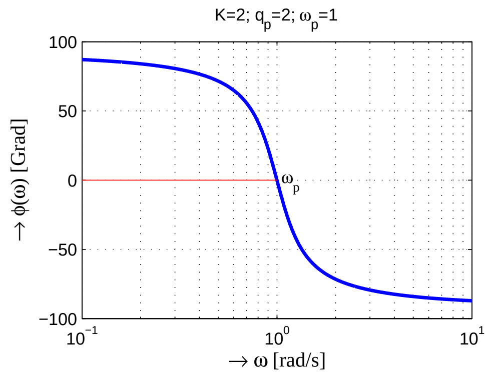


b) **Bandpass**

$H(s) = \frac{K \cdot \omega_p \cdot s}{s^2 + 2\sigma_p s + \omega_p^2}$

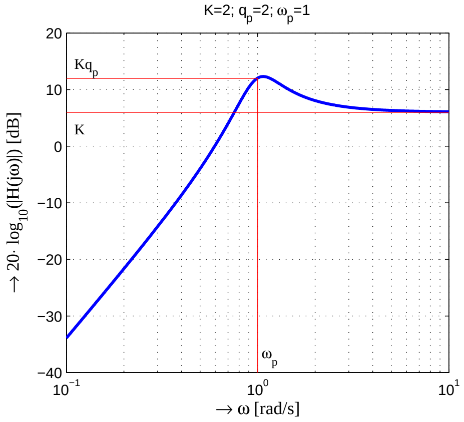


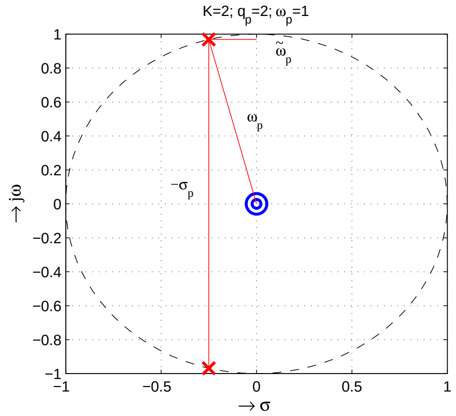


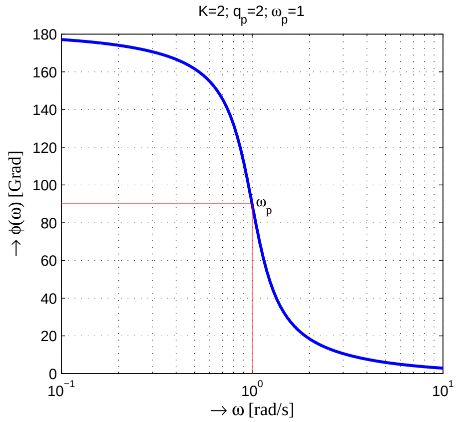


c) **Hochpass**

$$H(s) = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + 2\sigma_p s + \omega_p^2}$$

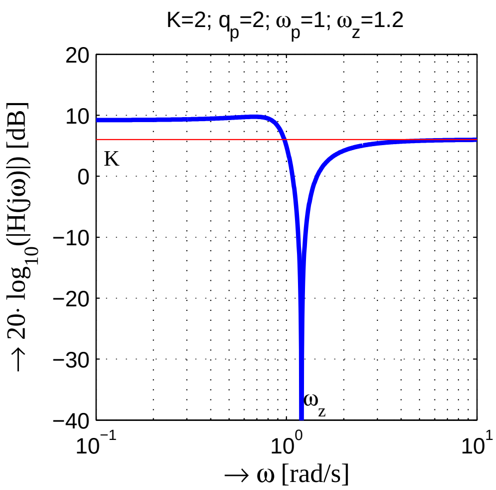


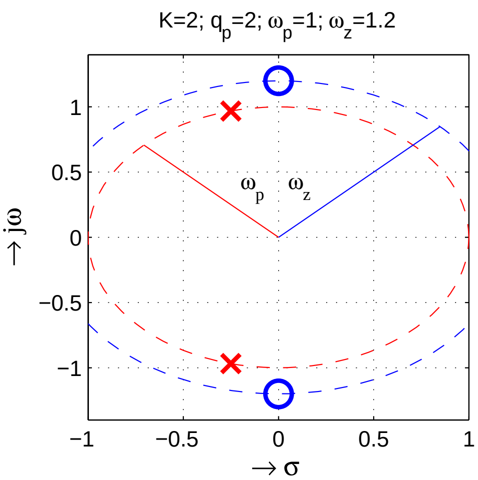


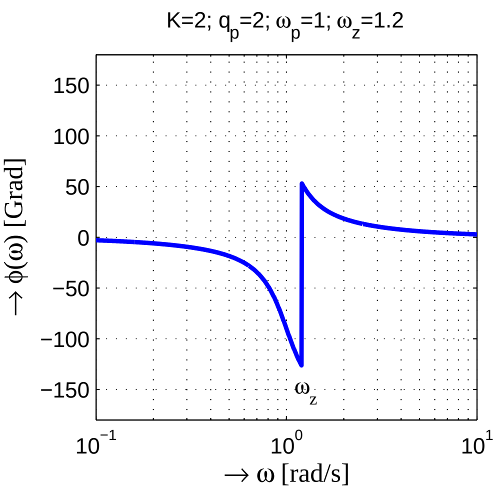


d) **Tiefpass mit endlichen Nullstellen**

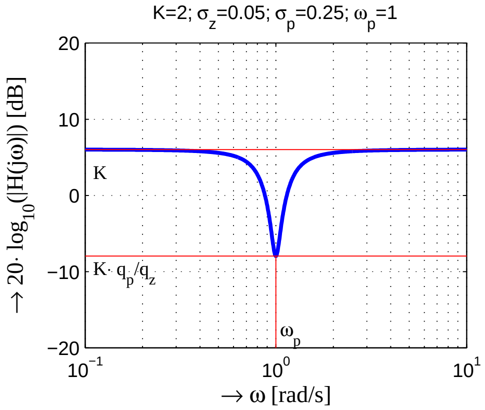
$$H(s) = \frac{K \cdot (s^2 + \omega_z^2)}{s^2 + 2\sigma_p s + \omega_p^2} \text{ mit } \omega_z > \omega_p$$

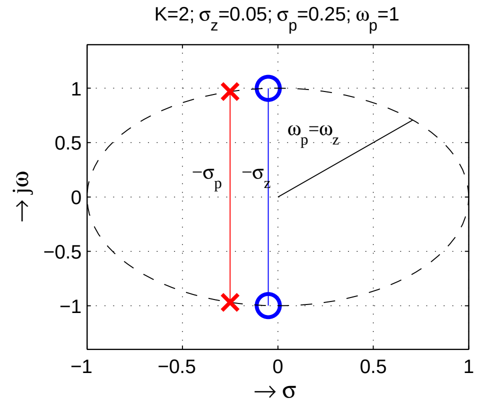


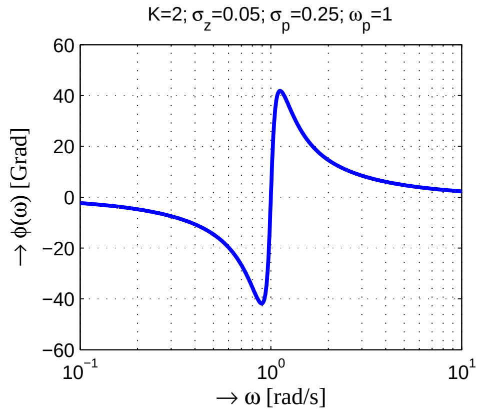




e) **FRN**
(**frequency rejection network**, **Notch**)
$H(s) = K\frac{s^2+2\sigma_z s+\omega_p^2}{s^2+2\sigma_p s+\omega_p^2}$
mit $\sigma_p > \sigma_z$ (dominates Nullstellenpaar)







f) **FEN**
(**frequency emphasizing network**)
$H(s) = K\frac{s^2+2\sigma_z s+\omega_p^2}{s^2+2\sigma_p s+\omega_p^2}$
mit $\sigma_p < \sigma_z$ (dominates Polpaar)