Signale und Systeme HS2012/FS2013

Tabea Méndez

HSR Hochschule für Technik Rapperswil
Elektrotechnik

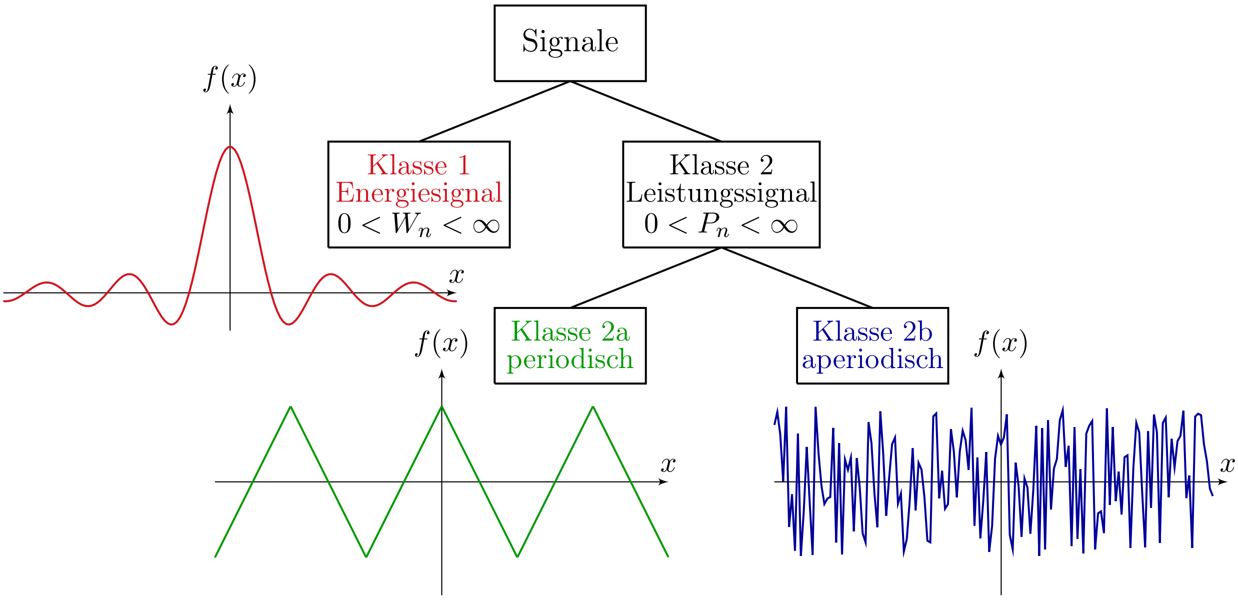
Rapperswil, 26. August 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Signalbeschreibung

Signalbeschreibung ist eine abstrakte Beschreibung einer (veränderlichen) Grösse.

1.1 Signalklassen



Signale können klassiert werden in:

wert-/zeitkontinuierlich	$\Leftrightarrow$	wert-/zeitdiskret
periodisch	$\Leftrightarrow$	aperiodisch
deterministisch	$\Leftrightarrow$	stochastisch
kausal	$\Leftrightarrow$	akausal
Energiesignal	$\Leftrightarrow$	Leistungssignal
analog	$\Leftrightarrow$	digital (zeitdiskret & wertdiskret)
reell	$\Leftrightarrow$	komplex
eindimensional	$\Leftrightarrow$	mehrdimensional

oder mehr von **praktischen Bedeutung** in:

Nachrichtensignal:	- Trägt Information - nicht deterministisch
Hilfssignal:	- Für das Funktionieren eines Übertragungssystems - meist periodisch
Störsignal:	- Beeinträchtigt Information (unerwünscht) - deterministisch oder stochastisch (z.B. Rauschen)

1.2 Signale im Zeitbereich

Kenngrösse	Formel	Bemerkung
E_n / W_n: normierte Signalenergie	$W_n = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \lvert f(t)\rvert^2\, dt$	
P_n: normierte Signalleistung	$P_n = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \lvert f(t)\rvert^2\, dt$	
X_0 / $\overline{X}$: linearer Mittelwert	$X_0 = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt$	• Für Signale der Klasse 2a
X^2: quadratischer Mittelwert	$X^2 = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\, dt$	• Für Signale der Klasse 2a • Leistung des Signals • Mean Square
X_{eff}: Effektivwert	$X_{eff} = \sqrt{X^2}$	• RMS: Root Mean Square • Mass für Leistung
X^n: Mittelwert n-ter Ordnung	$X^n = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x^n(t)\, dt$	• Für Signale der Klasse 2a
$Var(x)$: Varianz	$Var(x) = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} (x(t) - X_0)^2\, dt$	• Mittlere Quadratische Abweichung vom Mittelwert • 1. zentrales Moment
σ: Standardabweichung	$\sigma = \sqrt{Var(x)}$	
Zusammenhang $Var(x)$, X^2, X_0	$Var(x) = \sigma^2 = X^2 - (X_0)^2$	

Für **Signale der Klasse 2b (aperiodische Leistungssignale)** lassen sich Mittelwerte usw. im Allgemeinen mit dem **Übergang** $\lim\limits_{T\to\infty}$ **aus den Ausdrücken für die Signale der Klasse 2a** berechnen!

1.2.1 Autokorrelationsfunktion (AKF)

Die **Autokorrelation** ist ein Mass für die **Kohärenz** eines Signals (Ähnlichkeit des Signals zu sich selbst):
⇒ "Wie weit hängen zeitlich verschobene Signalteile zusammen?"

Definition für periodische **Leistungssignale** (Klasse 2a):

$$\boxed{\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t-\tau)\, dt = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau) \cdot x(t)\, dt = \varphi_{xx}(-\tau)}$$

⇒ für aperiodische Leistungssignale (Klasse 2b):
$\varphi_{xx}(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \ldots$

Definition für **Energiesignale** (Klasse 1):

$$\boxed{\varphi_{xx}(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t-\tau)\, dt = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau) \cdot x(t)\, dt = \varphi_{xx}(-\tau)}$$

Eigenschaften der Autokorrelation

- Erweiterung des Quadratischen Mittelwertes: $\varphi_{xx}(0) = X^2$
- periodisch mit gleicher Periode wie das Signal: $\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau \pm mT)$
- gerade Funktion: $\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(-\tau)$
- Hat bei $\varphi_{xx}(0)$ den grössten Wert: $\varphi_{xx}(0) \geq \lvert\varphi_{xx}(\tau)\rvert$
- $\varphi_{xx}(\tau) \geq (X_0)^2 - \sigma^2$

1.2.2 Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)

Die **Kreuzkorrelation** ist ein Mass für die **Ähnlichkeit von zwei verschiedenen Signalen**.

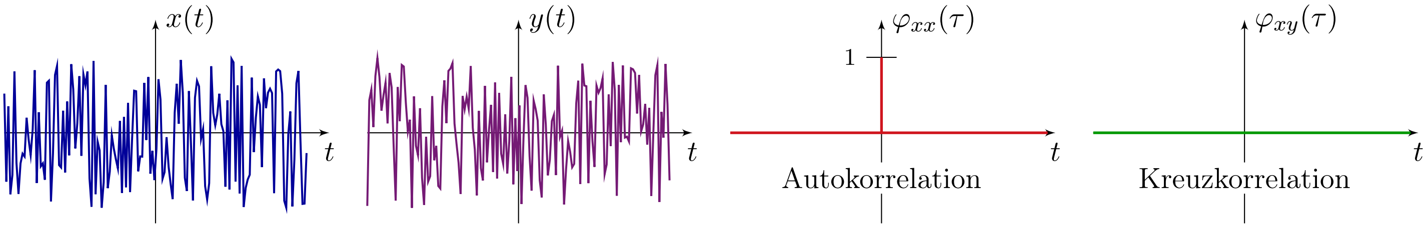
Definition für periodische **Leistungssignale** (Klasse 2a):

$$\boxed{\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot y(t-\tau)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\cdot y(t)\,dt}$$

$\Rightarrow$ für aperiodische Leistungssignale (Klasse 2b):
$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \ldots$

Definition für **Energiesignale** (Klasse 1):

$$\boxed{\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot y(t-\tau)\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\cdot y(t)\,dt}$$

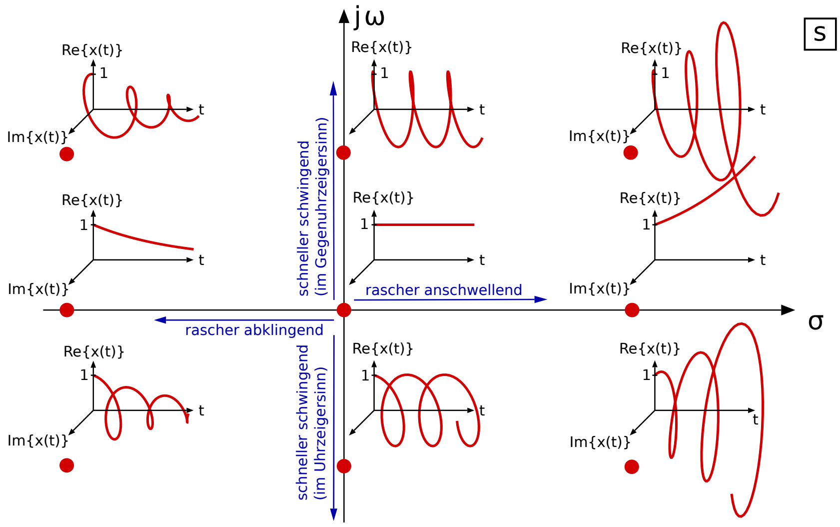


1.2.3 Komplexe Frequenzen

Erweiterung der sinusförmigen Schwingungen mit komplexen Grössen
$\Rightarrow$ $\boxed{x(t) = \hat{x}\cdot e^{st}}$ mit $s = \sigma + j\omega$

$$x(t) = \hat{x}\cdot e^{st} = \hat{x}\cdot e^{(\sigma+j\omega)t}$$
$$= \underbrace{\hat{x}\cdot e^{\sigma t}}_{A(t)}\cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{konst. Drehung}}$$
$$= \underline{\underline{\hat{x}\cdot e^{\sigma t}\cdot cos(\omega t) + j\cdot\hat{x}\cdot e^{\sigma t}\cdot sin(\omega t)}}$$

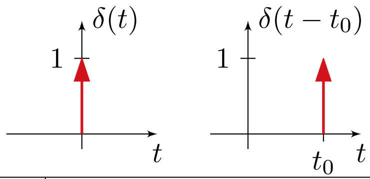
σ = Dämpfung $\qquad \omega$ = Kreisfrequenz



1.2.4 Impulsfunktion $\delta(t)$

Die Impulsfunktion $\delta(t)$ ist keine Funktion im eigentlichen Sinne, jedoch gibt es Regeln, so dass man mit $\delta(t)$ wie mit einer Funktion arbeiten kann.
Sie wird auch **Dirac-Impuls** oder **Delta-Impuls** genannt und ist eine **zentrale Testfunktion!**

$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases}\infty & t = 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}} \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt = 1}$$



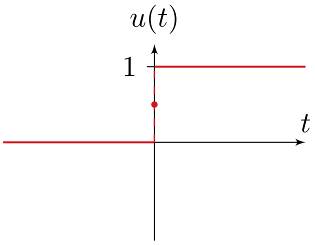
Siebungseigenschaft von $\delta(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\cdot f(t)\,dt = f(t_0)$
Zusammenhang Einheitssprung $u(t)$ **und** $\delta(t)$	$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ bzw. $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau = u(t)$

weitere Eigenschaften des Dirac-Impuls $\delta(t)$**:**

$\delta(t) = \delta(-t)$	gerade "Funktion"	$\delta(t-t_0) * f(t) = f(t-t_0)$	Faltung
$\delta(t-t_0) = \delta(-t+t_0)$	symmetrisch	$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$	Faltung
$\delta(a\,t) = \frac{1}{\lvert a\rvert}\delta(t)$	Skalierung	$\delta(t-t_0)\,f(t) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$	Abtastung
$\delta(\frac{t-t_0}{a}) = \lvert a\rvert\,\delta(t-t_0)$	Skalierung und Verschiebung	$\delta(t) = \lim_{\omega\to\infty}\frac{\sin(\omega t)}{\pi t}$	Definition

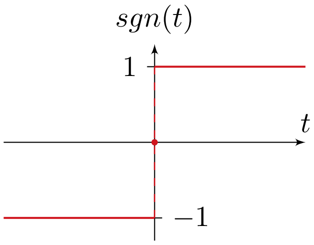
1.2.5 Grundlegende Funktionen

Sprungfunktion



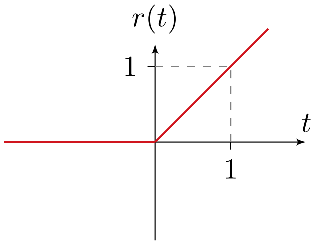
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Signumfunktion



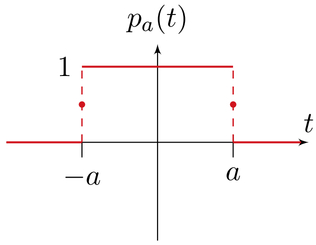
$$sgn(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Rampenfunktion



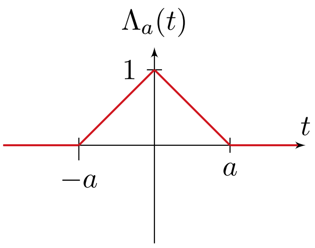
$$r(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$$

Rechteckimpuls



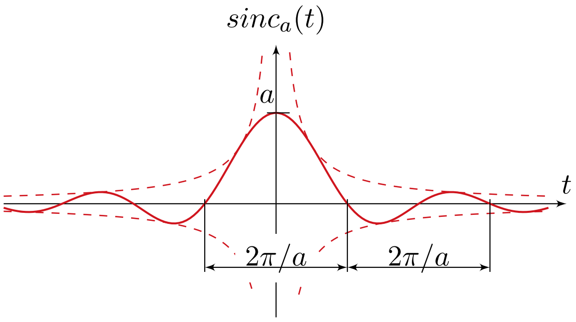
$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ \frac{1}{2} & |t| = a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

Dreieckimpuls



$$\Lambda_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & t < a \\ 0 & |t| \geq a \end{cases}$$

Sincfunktion



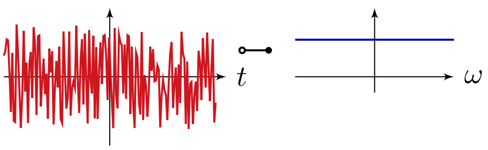
$$sinc_a(t) = \frac{\sin(a\,t)}{t} \qquad sinc(a\,t) = \frac{\sin(a\,t)}{a\,t}$$

1.2.6 Signalmanipulation

	Spiegeln	Strecken um Faktor a	Stauchen um Faktor a	Verschieben um c nach Rechts/oben	Verschieben um c nach Links/unten
x-Achse (Abszisse)	$-f(x)$	$f\left(\frac{1}{a} \cdot x\right)$	$f(a \cdot x)$	$f(x - c)$	$f(x + c)$
y-Achse (Ordinate)	$f(-x)$	$a \cdot f(x)$	$\frac{1}{a} \cdot f(x)$	$f(x) + c$	$f(x) - c$

1.2.7 Rauschen

Weises Rauschen ist gleichverteilt, über alle Frequenzen.



Rauschleistung, Rauschspannung:

Thermisch bedingte Rauschspannung von Widerständen:

effektive Rauschleistung: $\boxed{P_r = k \cdot T \cdot \Delta f}$

effektive Rauschspannung: $\boxed{U_r = \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot \Delta f \cdot R}}$

- Bolzmann-Konstante: $k = 1.380662 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$
- absolute Temperatur T in Kelvin! ($0°C = 273,15K$)
- Bandbreite Δf

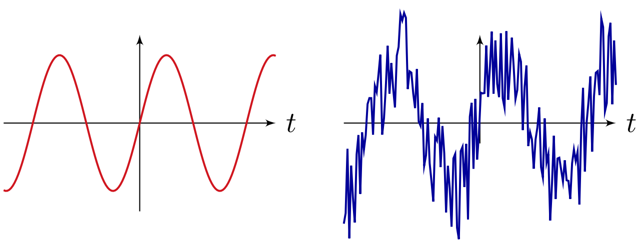
Signal-Rausch-Verhältnis (SNR):

Zur Qualitätsbewertung von Signalen wird das Verhältnis zwischen der Leistung des Nutzsignales P_s und der des Rauschsignales P_r gebildet:

$$\boxed{a_r = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_s}{P_r}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_s}{U_r}\right)}$$

Auch Stör-oder Rauschabstand gennant.

Rauschfreie Übertragung für
- Musik und Sprache: $a_r \geq 30dB$
- Bilder: $a_r \geq 40dB$

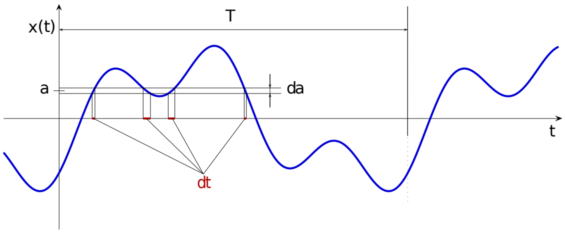


1.3 Amplidutenanalyse vom Signalen

1.3.1 Amplitudendichte

Relative Zeit, während der sich ein Signal in einem bestimmten Amplitudenintervall aufhält:

$$\boxed{\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Zeit}}{\text{Gesammtzeit}}}$$



$$p(a) = \lim_{da \to 0} \frac{\underbrace{\sum t\left(a - \frac{da}{2} < x(t) \le a + \frac{da}{2}\right)}_{dt}}{T \cdot da} = \frac{1}{T} \cdot \frac{dt}{da}$$

Eigenschaften der Amplitudendichte:

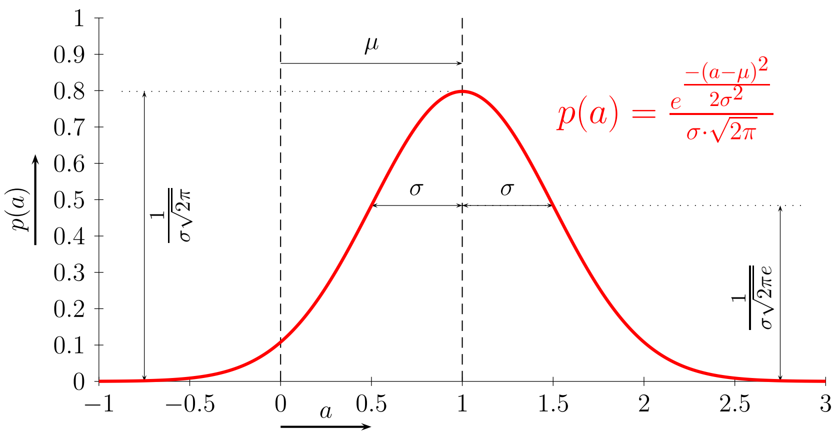
Wertebereich:	$0 \le p(a) \le 1 \qquad \forall a$
Gesammtwahrscheinlichkeit:	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(a)\, da = 1$
Wahrscheinlichkeit $a_1 < a < a_2$:	$P(a_1 < a < a_2) = \int\limits_{a_1}^{a_2} p(a)\, da$
X_0: linearer Mittelwert	$X_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a \cdot p(a)\, da$
X^n: Mittelwert $n - ter$ Ordnung	$X^n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^n \cdot p(a)\, da$
$Var(x)$: Varianz von $x(t)$	$Var(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (a - X_0)^2 \cdot p(a)\, da$

1.3.2 Stochastische Signale

Stochastische Signale sind schwach stationär (Linearer Mittelwert x_0 und Autokorrelation $\varphi_{xx}(t)$ hängen nicht von der Zeit t ab) und können nur durch **Wahrscheinlichkeitsverteilungen** beschrieben werden.

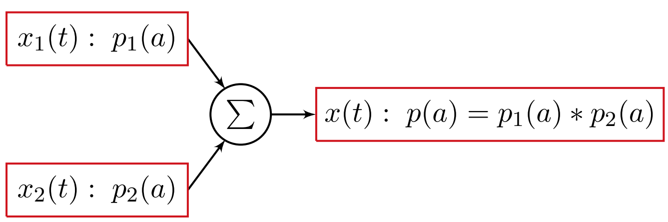
1.3.2.1 Gauss-Verteilung, Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$

$$\boxed{p(a) = N(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \qquad \boxed{\mu = X_0 \qquad \sigma = \sqrt{Var(X)}} \qquad \boxed{p(a \le \alpha) = Q\left(\frac{\mu - \alpha}{\sigma}\right)}$$



1.3.3 Addition von zwei stochastischen Signalen

Die Addition von zwei **unabhängigen Signalen** entspricht der Faltung ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilungen.



Zentraler Grenzwertsatz

Werden n unabhängige Amplitudendichten $p_i(a)$ miteinander gefaltet dann geht die resultierende Amplitudendichte $p(a) = p_1(a) * p_2(a) * ...p_n(a)$ für $n \to \infty$ gegen die Normalverteilung.

$$\boxed{N(\mu_1, \sigma_1) * N(\mu_2, \sigma_2) = N\left(\underbrace{\mu_1 + \mu_2}_{\mu}, \underbrace{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}_{\sigma}\right)}$$

1.3.3.1 Q-Funktion

Q-Funktion:

$$\boxed{Q(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\xi}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} \, dy}$$

$$Q(\xi) = 1 - Q(-\xi) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Fehlerfunktion:

$$\boxed{erf(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\xi} e^{-y^2} \, dy}$$

komplementäre Fehlerfunktion:

$$\boxed{erfc(\xi) = 1 - erf(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\xi}^{\infty} e^{-y^2} \, dy}$$

2 Frequenzanalyse

2.1 Fourier-Reihen periodischer Funktionen

Idee:
$T-$**Periodische Funktionen** durch Aufsummieren ebenfalls periodischer Basisfunktionen (sin, cos) zu approximieren.

Frequenz: $f = \frac{1}{T}$	Kreisfrequenz: $\omega_f = 2\pi f$	Periodendauer: $T = \frac{2\pi}{\omega_f}$	Nullphasenwinkel: φ

2.1.1 Darstellung mit Sinus- und Cosinusschwingungen

Die Funktion $f(t)$ soll durch folgende Linearkombination dargestellt werden:

$$\boxed{\mathrm{FR}[f(t)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\omega_f t) + b_n \cdot \sin(n\omega_f t)\right]}$$

Berechnung von a_0, a_n und b_n (Fourierkoeffizienten):

$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t)\,dt$	$n = 0$
$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega_f t)\,dt$	$n = 0, 1, 2, \dots$
$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega_f t)\,dt$	$n = 1, 2, 3, \dots$

Orthogonalitätsbeziehungen:

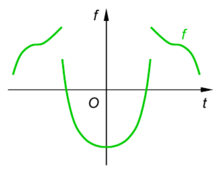
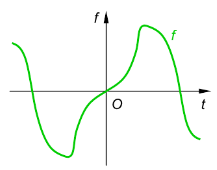
$$\int_0^T \cos(m\omega_f t) \cdot \cos(n\omega_f t)\,dt = \begin{cases} T & \text{für: } m = n = 0 \\ \frac{T}{2} & \text{für: } m = n > 0 \\ 0 & \text{für: } m \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(m\omega_f t) \cdot \sin(n\omega_f t)\,dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \text{für: } m = n \\ 0 & \text{für: } m \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(m\omega_f t) \cdot \sin(n\omega_f t)\,dt = 0$$

2.1.2 Sätze zur Berechnung der Fourierkoeffizienten

2.1.2.1 Symmetrie

Gerade Funktion	Ungerade Funktion
	
achssymmetrisch $f(t) = f(-t)$	punktsymmetrisch $f(t) = -f(-t)$
Beispiel: cos	Beispiel: sin
$\int_0^T f(t)\,dt = 2\int_0^{T/2} f(t)\,dt$	$\int_0^T f(t)\,dt = 0$

Rechnen mit geraden und ungeraden Funktionen:

gerade	$\cdot$	gerade	$=$	gerade
ungerade	$\cdot$	ungerade	$=$	gerade
gerade	$\cdot$	ungerade	$=$	ungerade

Fourierkoeffizienten a_n, b_n:

$f(t)$	a_n, b_n
gerade	$b_n = 0\,;\quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega_f t)\,dt$
ungerade	$a_n = 0\,;\quad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega_f t)\,dt$

2.1.2.2 Linearität

$f(t)$, $g(t)$ und $h(t)$ sind T-periodische Funktionen.

Wenn gilt: $\boxed{h(t) = r \cdot f(t) + s \cdot g(t)} \Rightarrow \boxed{a_n^{(h)} = r \cdot a_n^{(f)} + s \cdot a_n^{(g)}}$, $\boxed{b_n^{(h)} = r \cdot b_n^{(f)} + s \cdot b_n^{(g)}}$ $\quad r, s \in \mathbb{R}$

2.1.2.3 Streckung / Stauchung

$f(t)$ ist eine T-periodische Funktionen und $g(t)$ eine $\frac{T}{r}$-periodische Funktion

$\Rightarrow \boxed{g(t) = f(r \cdot t)} \Rightarrow \boxed{a_n^{(g)} = a_n^{(f)}}$, $\boxed{b_n^{(g)} = b_n^{(f)}}$ $\quad 0 < r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \begin{cases} r < 1 \rightarrow \text{Streckung} \\ r > 1 \rightarrow \text{Stauchung} \end{cases}$ und $\boxed{\omega_g = \frac{2\pi r}{T} = \omega_f \cdot r}$

2.1.2.4 Verschiebung

$g(t)$ ist eine von $f(t)$ um t_0 verschobene T-periodische Funktion $\Rightarrow \begin{cases} f(t+t_0) \rightarrow \text{Verschiebung nach links} \\ f(t-t_0) \rightarrow \text{Verschiebung nach rechts} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{g(t) = f(t+t_0)} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{a_n^{(g)} = \cos(n\omega_f t_0) \cdot a_n^{(f)} + \sin(n\omega_f t_0) \cdot b_n^{(f)} \; ; \quad b_0 = 0} \\ \boxed{b_n^{(g)} = -\sin(n\omega_f t_0) \cdot a_n^{(f)} + \cos(n\omega_f t_0) \cdot b_n^{(f)}} \end{array}$$

2.1.3 Komplexe Darstellung der Fourierreihen

Ausgehend von den Eulerschen Formeln kann man die Fourierreihe mit Exponentialfunktionen anstelle von Winkelfunktionen formulieren: $\boxed{\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}}$ $\boxed{\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}}$

Komplexe Fourierreihe:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_f t}}$$

Komplexe Fourierkoeffizienten:

$$\boxed{c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega_f t} \, dt}$$

Umrechnungsformeln ($a_n, b_n \rightarrow c_n$):

$\boxed{c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}}$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ $(b_0 = 0)$

$\boxed{c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \overline{c_n}}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Umrechnungsformeln ($c_n \rightarrow a_n, b_n$):

$\boxed{a_n = 2\mathrm{Re}(c_n) = c_n + c_{-n}}$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$\boxed{b_n = -2\mathrm{Im}(c_n) = j(c_n - c_{-n})}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

2.1.3.1 Sätze zur Berechnung komplexer Fourierkoeffizienten

Symmetrie:

$f(t)$	c_k	$\arg(c_k)$
gerade	$\mathrm{Im}[c_k] = 0$;	$\arg(c_k) = 0$ oder π
ungerade	$\mathrm{Re}[c_k] = 0$;	$\arg(c_k) = \pm\frac{\pi}{2}$

Linearität:

Wenn gilt: $\boxed{h(t) = r \cdot f(t) + s \cdot g(t)}$

$\Rightarrow \boxed{c_k^{(h)} = r \cdot c_k^{(f)} + s \cdot c_k^{(g)}}$ $r, s \in \mathbb{R}$

Streckung / Stauchung:

Wenn gilt: $\boxed{g(t) = f(r \cdot t)}$ $0 < r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{c_k^{(g)} = c_k^{(f)}}$ und $\boxed{\omega_g = \frac{2\pi r}{T} = \omega_f \cdot r}$

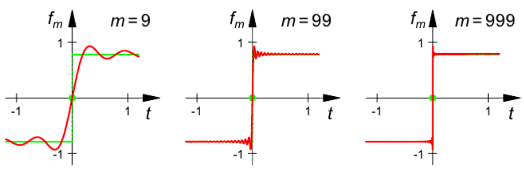
Verschiebung:

Wenn gilt: $\boxed{g(t) = f(t+t_0)}$

$\Rightarrow \boxed{c_k^{(g)} = e^{jk\omega_f t_0} \cdot c_k^{(f)}}$ $k \in \mathbb{Z}$

2.1.4 Gibbs-Phänomen

Gibbs'sches Phänomen:
"Über- und Unterschiessen" vor und nach einer Sprungstelle.
Höhe der grössten überschwingenden Welle:
Etwa 9% (8.94..%) der gesamten Sprunghöhe.
Anzahl Summanden $m \rightarrow \infty$:
Grösste überschwingende Welle $\approx 9\%$, **klingt aber schneller aus.**



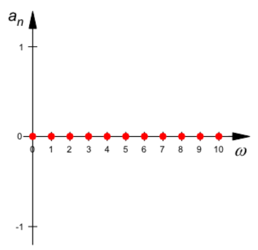
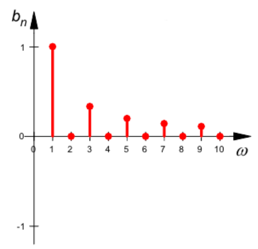
2.1.5 Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

- Funktion $f(t)$ ist T-periodisch und stückweise stetig mit Limes.
- Rechts- und linksseitige Ableitungen $\lim_{t \downarrow t_0} f'(t)$, $\lim_{t \uparrow t_0} f'(t)$ existieren.

$$\boxed{\mathrm{FR}[f(t_0)] \overset{n \to \infty}{\rightarrow} \frac{\lim_{t \downarrow t_0} f(t) + \lim_{t \uparrow t_0} f(t)}{2}}$$

2.1.6 Spektraldarstellungen

2.1.6.1 Einseitiges Kosinus- und Sinusamplitudendiagramm

Kosinus-Amplituden	Sinus-Amplituden
	

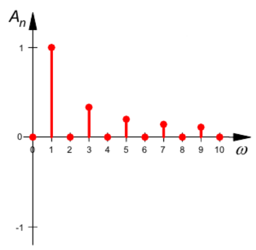
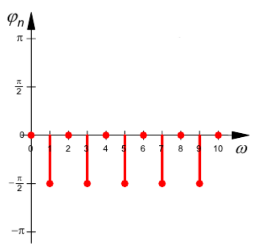
Werte der reellen Fourierkoeffizienten a_n und b_n werden als "Säulen" dargestellt.

Fourierreihe des abgebildeten Beispiels:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cdot \sin((2k-1) \cdot t)$$

Nachteil: Diagramme sind vom Ort des Nullpunktes auf der Zeitachse abhängig.

2.1.6.2 Einseitiges Amplituden-/Phasendiagramm

Amplituden	Phasen
	

Gleichfrequente Schwingungen werden zu phasenverschobenen Kosinusschwingungen zusammengefasst:

$$a_n \cos(n\omega_f t) + b_n \sin(n\omega_f t) = A_n \cos(n\omega_f t + \varphi_n)$$

$$\boxed{A_n = |a_n - \mathrm{j} b_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \qquad \boxed{\varphi_n = \arg(a_n - \mathrm{j} b_n)}$$

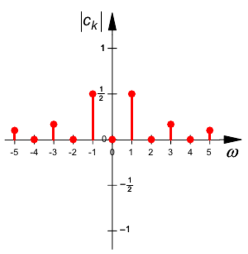
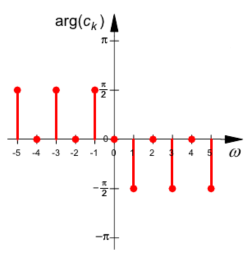
$$\boxed{A_0 = \left|\frac{a_0}{2}\right|} \qquad \boxed{\varphi_0 = \begin{cases} 0, & a_0 \geq 0 \\ \pi, & a_0 < 0 \end{cases}}$$

2.1.6.3 Zweiseitiges Kosinus- und Sinusamplitudendiagramm

Gleich wie Einseitiges Kosinus- und Sinusamplitudendiagramm jedoch nur halb so grosse Amplituden.

$$\boxed{a_{\pm k} = \frac{a_n}{2}} \qquad \boxed{b_{\pm k} = \frac{b_n}{2}}$$

2.1.6.4 Zweiseitiges Amplituden-/Phasendiagramm (komplexes Spektrum)

Amplituden	Phasen
	

Polarkoordinaten der komplexen Fourierkoeffizienten c_k werden in zwei Diagrammen dargestellt:

$$\boxed{\text{Amplitude} = |c_k|} \qquad \boxed{\text{Phase} = \arg(c_k)}$$

Amplituden $\rightarrow$ Achssymmetrisch $\boxed{|c_n| = |c_{-n}|}$

Phasen $\rightarrow$ Punktsymmetrisch $\boxed{\arg(c_n) = -\arg(c_{-n})}$

Verknüpfung zum Einseitigen Amplituden-/Phasendiagramm: für $k \geq 0$ gilt:

$$\boxed{A_n = 2|c_n| = 2|c_k|} \qquad \boxed{\varphi_n = \arg(c_n) = \arg(c_k)}$$

2.1.7 Leistung

Quadratischer Mittelwert (Leistung):

$$\boxed{X^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{2}}$$

2.2 Fourier-Integral - Fourier-Transformation

Idee: Kontinuierliche, aperiodische Signale in ein kontinuierliches Spektrum zerlegen.

$$\boxed{\text{Zeitfunktion} \quad f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\mathrm{j}\omega) \quad \text{Spektralfunktion}}$$

2.2.1 Definition

Fourier-Transformation:

$$\boxed{F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,dt}$$

Fourier-Rücktransformation:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,d\omega}$$

2.2.2 Bandbreitentheorem und Konvergenzgeschwindigkeit

Bandbreitentheorem: $\boxed{\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \gamma}$

Konvergenzgeschwindigkeit: Je glatter $f(t)$, desto schneller fällt $F(\mathrm{j}\omega)$ ab.

	Konvergenzgeschwindigkeit $\rightarrow$			
$f(t)$	1	$\Lambda_a(t)$	$p_a(t)$	$\delta(t)$
$\circ\!\!-\!\!\bullet$				
$F(\mathrm{j}\omega)$	$2\pi\delta(\mathrm{j}\omega)$	$\frac{4}{a}\frac{(\sin(a\omega/2))^2}{\omega^2}$	$2\frac{\sin(a\omega)}{\omega}$	1
	$\leftarrow$ Konvergenzgeschwindigkeit			

2.2.3 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Zeitbereich	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Frequenzbereich
$f(t)$ gerade	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\mathrm{j}\omega)$ gerade
$f(t)$ reell und gerade	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\mathrm{j}\omega)$ reell und gerade
$f(t)$ imaginär und gerade	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\mathrm{j}\omega)$ imaginär und gerade
$f(t)$ ungerade	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\mathrm{j}\omega)$ ungerade
$f(t)$ reell und ungerade	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\mathrm{j}\omega)$ imaginär und ungerade
$f(t)$ imaginär und ungerade	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\mathrm{j}\omega)$ reell und ungerade
$f(t)$ (zeit)kontinuierlich	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\mathrm{j}\omega)$ nicht periodisch
$f(t)$ (zeit)diskret	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\mathrm{j}\omega)$ periodisch
$f(t)$ periodisch	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\mathrm{j}\omega)$ (frequenz)diskret
$f(t)$ nicht periodisch	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\mathrm{j}\omega)$ (frequenz)kontinuierlich

Linearität:

$$\boxed{\alpha\, f(t) + \beta\, g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha\, F(\mathrm{j}\omega) + \beta\, G(\mathrm{j}\omega)} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Ähnlichkeit:

$$\boxed{f(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|\alpha|}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\alpha}\right)} \qquad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Verschiebung im Zeitbereich:

$$\boxed{f(t \pm t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t_0}}$$

Verschiebung im Frequenzbereich:

$$\boxed{f(t)\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet F(\mathrm{j}(\omega \mp \omega_0))}$$

Vertauschungssatz(Dualität):

$$\boxed{f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\mathrm{j}\omega)}$$

$$\boxed{F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi\, f(-\mathrm{j}\omega)}$$

Modulationssatz

$$\boxed{f(t)\cos(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{1}{2}\left[F(\mathrm{j}(\omega-\alpha)) + F(\mathrm{j}(\omega+\alpha))\right]}$$

$$\boxed{f(t)\sin(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{1}{2\mathrm{j}}\left[F(\mathrm{j}(\omega-\alpha)) - F(\mathrm{j}(\omega+\alpha))\right]}$$

Ableitung im Zeitbereich:

$$\boxed{\frac{d^n f(t)}{dt^n} \circ\!\!-\!\!\bullet (\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

Ableitung im Frequenzbereich:

$$\boxed{t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{j}^n \frac{d^n F(\mathrm{j}\omega)}{d\omega^n}} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

Integration im Zeitbereich:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega} + F(\mathrm{j}0)\,\pi\,\delta(\omega)}$$

Anfangswerte:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\,d\omega \qquad F(\mathrm{j}0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

Faltung im Zeitbereich

$$\boxed{f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet F(\mathrm{j}\omega)\cdot G(\mathrm{j}\omega)}$$

Faltung im Frequenzbereich

$$\boxed{f(t)\cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega) * G(\mathrm{j}\omega)}$$

Unendlich lange Folge von Dirac-Impulsen im Zeit und Frequenzbereich

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\cdot t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{t_0}\,\delta\left(\omega - n\cdot\frac{2\pi}{t_0}\right)}$$

Parseval's Theorem

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g^*(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\,G^*(\mathrm{j}\omega)\,d\omega} \quad \Rightarrow$$

Bessel's Theorem

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\mathrm{j}\omega)|^2\,d\omega}$$

2.2.4 Existenz des Fourier-Integrals

Die Fourier-Transformation von $f(t)$ und die inverse Fourier-Transformation existieren wenn:

• $\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert\,dt < \infty$	$\Rightarrow$	$f(t)$ fouriertransformierbar
• $\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(j\omega)\rvert\,d\omega < \infty$	$\Rightarrow$	$f(t)$ fouriertransformierbar
• $f(t)$ eine Linearkombination von absolut integrierbaren Funktionen $f_i(t)$ und von inversen Fourier-Transformationen von $F_j(j\omega)$ die selber absolut integrierbar sind, ist.	$\Rightarrow$	$f(t)$ fouriertransformierbar

2.3 Leistungs-/Energiedichtespektrum

2.3.1 Leistungsdichtespektrum

Leistungsdichtespektrum: $\boxed{\Phi_{ff}(j\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|F(j\omega)|^2}{T}}$ **Kreuz-LDS** $\boxed{\Phi_{fg}(j\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{F(j\omega)G^*(j\omega)}{T}}$

normierte Leistung: $\boxed{P_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{ff}(j\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{|F(j\omega)|^2}{T}\right)d\omega}$

Eigenschaften des Leistungsdichtespektrum $\Phi(j\omega)$ ($x(t)$ ist reell und schwach-stationär):

- $\Phi(j\omega)$ ist reell
- $\Phi(j\omega) \geq 0$
- $\Phi(j\omega) = \Phi(-j\omega)$
- $\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{xx}(\tau)\,d\tau$

2.3.2 Energiedichtespektrum

Energiedichtespektrum: $\boxed{E_{ff}(j\omega) = |F(j\omega)|^2}$

normierte Energie: $\boxed{W_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E_{ff}(j\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2\,d\omega}$

2.3.3 Wiener-Chintchine Theorem

Für **Leistungssignale** gilt:

Autokorrelationsfunktion	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Leistungsdichtespektrum
$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\Phi_{xx}(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$

Kreuzkorrelationsfunktion	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Kreuzleistungsdichte
$\varphi_{xy}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\Phi_{xy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$

Für **Energiesignale** gilt:

Autokorrelationsfunktion	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Leistungsdichtespektrum
$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_{xx}(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$E_{xx}(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)_{xx}\,e^{-j\omega t}\,dt$

2.4 Laplace-Transformation

Idee: Kausale Signale ($f(t) = 0$ für $t < 0$) im Bildbereich (Spektraldarstellung) darstellen.

Zeitfunktion $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ Bildfunktion $\qquad s = \sigma + j\omega$

Mit dem Dämpfungsfaktor σ kann die Konvergenz von Signalen erzwungen werden.

2.4.1 Definition

Laplace-Transformation:

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Laplace-Rücktransformation:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

2.4.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Linearität:

$$\alpha\, f(t) + \beta\, g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha\, F(s) + \beta\, G(s) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Ähnlichkeit:

$$f(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \qquad 0 < \alpha \in \mathbb{R}$$

Verschiebung im Zeitbereich:

$$f(t \pm t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)\,e^{\pm s t_0}$$

Verschiebung im Frequenzbereich:

$$f(t)\,e^{\mp \alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet F(s \pm \alpha)$$

Ableitung im Zeitbereich

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \circ\!\!-\!\!\bullet (s)^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2}\frac{df(0^+)}{dt} - \ldots - \frac{d^{n-1} f(0^+)}{dt^{n-1}}$$

Ableitung im Frequenzbereich:

$$(-t)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{d^n F(s)}{ds^n} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

Multiplikation mit t:

$$t \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{-dF(s)}{ds}$$

Integration im Zeitbereich:

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{F(s)}{s}$$

Anfangswert:

$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$

wenn $\lim_{t\to 0} f(t)$ existiert.

Endwert:

$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$;

wenn $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existiert.

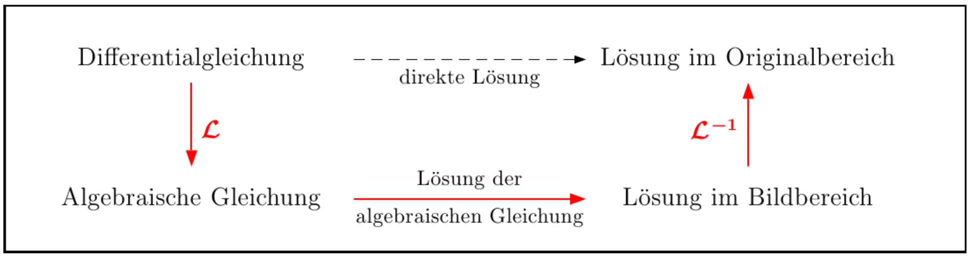
Faltung im Zeitbereich

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) \cdot G(s)$$

Faltung im Frequenzbereich

$$f(t) \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\xi)G(s-\xi)\,d = \frac{1}{2\pi j} F(s) * G(s)$$

2.4.3 Lösen von linearen Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation



2.5 Zusammenhang Fourier-/Laplace-Transformation

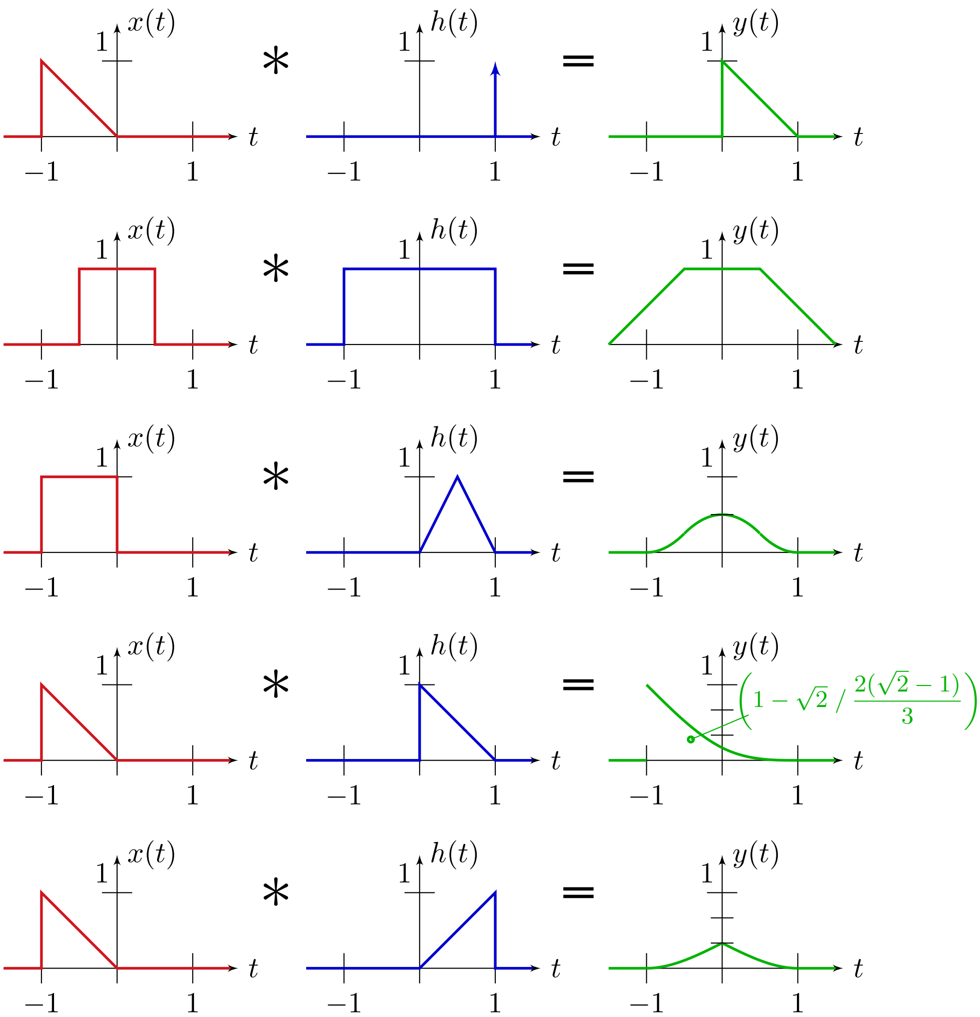
- Liegt die $j\omega$-Achse im Konvergenzbereich von $F(s)$, so kann s durch $j\omega$ ausgetauscht werden, um $F(j\omega)$ zu erhalten.
- Liegt die $j\omega$-Achse ausserhalb des Konvergenzbereichs von $F(s)$, so konvergiert die Fourier-Transformation $F(j\omega)$ nicht.
- Liegt die $j\omega$-Achse auf der Grenze des Konvergenzbereiches von $F(s)$, können die Fourier-Transformation $F(j\omega)$ und die Laplace-Transformation übereinstimmen, müssen aber nicht.

2.6 Faltung

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau}$$

Beginn der Faltungsfunktion: $\boxed{t_{Anfang\,y} = t_{Anfang\,x} + t_{Anfang\,h}}$

Ende der Faltungsfunktion: $\boxed{t_{Ende\,y} = t_{Ende\,x} + t_{Ende\,h}}$



3 Systembeschreibung

3.1 Begriffe

Begriff	**Beschreibung**	**Zusätzliche Bemerkungen**
Systen	Eindeutige Zuordnung von Ausgang (Wirkung) und Eingang (Ursache) $x(t) \rightarrow$ System $\rightarrow y(t)$	Übertragungswege (Leistungen), Filter, Verstärker SISO-, MIMO-, SIMO- und MISO-Systeme
Wirkungsfreiheit	Ausgang und Eingang des nachfolgenden Systems beeinflussen einander nicht	Hochohmiger Eingang und treibende Ausgangsstuffe
Statisch	System ohne Gedächtnis. Wert am Ausgang hängt nur von gegenwärtigen Werten am Eingang ab.	$y(t) = f\{x(t)\}\ \forall\, t$ z.B. Widerstandsnetzwerk
Dynamisch	System mit Gedächtnis Wert am Ausgang hängt von gegenwärtigen, und/oder vergangenen und/oder zukünftigen Werten am Eingang ab.	$y(t) = f\{x(t \pm t_0)\}$ $\int \dots dt\,;\ \frac{d}{dt}\dots\,;\ *$ ausser mit $\delta(t)$ RLC-Netzwerke
Kausal	Wert am Ausgang hängt von gegenwärtigen und/oder vergangenen Werten am Eingang ab.	$y(t) = f\{x(t - t_0)\}$ alle realen Systeme
Akausal	Wert am Ausgang hängt von zukünftigen und/oder gegenwärtigen und/oder vergangenen Werten am Eingang ab.	$y(t) = f\{x(t + t_0)\}$ Nur mit Programmen die "off-line" rechnen möglich.
Linear	Linearkombination am Eingang ruft entsprechende Linearkombination am Ausgang hervor. Nur Eingang $x(t)$ muss linear sein, variable Faktoren $f(t)$ nicht (z.B. $\sin(t)$)!	Superposition: $\boxed{\alpha\, x_a(t) + \beta\, x_b(t) \rightarrow \alpha\, y_a(t) + \beta\, y_b(t)}$ $\boxed{x(t) = 0 \rightarrow y(t) = 0}$ RLC-Netzwerke (lin. DGL mit konst. Koeff.)
Nicht Linear	Systeme die neue Frequenzanteile erzeugen.	Superposition ist nicht erfüllt! Modulation (erwünscht) nichtlineare Verzerrungen/Kennlinie (unerwünscht)
Zeitinvariant	Zeitliche Verschiebung des Eingangs ruft identische zeitliche Verschiebung am Ausgangs hervor.	$x(t - t_v) \rightarrow y(t - t_v)$ RLC-Netzwerke, Faltung $*$
Zeitvariant	Zeitinvarianz ist nicht erfüllt.	Nichtlineare Faktoren $f(t)$ (z.B. $\sin(t)$)
Reell	Reelles Eingangssignal bewirkt reelles Ausgangssignal	
Invertierbar	Bei jedem Ausgangssignal kann eindeutig auf das entsprechende Eingangssignal geschlossen werden.	$h(t) = t^3$ invertierbar $(t) = t^2$ nicht invertierbar

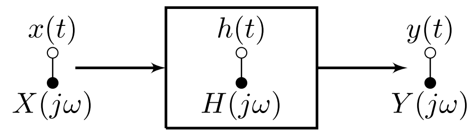
3.2 LTI-Systeme (linear-time-invariant-Systems)

3.2.1 Impulsantwort und Frequenzgang

Zeitbereich	$y(t)$	$=$	$h(t)$	$*$	$x(t)$
	$\circ\!\!-\!\!\bullet$		$\circ\!\!-\!\!\bullet$		$\circ\!\!-\!\!\bullet$
Frequenzbereich	$Y(j\omega)$	$=$	$H(j\omega)$	$\cdot$	$X(j\omega)$
Bildbereich ($s=\sigma+j\omega$)	$Y(s)$	$=$	$\underbrace{H(s)}_{\text{UTF}}$	$\cdot$	$X(s)$

LTI-System kausal

$\Rightarrow \quad h(t)=0 \quad$ für $\quad t<0$



Frequenzgang $H(j\omega)$

$$\boxed{H(j\omega)=|H(j\omega)|\cdot \mathrm{e}^{j\theta(\omega)}}$$

Frequenzgang $\quad H(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,dt$

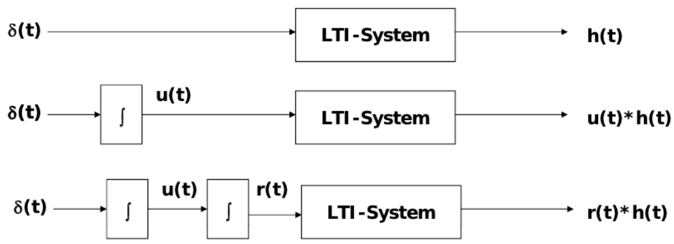
Amplitudengang $\quad |H(j\omega)|=\sqrt{\mathrm{Re}(H(j\omega))^2+\mathrm{Im}(H(j\omega))^2}$

Phasengang $\quad \theta(\omega)=\arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(H(j\omega))}{\mathrm{Re}(H(j\omega))}\right)$

3.2.2 Zusammenhang Impulsantwort $h(t)$ und Einheitssprungantwort $g(t)$

$$\boxed{h(t)=\frac{dg(t)}{dt} \qquad \text{bzw.} \qquad g(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau}$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} h(t)=\lim_{s\to 0} s\,H(s) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{t\to\infty} g(t)=\lim_{s\to 0} H(s)}$$



3.2.3 Stabilität

3.2.3.1 BIBO-Stabilität

BIBO-stabil, wenn beschränktes Eingangssignal $\rightarrow$ beschränktes Ausgangssignal

$\boxed{|x(t)|<A \quad\rightarrow\quad |y(t)|<B}$ mit $A,B\in\mathbb{R}$ $\quad\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt<\infty}$

BIBO-stabil $\rightarrow$ stabil oder Granzstabil

3.2.3.2 Asympptotische Stabilität

stabil:	$\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=0$ (Pole nur in der linken s-Halbebene)
grenzstabil:	Kein Pol in der rechten s-Halbebene liegt. Mindestens ein einfacher Pol auf der j-Achse der s-Ebene liegt. Kein mehrfacher Pol auf der j-Achse der s-Ebene liegt.
instabil:	Mindestens ein Pol in der rechten s-Halbebene Mindestens ein mehrfacher Pol auf der j-Achse der s-Ebene liegt.

3.2.3.3 Stabilität mit Hurwitz-Kriterium

Untersuchung des charakteristischen Polynoms $P(s)$ (Nenner der UTF): $\boxed{P(s)=a_n\,s^n+a_{n-1}\,s^{n-1}+...a_1\,s+a_0}$

stabil:	charakteristisches Polynom $P(s)$ ist **ein Hurwitz-Polynom**
grenzstabil:	charakteristisches Polynom $P(s)$ ist **ein modifiziertes Hurwitz-Polynom**
instabil:	charakteristisches Polynom $P(s)$ ist **kein Hurwitz-Polynom**

Hurwitz-Polynom:	**modifiziertes Hurwitz-Polynom:**
• Koeffizienten $a_i>0$ für $i=0...n$	• Koeffizienten $a_i\geq 0$ für $i=0...n$
• Hurwitz-Determinanten $D_i>0$ für $i=1...n$	• Hurwitz-Determinanten $D_i>0$ für $i=1...(n-2)$
	• Hurwitz-Determinanten $D_{n-1}=D_n=0$

Hurwitz-Determinanten D_i

$$D_1 = a_{n-1}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$D_k = \dots$$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$D_n = a_0\, D_{n-1}$$

3.3 Phasen- und Gruppenlaufzeit

Verzögerung eines Signals durch ein System sind definiert durch:

- Phasenlaufzeit für ein einzelnes Sinussignal
- Gruppenlaufzeiten für mehrere (Gruppen von)Sinusschwingungen

Die Signalverzögerung von Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ und Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ sind identisch, wenn:

- $\boxed{\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0}$
- Amplitudengang konstant ist $\quad\rightarrow\quad H(j\omega) = \alpha \cdot \mathrm{e}^{-j\omega t_0}$

$\rightarrow$ Signalverzögerung beträgt für alle Frequenzen $\boxed{\tau_P = \tau_G = t_0}$

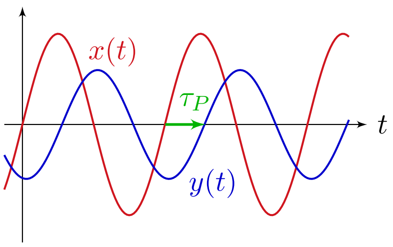
FIR-Filter (digitale Filter) mit symmetrischen Koeffizienten haben eine konstante Signalverzögerung.

3.3.1 Phasenlaufzeit

Antwort eines Systems auf eine Sinusschwingung:

$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma) \quad\rightarrow\quad y(t) = \alpha \cdot A \cdot \sin(\omega_0(t - t_0) + \gamma)$

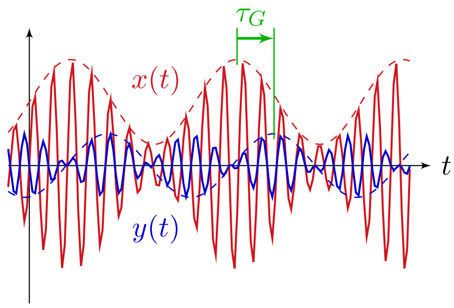
Phasenlaufzeit (Verzögerung): $\boxed{\tau_P(\omega) = \dfrac{-\theta(\omega)}{\omega}}$



3.3.2 Gruppenlaufzeit

Gruppenlaufzeit (Verzögerung):

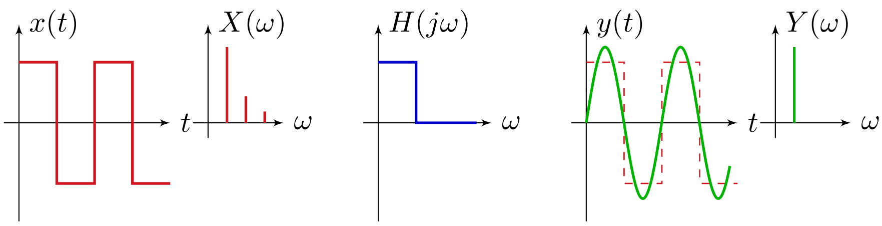
$\boxed{\tau_G(\omega) = \dfrac{-d\theta(\omega)}{d\omega}}$



3.4 Verzerrungen

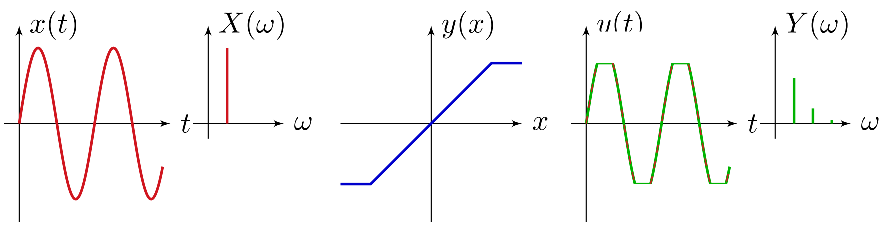
Ein Übertragungssystem muss eine ausreichende Bandbreite besitzen, da in der Regel ein Frequenzgemisch übertragen wird. Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem nicht verzerrungsfrei.

3.4.1 Lineare Verzerrungen



Bei linearen Verzerrungen werden **Frequenzteile gedämpft**, jedoch keine neuen Frequenzanteile generiert.
Beispiele: diverse Filter.

3.4.2 Nichtlineare Verzerrungen



Bei nichtlinearen Verzerrungen werden der **Frequenzteile gedämpft**, sowie **auch neue Frequenzanteile** generiert. Dadurch entstehen Oberwellen. Ein Mass für nichtlineare Verzerrungen ist der **Klirrfaktor**
Beispiele: Systemübersteuerungen, nichtlineare Kennlinien.

3.4.3 Klirrfaktor

An ein System wird eine **einzelne Sinusschwingung** angelegt:

Klirrfaktor: $$\boxed{k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}}}$$

Teilklirrfaktor: $$\boxed{k_m = \sqrt{\frac{U_m^2}{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}}}$$

Klirrdämpfungsmass: $$\boxed{a_k = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{k}\right)}$$

Teilklirrdämpfungsmass: $$\boxed{a_{km} = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{k_m}\right)}$$

Total Harmonic Distortion: $$\boxed{THD = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}}}$$

Effektivwert des gesamten Ausgangssignal:	$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}$	Klirrfaktor:	$0 \leq k < 1$
Effektivwert der entstandenen Harmonischen:	$\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}$	THD:	$0 \leq THD < \infty$
Effektivwert der Grundschwingung:	$\sqrt{U_1^2}$	Allgemein:	$THD \geq k$
Effektivwert m-ten Harmonischen:	$\sqrt{U_m^2}$	kleine Verzerr.:	$THD \cong k$

3.4.4 Verzerrungsfreie Systeme

Ein Verzerrungsfreies System muss folgende Bedingungen erfüllen:

- keine Amplitudenverzerrung: $|H(j\omega)| = \alpha \neq 0$
- keine Phasenverzerrung: $\theta(\omega) = -\omega t_0$

3.5 Übertragung von stochastischen Signalen

Ein stochastisches Signal $x(t)$ wird durch ein LTI-System mit übertragen $\Rightarrow$ $y(t) = x(t) * h(t)$

Linearer Mittelwert:

$$\boxed{Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \qquad \Rightarrow \qquad Y_0 = X_0 \cdot H(j0)}$$

Autokorrelation:

$$\boxed{\varphi_{yy}(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)}$$

Leistungsdichtespektrum:

$$\boxed{\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \, \Phi_{xx}(j\omega)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_{yy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \, \Phi_{xx}(j\omega) \, e^{j\omega\tau} \, d\omega} \quad \text{weil } \Phi_{yy}(j\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ \ \varphi_{yy}(\tau)$$

Leistung des Ausgangssignals $y(t)$: $$\boxed{Y^2 = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \, \Phi_{xx}(j\omega) \, d\omega}$$

Kreuzkorrelation:

Die Kreuzkorrelationen von einem stochastischen Eingangssignal $x(t)$ und dem stochastischen Ausgangssignal $y(t)$ eines LTI-Sstem hängen wie folgt zusammen:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \ \circ\!\!-\!\!\bullet \ \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega) \\ \varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \ \circ\!\!-\!\!\bullet \ \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \ \circ\!\!-\!\!\bullet \ \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi_{xy}^*(j\omega)}$$

4 Frequenzverhalten von analogen LTI-Systemen

4.1 Dämpfung und Verstärkung

Dämpfung:

In passiven Netzwerken wird die Energie der Signale gedämpft $\rightarrow$ Eingangsgrösse $>$ Ausgangsgrösse.

Dämpfungsfaktor:

$$\boxed{D = \frac{\text{Eingangsgrösse}}{\text{Ausgangsgrösse}} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2}}$$

Verstärkung:

In aktiven Netzwerken wird die Energie der Signale verstärkt $\rightarrow$ Eingangsgrösse $<$ Ausgangsgrösse.

Verstärkungsfaktor:

$$\boxed{T = \frac{\text{Ausgangsgrösse}}{\text{Eingangsgrösse}} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{D}}$$

Um grosse Messbereiche abdecken zu können, wird der Dämpfungsfaktor oft logarithmisch ausgedrückt.

Dämpfungsmass in dB

$$\boxed{a = 10 \cdot \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right)}$$

Verstärkungssmass in dB

$$\boxed{a = 10 \cdot \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)}$$

Achtung:
Mit Dezibel werden **Leistungen** verglichen, nicht Amplituden!

Ein weiteres Mass aus der Telefonie ist das Neper (NP)

Dämpfungsmass:

$$\boxed{a = \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \log\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right)} \quad [Np]$$

$$\boxed{\begin{aligned} 1\ dB &= \frac{\ln(10)}{20}\, Np \\ 1\ Np &= 20 \cdot \log(e)\, dB \end{aligned}}$$

Achtung:
Mit Neper werden **Amplituden** verglichen, nicht Leistungen!

4.2 Relative und Absolute Pegel

Relative Pegel:

Relative Pegel werden in dB angegeben. Dabei wird das Verhältnis zwischen zwei Leistungen an verschiedenen Orten des Systems verglichen, beispielsweise $\frac{P_{\text{Ausgangs}}}{P_{\text{Eingang}}}$. Ist die dB-Zahl positiv so wird die Eingangsleistung verstärkt, ist die dB-Zahl negativ so wird sie gedämpft.

Absolute Pegel:

Absolute Pegel werden in dBx angegeben, wobei x für ein Kürzel eines bestimmten Referenzpegel steht. Hier wird die Leistung an einem Ort des Systems mit dem Referenzpegel verglichen, beispielsweise $\frac{P_{\text{Ausgangs}}}{1dBW}$.

Dezibel-Verhältnisse:

	Leistungsverhältnis	Amplitudenverhältnis
$20dB$	100	10
$10dB$	10	$\sqrt{10}$
$6dB$	4	2
$3dB$	2	$\sqrt{2}$
$0dB$	1	1
$-3dB$	$1/2$	$1/\sqrt{2}$
$-6dB$	$1/4$	$1/2$
$-10dB$	$1/10$	$1/\sqrt{10}$
$-20dB$	$1/100$	$1/10$

Referenzpegel aus der Praxis:

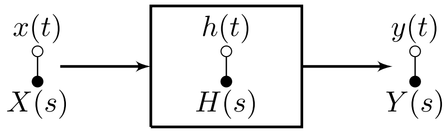
dBW	$0\,dBW = 1W$
dBm	$0\,dBm = 1mW$
dBV	$0\,dBV = (1V)^2/R_{ref}$
$DB\mu V$	$0\,dB\mu V = (1\mu V)^2/R_{ref}$

Bei Spannungspegeln muss der Referenzwiderstand berücksichtigt werden.
HF-Technik: $R_{ref} = 50\Omega$
Telefonie: $R_{ref} = 600\Omega$

4.3 Übertragungsfunktion → Frequenzgang

Die Übertragungsfunktion eines LTI-Systems mit konzentrierten Koeffizienten kann als rationale Funktion mit **reellen** Koeffizienten geschrieben werden.

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}}$$



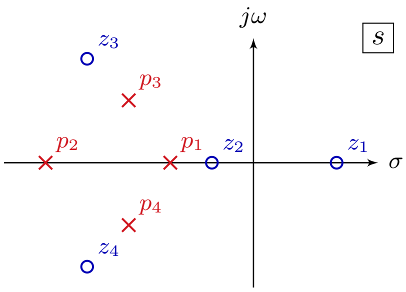
Die dazugehörige DGL lautet: $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$

Der Frequenzgang kann nun aus der Übertragungsfunktion ermittelt werden.

$$\boxed{F(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}}$$

4.4 Pol- und Nullstellen, Pol- und Nullstellenfrequenz/güte

Die Lösungen der Gleichungen $N(s) = 0$ und $D(s) = 0$ ergeben die Nullstellen bzw. Polstellen der Übertragungsfunktion. Diese können in einem **Pol/Nullstellendiagramm** dargestellt werden.



Aus den Pol- und Nullstellen lässt sich ebenfalls die Übertragungsfunktion bestimmen:

$$\boxed{H(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)} \quad \text{mit} \quad K = \frac{b_m}{a_n}}$$

Da die Pol- und Nullstellen immer **reell** oder in **konjugiert-komplexen Paaren** vorkommen ($a_i, b_j \in \mathbb{R}$), kann $H(s)$ auch als Produkt von Faktoren mit reellen Koeffizienten dargestellt werden

$$\boxed{H(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{r}(s^2 + 2s\sigma_{zi} + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{t}(s^2 + 2s\sigma_{pj} + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2t+1}^{n}(s - p_j)} = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{r}(s^2 + \frac{\omega_{zi}}{q_{zi}}s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{t}(s^2 + \frac{\omega_{pj}}{q_{pj}}s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2t+1}^{n}(s - p_j)}}$$

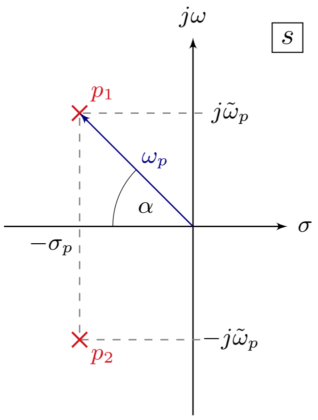
4.4.1 Pol- und Nullstellenfrequenz (ω_{pj}, ω_{zi}), Pol- und Nullstellengüte (q_{pj}, q_{zi})

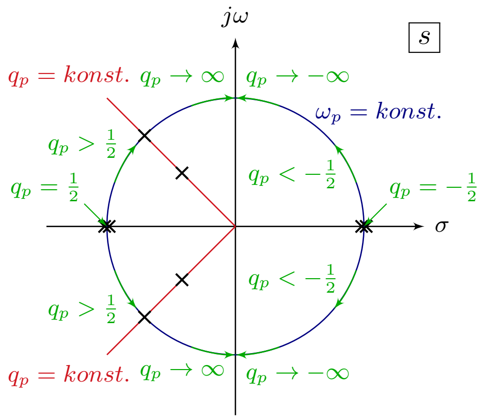
Für ein konjugiert-komplexes Polpaar gilt: $(s - p_1)(s - p_2) = s^2 + 2s\sigma_p + (\sigma_p^2 + \tilde{\omega}_p^2)$

Polfrequenz: $\boxed{\omega_p = \sqrt{\sigma_p^2 + \tilde{\omega}_p^2}}$ bzw. **Polgüte:** $\boxed{q_p = \frac{\omega_p}{2 \cdot \sigma_p} = \frac{1}{2 \cdot \cos(\alpha)}}$

Für die **Nullstellenfrequenz** und die **Nullstellengüte** gilt das Gleiche.

Achtung:
Diese Beziehungen gelten nur für konjugiert-komplexe Polpaare bzw. Nullstellenpaare



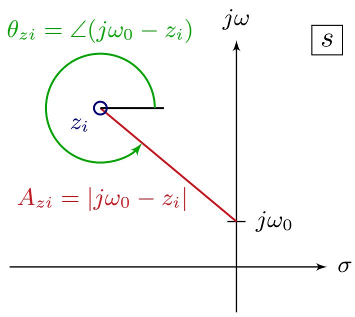


Für ein Polpaar (oder auch Nullstellenpaar) auf der negativ reellen Achse gilt jedoch:

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}$$

$$q_p = \frac{\sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}}{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}} \leq \frac{1}{2}$$

4.5 Pol/Nullstellendiagramm → Frequenzgang



Der Frequenzgang kann graphisch aus dem Pol/Nullstellendiagramm bestimmt werden. Dabei gilt für eine beliebig wählbare Kreisfrequenz ω_0

$$\boxed{H(j\omega_0) = K \cdot \frac{(j\omega_0 - z_1)(j\omega_0 - z_2)...(j\omega_0 - z_m)}{(j\omega_0 - p_1)(j\omega_0 - p_2)...(j\omega_0 - p_n)} = |H(j\omega_0)| \cdot e^{j\varphi(\omega_0)}} \quad \text{mit}$$

$$\boxed{|H(j\omega_0)| = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} A_{zi}}{\prod_{j=1}^{n} A_{pj}}} \quad \text{und} \quad \boxed{\varphi(j\omega_0) = arg(K) + \sum_{i=1}^{m} \theta_{zi} - \sum_{j=1}^{n} \theta_{pj}}$$

4.6 Minimalphasennetzwerke

Ein Minimalphasennetzwerk besitzt die kleinste Phasendrehung, die bei einem vorgeschriebenen Amplitudengang möglich ist. Daher ist bei Minimalphasennetzwerken nur **Amplitudengang oder Phasengang** frei wählbar.
Als wesentliches Merkmal sind bei einem Minimalphasennetzwerken **keine Nullstellen in der rechten s-Halbebene (RHE)**, darf jedoch auf der imaginären-Achse haben.

4.7 Bode-Diagramm

Im Bodediagramm wird das Übertragungsverhalten von Vierpolen dargestellt. Es besteht jeweils aus einem **Amplituden-** und einem **Phasengang**.

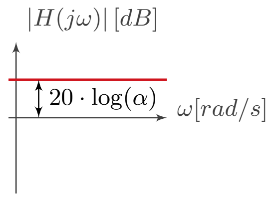
- **Amplitudengang**
  Der Betrag der Amplitude (Verstärkung) wird als Funktion der (Kreis-)Frequenz **doppelt-logarithmisch** dargestellt.
- **Phasengang**
  Die Phasendifferenz zwischen Ein-und Ausgang wird Funktion der (Kreis-)Frequenz **logarithmisch** dargestellt.

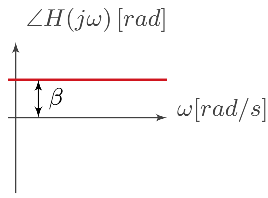
4.7.1 Approximationen des Bode-Diagramms

Konstanter Faktor: $\boxed{H(s) = \alpha\, e^{j\beta}}$

$|H(j\omega)| = 20 \cdot \log(\alpha) = \text{konst.}$

$\angle H(j\omega) = \beta = $konst.

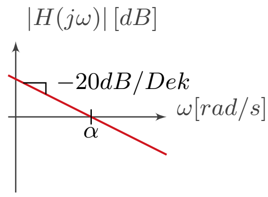


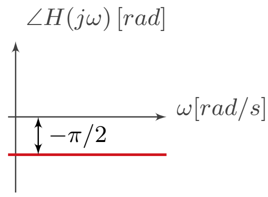


Pol im Ursprung: $\boxed{H(s) = \frac{\alpha}{s}}$

$|H(j\omega)| = $ Gerade mit Steigung $-20dB$/Dekade, $0dB$ bei $\omega = \alpha$

$\angle H(j\omega) = -\frac{\pi}{2} = $konst.

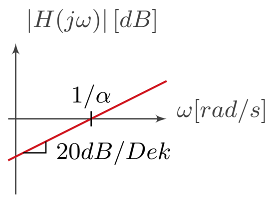


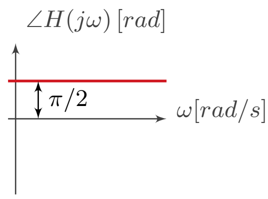


Nullstelle im Ursprung: $\boxed{H(s) = \alpha \cdot s}$

$|H(j\omega)| = $ Gerade mit Steigung $20dB$/Dekade, $0\,dB$ bei $\omega = \frac{1}{\alpha}$

$\angle H(j\omega) = \frac{\pi}{2} = $konst.

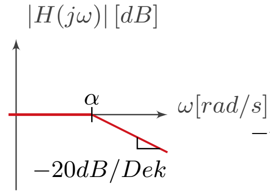


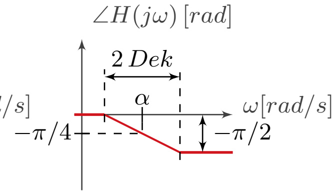


Reeller Pol: $\boxed{H(s) = \dfrac{\alpha}{s+\alpha}}$

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} \omega < \alpha, & 0\,dB \\ \omega > \alpha, & \text{Gerade mit Steigung } -20dB/\text{Dekade}, \ 0\,dB \text{ bei } \omega = \alpha \end{cases}$$

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} \omega < \dfrac{\alpha}{10}, & 0 \\ \dfrac{\alpha}{10} < \omega < 10\,\alpha, & \text{linear abfallend} \\ \omega > 10\,\alpha, & -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

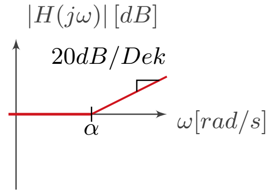


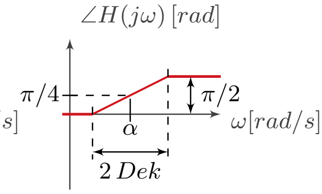


Reelle Nullstelle: $\boxed{H(s) = \dfrac{s+\alpha}{\alpha}}$

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} \omega < \alpha, & 0\,dB \\ \omega > \alpha, & \text{Gerade mit Steigung } 20dB/\text{Dekade}, \ 0\,dB \text{ bei } \omega = \alpha \end{cases}$$

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} \omega < \dfrac{\alpha}{10}, & 0 \\ \dfrac{\alpha}{10} < \omega < 10\,\alpha, & \text{linear ansteigend} \\ \omega > 10\,\alpha, & \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

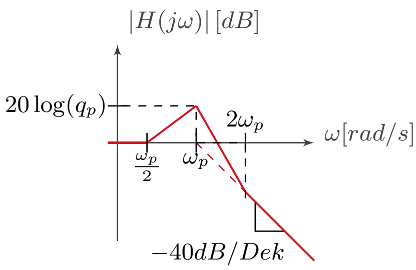


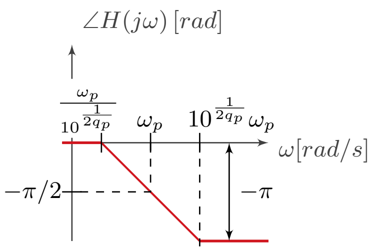


Konjugiert-komplexe Pole: $\boxed{H(s) = \dfrac{\omega_p^2}{s^2 + s\frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2}}$

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} \omega < \dfrac{\omega_p}{2}, & 0\,dB \\ \dfrac{\omega_p}{2} < \omega < \omega_p, & \text{steigende Gerade, } 20\,\log(q_p) \text{ bei } \omega = \omega_p \\ \omega_p < \omega < 2\,\omega_p, & \text{fallende Gerade, } 20\,\log(q_p) \text{ bei } \omega = \omega_p \\ \omega > 2\,\omega_p & \text{Gerade mit Steigung } -40dB/\text{Dekade}, \ 0\,dB \text{ bei } \omega = \omega_p \end{cases}$$

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} \omega < \dfrac{\omega_p}{10^{\frac{1}{2q_p}}}, & 0 \\ \dfrac{\omega_p}{10^{\frac{1}{2q_p}}} < \omega < \omega_p \cdot 10^{\frac{1}{2q_p}}, & \text{linear abfallend, } -\dfrac{\pi}{2} \text{ bei } \omega = \omega_p \\ \omega > \omega_p \cdot 10^{\frac{1}{2q_p}}, & -\pi \end{cases}$$



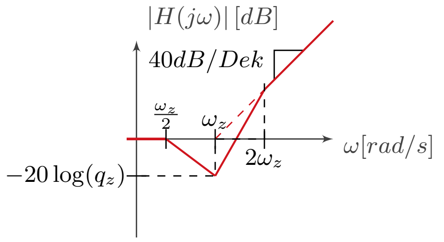


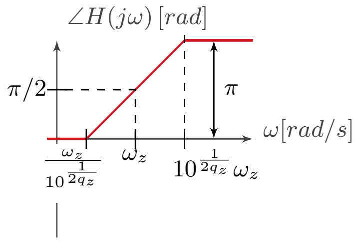
Konjugiert-komplexe Nullstellen:

$$\boxed{H(s) = \frac{s^2 + s\frac{\omega_z}{q_z} + \omega_z^2}{\omega_z^2}}$$

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} \omega < \frac{\omega_z}{2}, & 0\,dB \\ \frac{\omega_z}{2} < \omega < \omega_z, & \text{fallende Gerade, } -20\,\log(q_z) \text{ bei } \omega = \omega_z \\ \omega_z < \omega < 2\,\omega_z, & \text{steigende Gerade, } -20\,\log(q_z) \text{ bei } \omega = \omega_z \\ \omega > 2\,\omega_z & \text{Gerade mit Steigung } 40dB/\text{Dekade, } 0\,dB \text{ bei } \omega = \omega_z \end{cases}$$

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} \omega < \frac{\omega_z}{10^{\frac{1}{2q_z}}}, & 0 \\ \frac{\omega_z}{10^{\frac{1}{2q_z}}} < \omega < \omega_z \cdot 10^{\frac{1}{2q_z}}, & \text{linear ansteigend, } \frac{\pi}{2} \text{ bei } \omega = \omega_z \\ \omega > \omega_z \cdot 10^{\frac{1}{2q_z}}, & \pi \end{cases}$$





Werte für $10^{\frac{1}{2q_p}}/10^{\frac{1}{2q_z}}$ und $\frac{1}{10^{\frac{1}{2q_p}}}/\frac{1}{10^{\frac{1}{2q_z}}}$

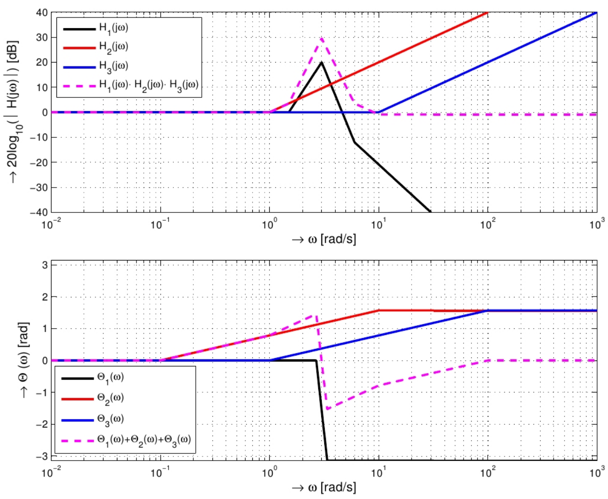
q_x	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
$10^{\frac{1}{2q_x}}$	10	3.16	2.15	1.78	1.47	1.33	1.26	1.21	1.15	1.12	1.06	1.02	1.01
$\frac{1}{10^{\frac{1}{2q_x}}}$	0.1	0.316	0.464	0.562	0.681	0.750	0.794	0.825	0.866	0.891	0.944	0.977	0.989

4.7.2 Serieschaltung von Systemen

Jede Übertragungsfunktion $H(s)$ kann in eine Serieschaltung von mehreren Grundsystemen zerlegt werden. Dadurch kann die UTF im Bodediagramm durch Superposition ermittelt werden (Multiplikation entspricht Addition im dB-Bereich).

$$H(s) = \frac{9\,(s^2 + 11\,s + 10)}{10\,(s^2 + 0.3\,s + 9)}$$

$$= \underbrace{\frac{3^2}{s^2 + \frac{3}{10}\,s + 3^2}}_{H_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{s+1}{1}}_{H_2(s)} \cdot \underbrace{\frac{s+10}{10}}_{H_3(s)}$$



4.7.3 Zusammenhang Pol/Nullstellendiagramm ↔ Amplitudengang

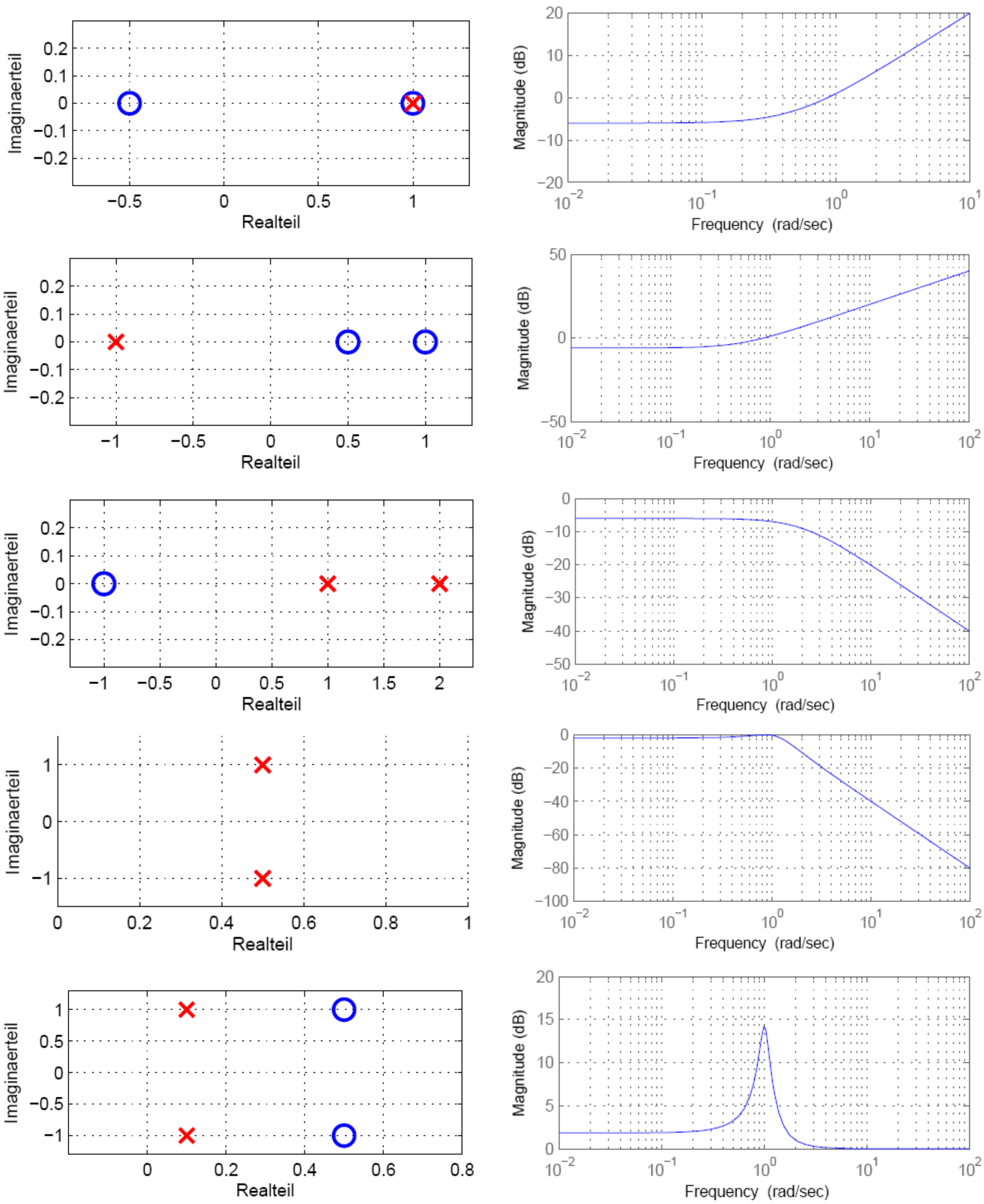
Mit Hilfe des Pol/Nullstellendiagramm kann der zugehörige Amplitudengang bestimmt werden.

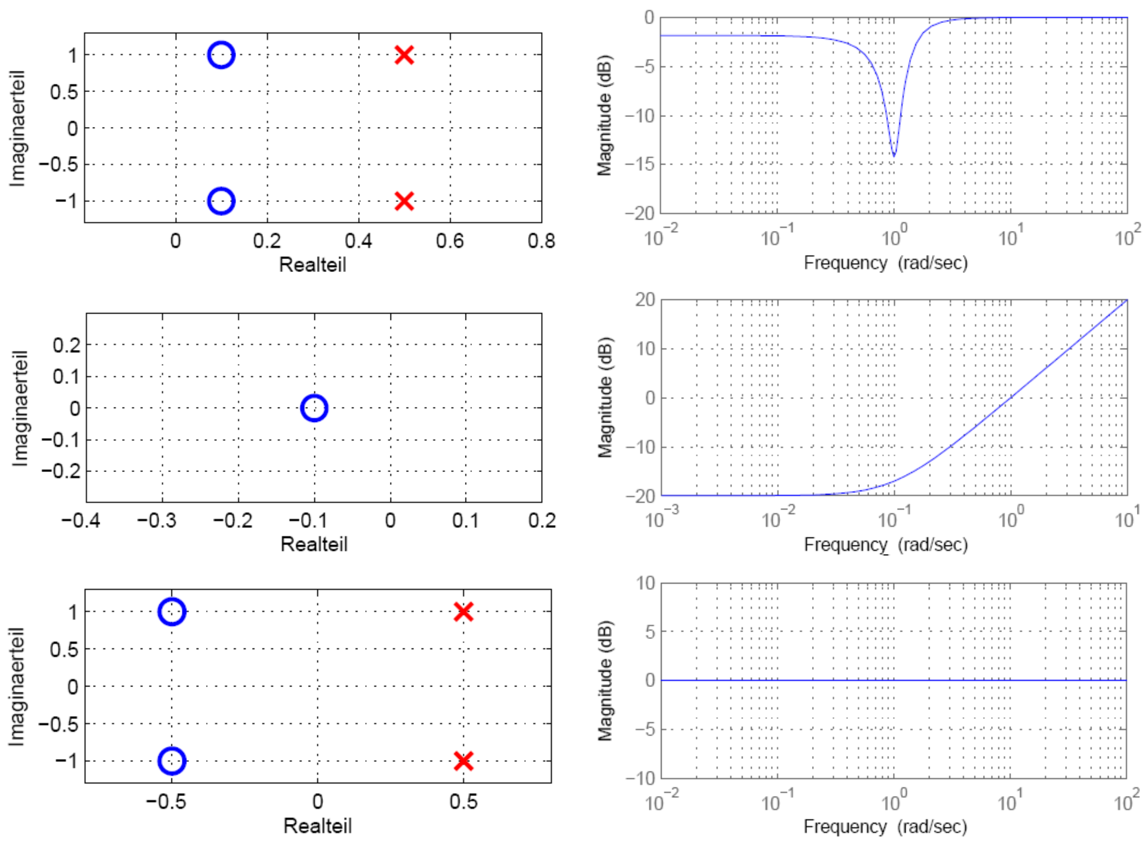
Regeln:

- reelle einfache Nullstellen „knicken nach oben weg"
- reelle einfache Polstellen „knicken nach unten weg"
- Pol-, Nullstelle auf der gleichen Stelle heben sich (theoretisch) auf
- konjugiert komplexe Nullstellen haben eine Senke
- konjugiert komplexe Polstellen haben eine Überhöhung

Die PS/NS mit dem kleinsten Abstand zum Ursprug (nach Abzug der "Aufhebungen"), gibt den Verlauf des Amplitudengangs an.

Pol/Nullstellendiagramm **zugehöriger Amplitudengang**

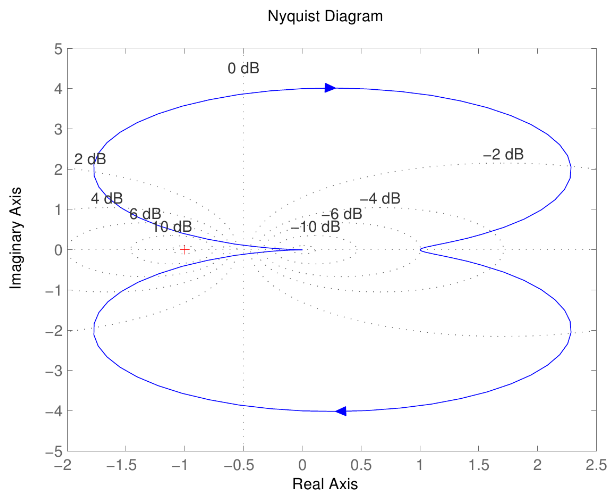




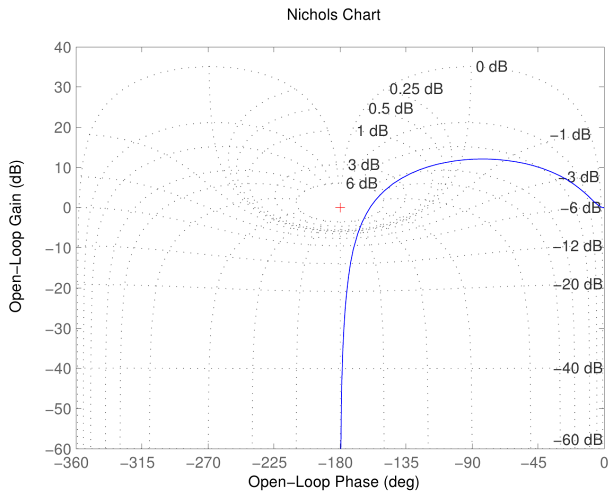
4.8 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) und Nichols-Diagramm

Nebst dem Bodediagramm gibt es noch weitere Methoden um den Amplituden- und Phasengang graphisch darzustellen.

Nyquist-Diagramm



Nichols-Diagramm



$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{s}{4} + 1^2}$$

Im Nyquist-Diagramm werden die komplexen Werte des Frequenzganges (Amplitude und Phase) nur in einem Diagramm (komplexe Ebene) dargestellt. Dabei repräsentiert der Abstand eines Punktes zum Ursprung den Betrag und sein Winkel zur Horizontalen die Phase. Die Kreisfrequenz variiert dabei zwischen $-\infty$ und ∞ (Pfeilrichtung).

Im Nichols Diagramm wird die Amplitude (Betrag) in abhängigkeit der Phase ebenfalls in nur einem Diagramm dargestellt. Die Kreisfrequenz variiert dabei zwischen 0 und ∞.

4.9 Stabilität

Die Stabilität eines LTI-Systems kann über vier verschiedene Methoden bestimmt werden.

1. **Niquist-Diagramm (Skript S. 203-205)**
   Das System ist asymptotisch stabil, wenn die Ortskurve des offenen Regelkreises den kritischen Punkt $(-1\,;\,j\,0)$ mit wachsender Frequenz weder umkreist noch durchläuft.

2. **Nichols-Diagramm (Skript S. 208)**

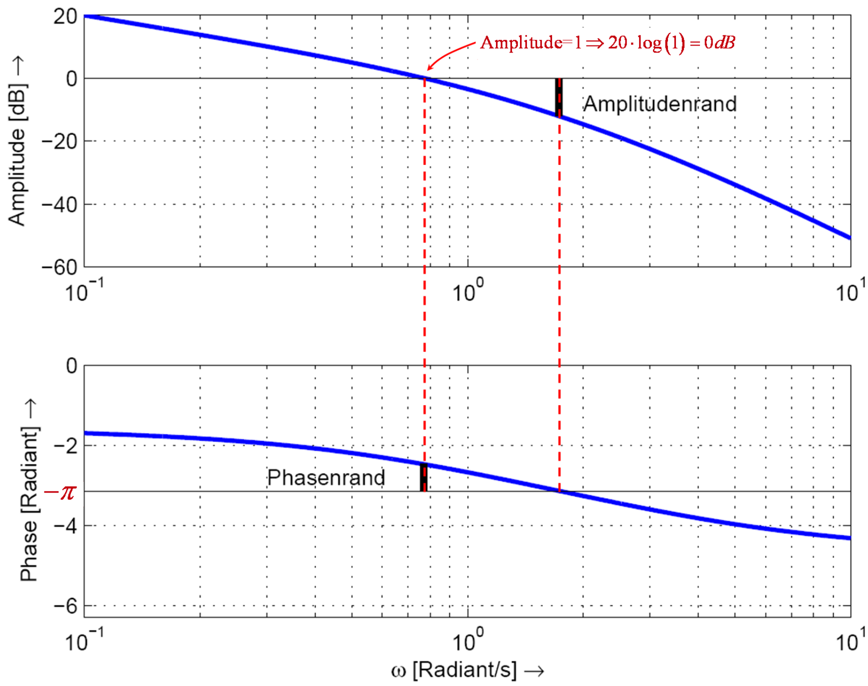
3. **Pol-Nullstellendiagramm**
   Das System ist asymptotisch stabil, wenn alle Pole in der linken s-Halbebene liegen.

4. **Eigenwerte der Systemmatrix A (Skript S. 285)**
   Das System ist asymptotisch stabil, wenn alle Realanteile der Eigenwerte < 0 sind.

5. **Bodediagramm (Skript S. 206)**
   Das System ist asymptotisch stabil, wenn Phasen- und Amplitudenrand > 0 sind. Dabei gilt, je grösser der Phasen- und Amplitudenrand ist, desto "stabiler" ist das System.

   - **Phasenrand**
     Der Phasenrand ist der Abstand des Phasenganges zur $-\pi$-Linie bei der Kreisfrequenz ω, wo die Amplitude gleich $0\,dB$ ist.

   - **Amplitudenrand**
     Der Amplitudenrand ist der Abstand des Amplitudenganges zur $0\,dB$-Linie bei der Kreisfrequenz ω, wo die Phase gleich $-\pi$ $(-180°)$ ist.

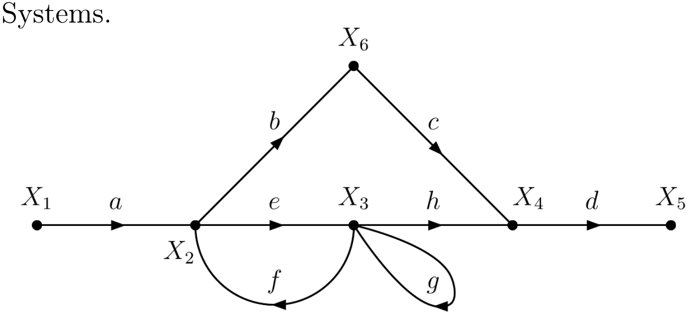


5 Signalflussdiagramme

Ein Signalflussdiagramm (SFD)

- ist eine graphische Darstellung eines Systems, das durch ein Gleichungssystem beschrieben wird.
- ist eine visuelle "Einsicht" in das System hinsichtlich Komplexität, Rückkopplungsschleifen und Vorwärtspfaden.
- bildet eine Brücke zwischen Übertragungsfunktion (Beziehung zwischen Ein- und Ausgang) und möglichen Topologien des Systems.

5.1 Definitionen



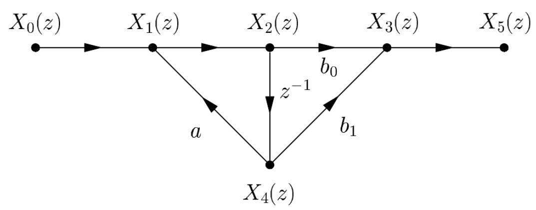
Knoten:	Bestimmte Grösse, Signal oder Variable
Quelle:	Knoten, in die keine Zweige einmünden (X_1) $\rightarrow$ unabhängige Variable
Senke:	Knoten ohne weggehende Zweige (X_5) $\rightarrow$ keine andere Variable hängt von dieser ab
Gemischter Knoten:	Knoten mit hineiführenden und weggehenden Zweigen (X_2, X_3, X_4 und X_6)
Zweig:	Funktionale Abhängigkeit zwischen Knoten
Pfad:	kontinuierliche Folge von Zweigen, die alle in die gleiche Richtung zeigen ($aehd$ und $abcd$)
Offener Pfad:	Pfad, bei dem jeder beteiligte Knoten nur **einmal** durchquert wird ($abcd$, aeh, aef)
Vorwärtspfad:	offener Pfad zwischen Quelle und Senke ($aehd$) oder Quelle und gemischtem Knoten (abc)
Schleife:	geschlossener Pfad, der zum Ausgangsknoten zurückkehrt (g, ef)
Eigenschleife:	(Rückkopplungs)schleife, die aus einem Zweig besteht (g)
Zweigtransmittanz:	lineare Grösse, die einen Knoten eines Zweiges zum anderen Knoten in Beziehung setzt ($X_2 = a \cdot X_1$)
Schleifentransmittanz:	Produkt der Zweigtransmittanzen in einer Schleife

5.2 Konstruktionsregeln

- Knoten = Variablen und Zweigtransmittanzen = Koeffizienten des linearen Gleichungssystem.
- Signale durchqueren Zweige nur in Pfeilrichtung und werden mit der entsprechenden Zweigtransmittanz multipliziert.
- Wert der Variable (Knoten) = Summe aller Signale, die in diesen Knoten einmünden.
- Werd der Variable (Knoten) wird auf alle weggehenden Zweige übertragen.

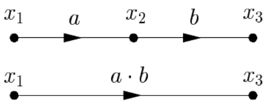
Beispiel:

$$\begin{aligned}
X_1(z) &= a \cdot X_4(z) + X_0(z) \\
X_2(z) &= X_1(z) \\
X_3(z) &= b_0 \cdot X_2(z) + b_1 \cdot X_4(z) \\
X_4(z) &= z^{-1} \cdot X_2(z) \\
X_5(z) &= X_3(z)
\end{aligned}$$



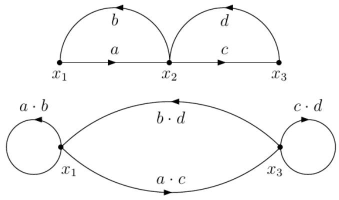
5.3 Reduktionsregeln

Kettentransformation



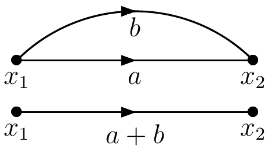
$$x_2 = a \cdot x_1$$
$$x_3 = b \cdot x_2$$
$$\boxed{x_3 = a \cdot b \cdot x_1}$$

Entfernung eines Knotens



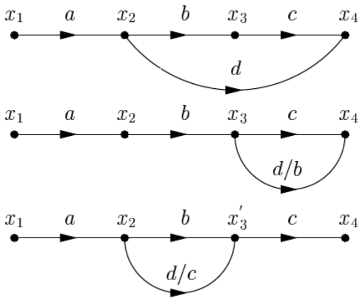
$$x_2 = a \cdot x_1 + d \cdot x_3$$
$$x_1 = b \cdot x_2; \qquad x_3 = c \cdot x_2$$
$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= a \cdot b \cdot x_1 + b \cdot d \cdot x_3 \\ x_3 &= a \cdot c \cdot x_1 + c \cdot d \cdot x_3 \end{aligned}}$$

Paralleltransformation



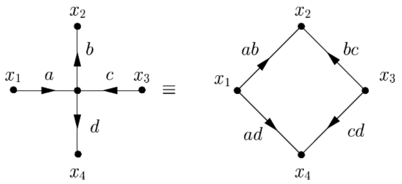
$$x_2 = a \cdot x_1 + b \cdot x_1$$
$$\boxed{x_2 = (a+b) \cdot x_1}$$

Transmittanzverschiebung

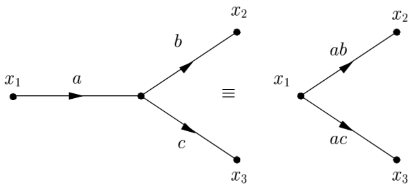


$$x_3 = b \cdot x_2$$
$$x_4 = (bc + d)x_2$$
$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= b \cdot x_2 \\ x_4 &= b\left(c + \tfrac{d}{b}\right) \cdot x_2 \end{aligned}}$$
$$\boxed{\begin{aligned} x_3' &= \left(b + \tfrac{d}{c}\right) \cdot x_2 \\ x_4 &= c\left(b + \tfrac{d}{c}\right) \cdot x_2 \end{aligned}}$$

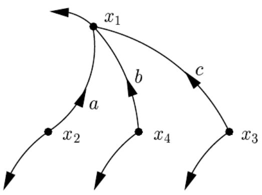
Y-Transformation



Stern-Masche-Transformation

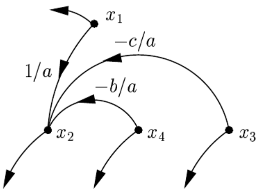


Pfadinversion



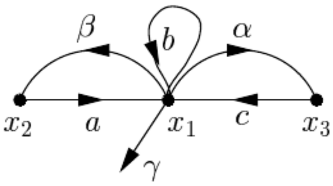
Gemischter Knoten zur Quelle machen.

$$x_1 = ax_2 + bx_4 + cx_3$$



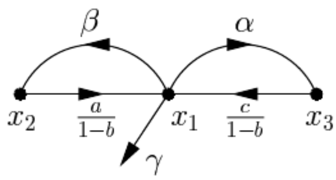
$$\boxed{x_2 = \frac{1}{a}x_1 - \frac{b}{a}x_4 - \frac{c}{a}x_3}$$

Entfernung einer Eigenschleife



Durch (1−Eigenschleife) dividieren.

$$x_1 = bx_1 + ax_2 + cx_3$$



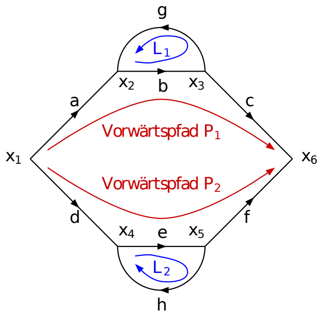
$$\boxed{x_1 = \frac{a}{1-b} \cdot x_2 + \frac{c}{1-b} \cdot x_3}$$

5.4 Mason's Regel

Übertragungsfunktion zwischen einer **Quelle** x_i und einer Senke oder einem gemischten Knoten x_j lautet:

$$\boxed{H_{ij} = \frac{x_j}{x_i} = \frac{\sum_k P_k \cdot \Delta_k}{\Delta}}$$

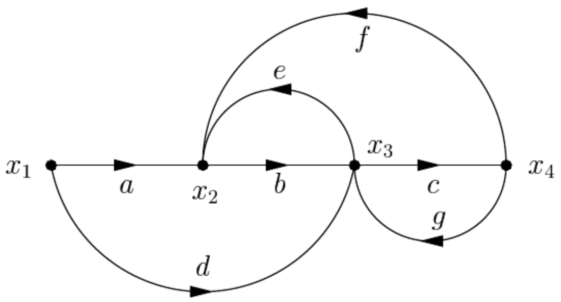
P_k : k-ter Vorwärtspfad
Δ_k : Kofaktor von P_k
Δ : Graph/Netzwerkdeterminante



$$\boxed{\begin{aligned} \Delta &= 1 - \textstyle\sum \text{Schleife} \\ &+ \textstyle\sum \text{Produkt zweier Schleifen, die sich nicht berühren} \\ &- \textstyle\sum \text{Produkt dreier Schleifen, die sich nicht berühren} \\ &+ \ldots - \ldots \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_k &= 1 - \textstyle\sum \text{Schleife, die } P_k \text{ nicht berührt} \\ &+ \textstyle\sum \text{Produkt zweier Schleifen, die sich nicht berühren und die } P_k \text{ nicht berühren} \\ &- \textstyle\sum \text{Produkt dreier Schleifen, die sich nicht berühren und die } P_k \text{ nicht berühren} \\ &+ \ldots - \ldots \end{aligned}}$$

Beispiel:



$$H_{14} = \frac{x_4}{x_1} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{abc + dc}{1 - be - bcf - cg}$$

$$H_{12} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{a(1-cg) + de + dcf}{1 - be - bcf - cg}$$

$$H_{24} = \frac{x_4}{x_2} = \frac{\frac{x_4}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{H_{14}}{H_{12}} = \frac{abc + dc}{a(1-cg) + de + dcf}$$

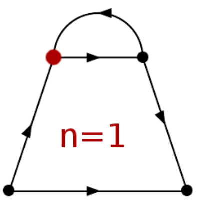
5.5 Fundamentale Signalflussdiagramme

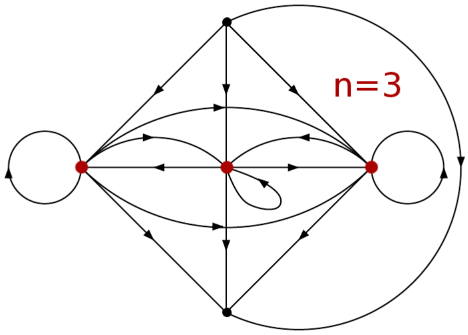
5.5.1 Ordnung

Die Ordnung eines Signalflussdiagrammes entspricht der minimalen Anzahl fundamentaler Knoten.

$\boxed{n = \text{minimale Anzahl Knoten um alle Schleifen aufzubrechen}}$

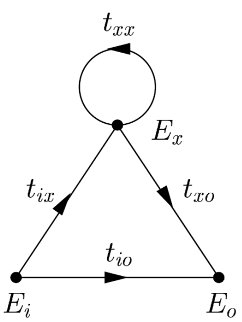
Beispiele:





5.5.2 Fundamentales Signalflussdiagramm 1. Ordnung

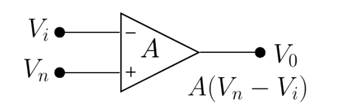
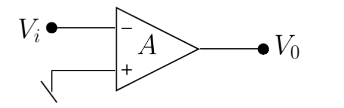
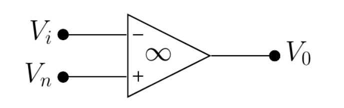
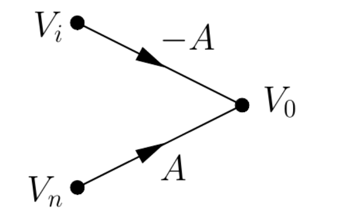
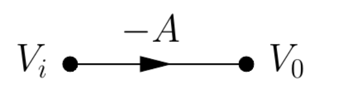
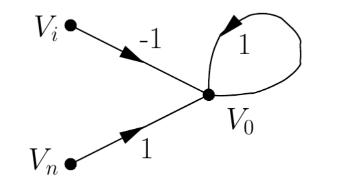
Ein Signalflussdiagramm 1. Ordnung kann auf 4 Transmittanzen reduziert werden
$\rightarrow$ fundamentales Signalflussdiagramm 1.Ordnung.



t_{io} = alle Pfade vom Eingang zum Ausgang, welche nicht durch E_x gehen
t_{ix} = alle Pfade vom Eingang zum Knoten E_x
t_{xo} = alle Pfade vom Knoten E_x zum Ausgang
t_{xx} = alle Eigenschleifen des Knotens E_x

$$\boxed{H_{io} = \frac{E_o}{E_i} = \frac{t_{io} - t_{io}t_{xx} + t_{ix}t_{xo}}{1 - t_{xx}} = t_{io} + \frac{t_{ix}t_{xo}}{1 - t_{xx}}}$$

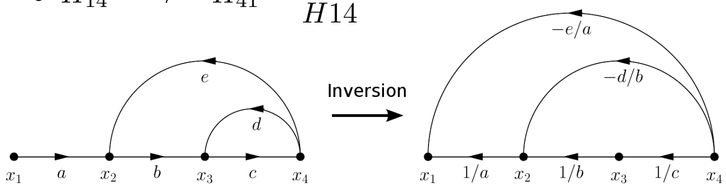
5.6 Operationsverstärker als Signalflussdiagramm

Opperationsverstärker			
Signalflussdiagramm			

5.7 Inversion eines Signalflussdiagrammes

Durch schrittweise Pfadinversion erhält man das "invertierte" Signalflussdiagramm.
Es hat folgende Eigenschaften:

- Treibersignal x_1 wird zur Senke und Ausgangssignal x_4 wird zur Quelle
- nichtkausale Darstellung des ursprünglichen Systems
- Signalflussdiagramm hat nur noch Vorwärtspfade
- $H_{14} \quad \rightarrow \quad H_{41} = \dfrac{1}{H14}$



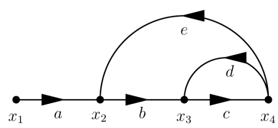
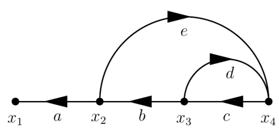
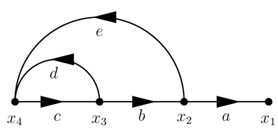
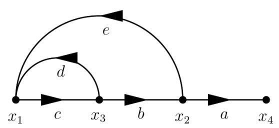
5.8 Transposition eines Signalflussdiagrammes

Durch Transposition eines Signalflussdiagrammes erhält man das transponierte Signalflussdiagramm.
Es hat folgende Eigenschaften:

- Es ist eine wichtige Methode für die Ableitung von alternativen praktischen Topologien mit identischer Übertragungsfunktion.
- Die Toplogie bleibt gleich.
- Die UTF bleibt gleich: $H_14 = H_14$

Drei Schritte der Transposition:

1. Richtungsumdrehung aller Zweigtransmittanzen
2. Spiegelung des Signalflussdiagrammes
3. Bezeichnungswechsel von Eingangs- und Ausgangsknoten.

ursprüngliches SFD	Umkehr der Zweigrichtungen
	
Spiegelung	Ein- und Ausgangsknoten vertauschen
	

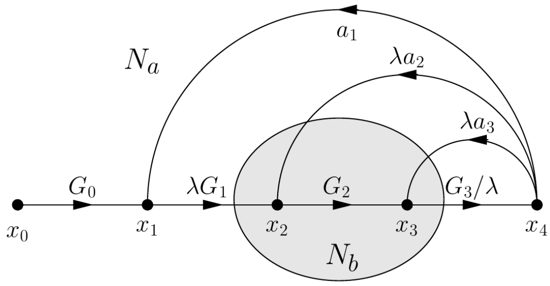
5.9 Skalierung eines Signalflussdiagrammes

Die Skalierung dient dazu, das Signalniveau in einem System an bestimmten Knoten zu verändern/anzugleichen. Dies muss beispielsweise gemacht werden, um Übersteuerung zu verhindern, Inverter zu entfernen oder den Dynamikbereich des gesamten Systems zu verbessern.

Trennbündel: minimale Anzahl Zweige, die durchtrennt werden müssen, um das Signalflussdiagramm in genau zwei Teile (N_a und N_b) zu trennen.

Druchführung der Skalierung:

1. Skalierungszone (Trennbündel) festlegen
2. alle eingehenden Zweige mit λ multiplizieren
3. alle ausgehenden Zweige mit $1/\lambda$ multiplizieren



Eigenschaften der Skalierung:

- Skalierung der Signalniveaus aller Knoten der Menge N_b mit dem Faktor λ
- Hat keinen Einfluss auf die Übertragungsfunktion, sofern das Trennbündel den Eingangsknoten nicht vom Ausgangsknoten trennt.

6 Zustandsraumdarstellung

Der Grundgedanke der Zustandsraumdarstellung besteht darin, die Differentialgleichung n. Ordnung, welche ein LTI-System beschreibt, durch ein Differentialgleichungssystem mit n Gleichungen 1. Ordnung darzustellen. Es wird aber auch gebraucht um:

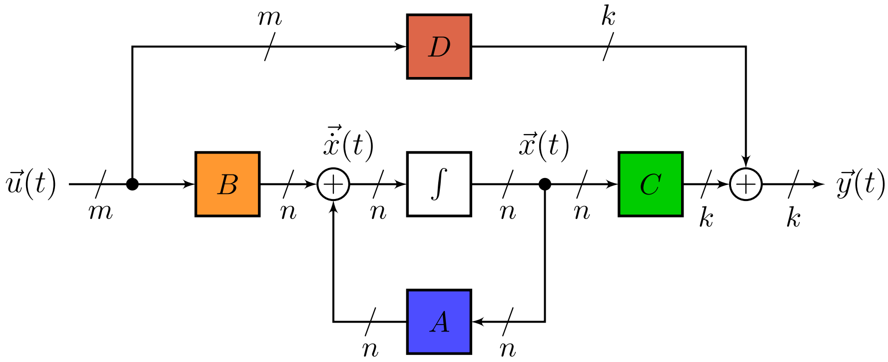
- innere Systemstabilitäten zu erkennen.
- Systeme mit mehreren Ein-und Ausgängen und beliebigen Anfangszuständen zu berechnen.
- die Behandlung von zeitvarianten und nichtlinearen Netzwerken zu erleichtern.

6.1 Blockdiagramm und Matrizen

Mit den Eingangsvektor $\vec{u}(t)$, dem Ausgangsvektor $\vec{y}(t)$ und dem Zustandsvektor $\vec{x}(t)$ sowie den Matrizen A, B, C und D ergibt sich die standartisierte Form einer Matrixdifferentialgleichung und einer normalen Matrixgleichung.

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= A\,\vec{x}(t) + B\,\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) &= C\,\vec{x}(t) + D\,\vec{u}(t) \end{aligned}}$$

n : Zustandsgrössen
m : Eingangssignale
k : Ausgangssignale



Matrix	Typ	Zeile x Spalte	Beschreibung
A	Systemmatrix	n x n	Verhalten des ungestörten Systems ($\vec{u}(t) = \vec{0}$) innere Stabilität des gesamten Systems
B	Steuermarix Eingangsmatrix	n x m	Wirkung der Eingangsgrösse auf die Zustandsgrösse
C	Beobachtungsmatrix Ausgangsmatrix	k x n	Abhängigkeit des Zustandes durch die beobachtbare Ausgangsgrösse
D	Übertragungsmatrix Durchgangsmatix	k x m	unmittelbare Wirkung der Eingangsgrösse auf den Ausgang

6.1.1 Ordnung eines Systems

Die Ordnung ist die kleinste Anzahl Zustandsgrössen ($\vec{x}(t)$), bzw. die Anzahl unabhängiger Energiespeicher.

6.2 Äquivalente Zustandsraumdarstellung

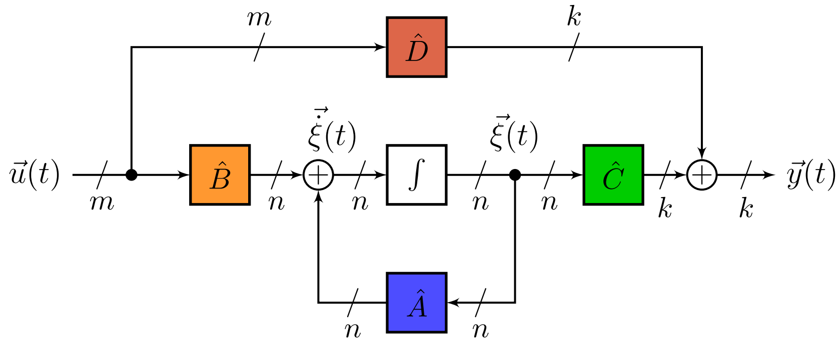
Mit einer Transformationsmatrix T kann man **verschiedene** Zustandsgrössen und Zustandsraumdarstellungen mit **identischem Systemverhalten** erhalten.

Eigenschaften der Transformationsmatrix T:

- n x n - Matrix
- regulär $\rightarrow \det(T) \neq 0$
- $T\,T^{-1} = T^{-1}T = I$ (Einheitsmatrix)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{\xi}}(t) &= \overbrace{TAT^{-1}}^{\hat{A}}\,\vec{\xi}(t) + \overbrace{TB}^{\hat{B}}\,\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) &= \underbrace{CT^{-1}}_{\hat{C}}\,\vec{\xi}(t) + \underbrace{D}_{\hat{D}}\,\vec{u}(t) \end{aligned}}$$

$$\vec{x}(t) = T^{-1}\vec{\xi}(t) \quad \Leftrightarrow \quad T\vec{x}(t) = \vec{\xi}(t)$$



6.2.1 Berechnung der Transformationsmatrix T

Die Transformationsmatrix T wird aus den Eigenvektoren der Systemmatrix A zusammengesetzt.
$\rightarrow$ Lösungen der Gleichung $\boxed{A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}}$ finden.

1. $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ (Singulär)
2. Nullstellen λ_i finden $\rightarrow$ Eigenwerte λ_i von A
3. Für jedes λ_i die Gleichung $(A - \lambda_i \cdot I) \cdot \vec{v}_i = 0$ lösen $\rightarrow$ Eigenvektoren $\vec{v}_i$ von A
4. Transformationsmatrix T aus den Eigenvektoren λ_i zusammensetzen $\rightarrow$ $T = [\vec{v}_1 \; \vec{v}_2 \; ... \; \vec{v}_n]$
5. Kontrollieren $A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i \quad \forall i$

6.3 Lösung der Zustandsgleichung im Zeitbereich

Die Lösung der Zustandsgleichung im Zeitbereich lautet:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \Phi(t) \cdot \vec{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot B \cdot \vec{u}(\tau)\, d\tau \\ \vec{y}(t) &= C \cdot \Phi(t) \cdot \vec{x}(0) + \int_0^t C \cdot \Phi(t-\tau) \cdot B \cdot \vec{u}(\tau)\, d\tau + D \cdot \vec{u}(t) \end{aligned}}$$

mit **Fundamentalmatrix** oder **Übergangsmatrix** $\boxed{\Phi(t) = \mathrm{e}^{A\,t}}$

6.3.1 Berechnung der Fundamentalmatrix $\Phi(t)$

Laplace-Rücktransformation:

$$\boxed{\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}}$$

$(sI - A)^{-1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; \Phi(t)$

Diagonalisiertung:

$$\boxed{\Phi(t) = \mathrm{e}^{A \cdot t} = T \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{\Phi_{dia}(t)} T^{-1}} \quad \text{mit} \quad \boxed{\begin{gathered} \Phi_{dia} = \mathrm{e}^{A_{dia} \cdot t} \\ A_{dia} = T^{-1} A\, T \\ \lambda_i \text{ Eigenwerte von } A \end{gathered}}$$

6.3.2 Eigenschaften der Fundamentalmatrix $\Phi(t)$

- $\Phi(0) = I$
- $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$ (immer invertierbar)
- $\Phi^k(t) = \Phi(kt)$
- $\Phi(t_1) \cdot \Phi(t_2) = \Phi(t_1 + t_2)$
- $\Phi(t_2 - t_1) \cdot \Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$

6.4 Lösung der Zustandsgleichung im Bildbereich (Frequenzbereich)

Im Bildbereich lauten die Zustandsgleichungen folgendermassen:

$$\boxed{\begin{aligned} s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) &= A\,\vec{X}(s) + B\,\vec{U}(s) \\ \vec{Y}(s) &= C\,\vec{X}(s) + D\,\vec{U}(s) \end{aligned}}$$

Die Lösung der Zustandsgleichung im Bildbereich lautet:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{X}(s) &= (sI - A)^{-1} \cdot \vec{x}(0) + (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot \vec{U}(s) \\ \vec{Y}(s) &= C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot \vec{x}(0) + \left[C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D\right] \vec{U}(s) \end{aligned}}$$

Übertragungsmatrix $H(s)$ (k x m):

$$\boxed{H(s) = \frac{\vec{Y}(s)}{\vec{U}(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad h(t) = C \cdot \Phi(t) \cdot B + D \cdot \delta(t)$$

6.5 Bestimmung der Zustandsraumdarstellung aus der allgemeinen Übertragungsfunktion

Die allgemeine Differentialgleichung eines SISO-Systems der Form

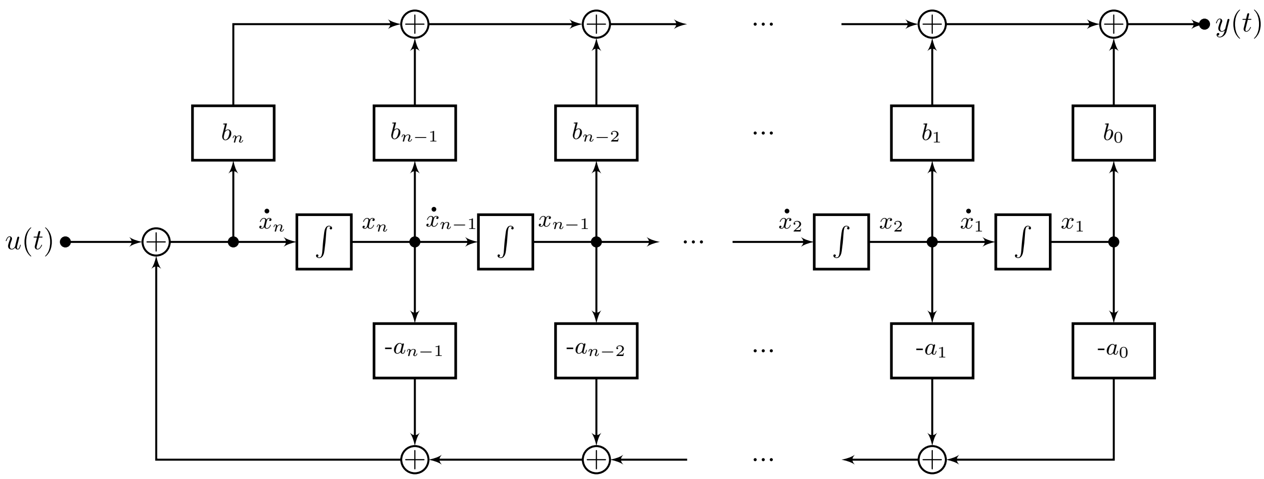
$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + ... + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u$$

ergibt die Laplace-Transformation

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}} \qquad \text{mit} \qquad m \leq n$$

Diese Übertragungsfunktion kann nun mit verschiedenen Zustandsraumdarstellungen abgebildet werden.

6.5.1 Regelungsnormalform



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - a_0\, b_n & b_1 - a_1\, b_n & \dots & b_{n-1} - a_{n-1}\, b_n \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}}_{D} \cdot u(t)$$

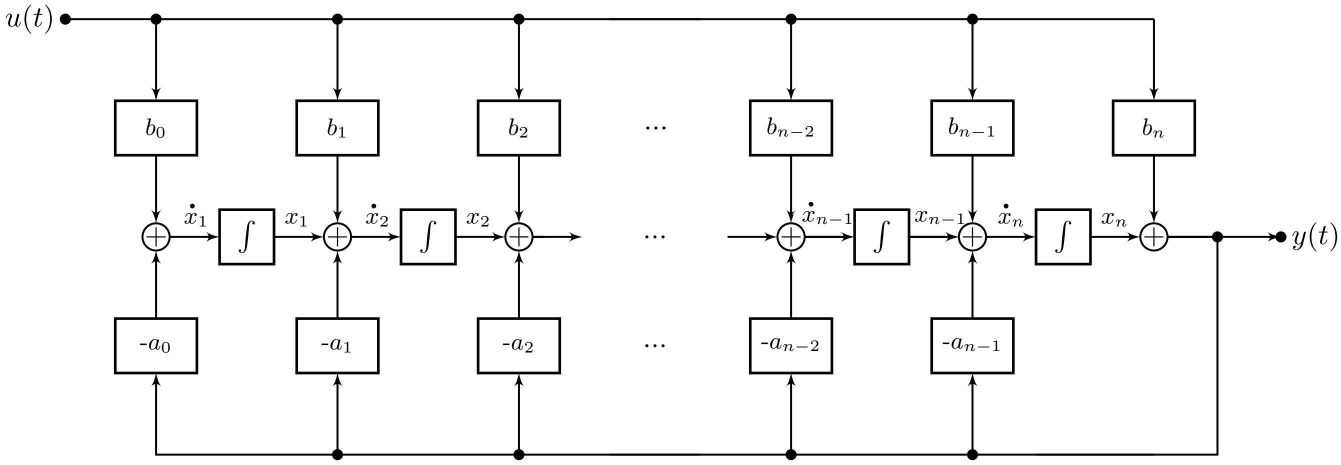
Für den Fall $\mathbf{m < n}$ vereinfacht sich die zweite Gleichung zu:

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} \cdot u(t)$$

6.5.2 Alternative Regelungsnormalform

Die Alternative Regelungsnormalform ist für $m < n$ identisch mit der normalen Regelungsnormalform. Für den Fall $m = n$ siehe Skript S.278.

6.5.3 Beobachtungsnormalform



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - a_0\, b_n \\ b_1 - a_1\, b_n \\ \vdots \\ b_{n-2} - a_{n-2}\, b_n \\ b_{n-1} - a_{n-1}\, b_n \end{bmatrix}}_{B} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}}_{D} \cdot u(t)$$

Für den Fall m < n vereinfacht sich die erste Gleichung zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \cdot u(t)$$

6.5.4 Alternative Beobachtungsnormalform

Die Alternative Beobachtungsnormalform ist für $m < n$ identisch mit der normalen Beobachtungsnormalform. Für den Fall $m = n$ siehe Skript S.280.

6.5.5 Regelungsnormalform vs Beobachtungsnormalform

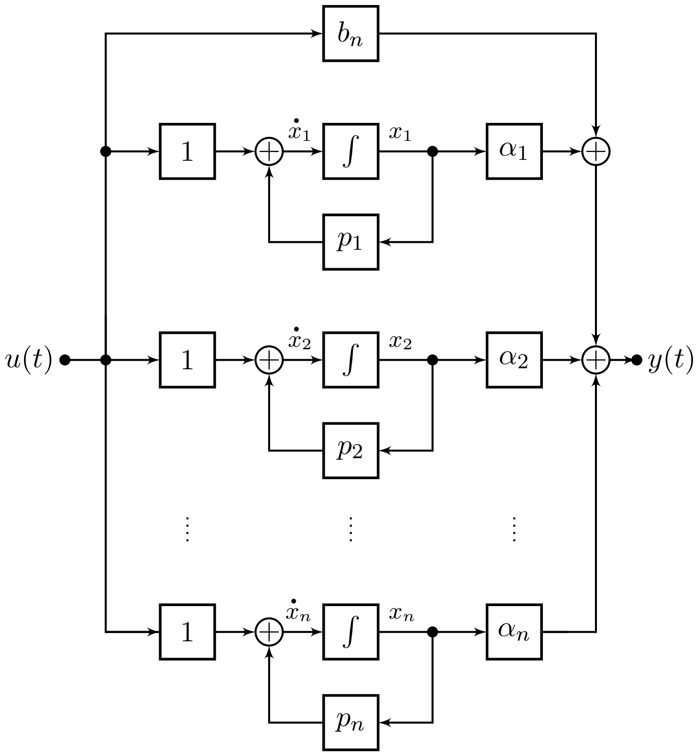
- A_{Beo} = an Hauptdiagonale gespiegeltes A_{Reg} $\Leftrightarrow$ A_{Reg} = an Hauptdiagonale gespiegeltes A_{Beo}
- $B_{Beo} = C_{Reg}^{\mathsf{T}}$ $\Leftrightarrow$ $B_{Reg} = C_{Beo}^{\mathsf{T}}$
- $C_{Beo} = B_{Reg}^{\mathsf{T}}$ $\Leftrightarrow$ $C_{Reg} = B_{Beo}^{\mathsf{T}}$
- $D_{Beo} = D_{Reg}$ $\Leftrightarrow$ $D_{Reg} = D_{Beo}$

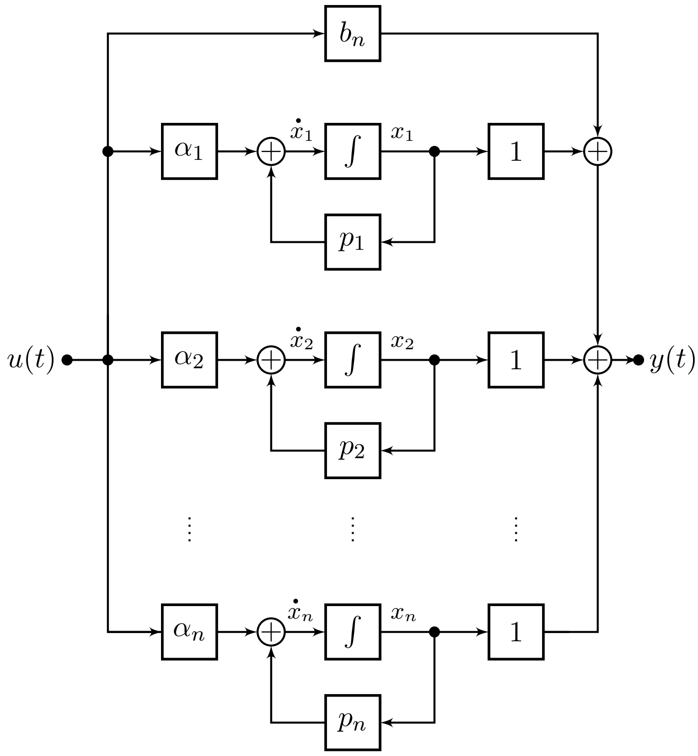
6.5.6 Diagonalform oder Jordan-Normalform

Diagonalform für einfache, reelle Pole

Partialbruchzerlegung der UTF ($m \leq$) mit einfachen, reellen Polen ist:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = b_n + \frac{\alpha_1}{s-p_1} + \frac{\alpha_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s-p_n}$$





$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}}_{D} \cdot u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{B} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}}_{D} \cdot u(t)$$

Diagonalform für einfache, konjugiet-komplexe Pole und für mehrfache, reelle Pole

Für diese Fälle siehe Skript S.283.

6.6 Stabilität

Ein LTI-System ist asymptotisch stabil wenn, wenn alle Eigenwerte der Systemmatrix A einen negativen Realteil besitzten.

$$\boxed{\Re\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i \qquad \Rightarrow \qquad \text{asymptotisch stabil}}$$

Der Umkehrschluss gilt nicht: System asymptotisch stabil $\quad \not\Rightarrow \quad \Re\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i$

6.7 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit

6.7.1 Steuerbarkeit

Ein System ist vollständig steuerbar, wenn alle Zustandsgrössen mit hilfe der Eingangsgrössen beeinflusst/verändert werden können.

Bedingungen für vollständige Steuerbarkeit:

SISO-Systeme	Wenn **alle** Elemente von $\hat{B} = T^{-1}B \neq 0$ sind
MIMO-Systeme	Wenn in **jeder Zeile** von $\hat{B} = T^{-1}B$ mindestens ein Element $\neq 0$ ist.
LTI-Systeme	Wenn für jeden Anfangszustand $\vec{x}(t_0)$ eine Steuerfunktion $\vec{u}(t)$ existiert, die das System innerhalb einer endlichen Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ in den Endzustand $\vec{x}(t_1)$ bringt.

Steuerbarkeitsmatrix $(n \times n \cdot m)$: $\boxed{Q_{\text{Steuerbarkeit}} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}$

$\boxed{\text{Ordnung } n = \text{Rang } Q_{\text{Steuerbarkeit}} \quad \Rightarrow \quad \text{System ist vollständig steuerbar}}$

Rang einer Matrix ist gleich der Anzahl linear unabhängigen Zeilen/Spalten.

$\boxed{\text{Eingänge } m = 1 \quad \cap \quad |Q_{\text{Steuerbarkeit}}| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{System ist vollständig steuerbar}}$

6.7.2 Beobachtbarkeit

Ein System ist vollständig beobachtbar, wenn die Ausgangsgrössen von allen Zustandsgrössen beeinflusst/verändert werden.

Bedingungen für vollständige Beobachtbarkeit:

SISO-Systeme	Wenn **alle** Elemente von $\hat{C} = CT \neq 0$ sind
MIMO-Systeme	Wenn in **jeder Spalte** von $\hat{C} = CT$ mindestens ein Element $\neq 0$ ist.
LTI-Systeme	Wenn bei bekannter äusserer Beeinflussung $B\vec{u}(t)$ und bekannten Matrizen A und C aus dem Ausgangsvektor $\vec{y}(t)$ über eine endliche Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ der Anfangszustand $\vec{x}(t_0)$ eindeutig bestimmt werden kann.

Beobachtbarkeitsmatrix $(k \cdot n \times n)$: $\boxed{Q_{\text{Beobachtbarkeit}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}$

$\boxed{\text{Ordnung } n = \text{Rang } Q_{\text{Beobachtbarkeit}} \quad \Rightarrow \quad \text{System ist vollständig beobachtbar}}$

Rang einer Matrix ist gleich der Anzahl linear unabhängigen Zeilen/Spalten.

$\boxed{\text{Ausgänge } k = 1 \quad \cap \quad |Q_{\text{Beobachtbarkeit}}| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{System ist vollständig beobachtbar}}$

6.7.3 Ausgangssteuerbarkeit

Ein LTI-System ist vollständig ausgangssteuerbar, wenn es eine Steuerfunktion $\vec{u}(t)$ gibt, welche die Ausgänge $\vec{y}(t)$ innerhalb einer endlichen Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ in einen Endwert $\vec{y}(t_1)$ bringt.

Ausgangssteuerbarkeitsmatrix $(k \times (n+1) \cdot m)$: $\boxed{Q_{\text{Ausgangssteuerbarkeit}} = \begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \dots & CA^{n-1}B & D \end{bmatrix}}$

$\boxed{\text{Anzahl Ausgänge } k = \text{Rang } Q_{\text{Ausgangssteuerbarkeit}} \quad \Rightarrow \quad \text{System ist vollständig ausgangssteuerbar}}$

Rang einer Matrix ist gleich der Anzahl linear unabhängigen Zeilen/Spalten.

7 Filtertheorie

Ein elektrisches Filter ist ein Netzwerk, dass ein Eingangssignal in gewünschter Art und Weise in ein Ausgangssignal verwandelt. Dabei handelt es sich mehrheitlich um **frequenzselektive, lineare Netzwerke**, welche gewisse Frequenzbereiche übertragen und andere dämpfen.
Die Filter lassen sich fünf **Grundtypen** unterteilen.

- Tiefpass (TP)
- Hochpass (HP)
- Bandpass (BP)
- Bandsperre (BS)
- Allpass (AP) → zum verändern der Phase

7.1 Realisierung von analogen Filtern

Das Ziel bei der Realisierung von analogen Filter ist, einen gegebenen Amplitudengang durch eine rational gebrochene Funktion möglichst gut zu approximieren und anschliessend die approximierte Übertragungsfunktion mit einem LC-Netzwerk zu realisieren.

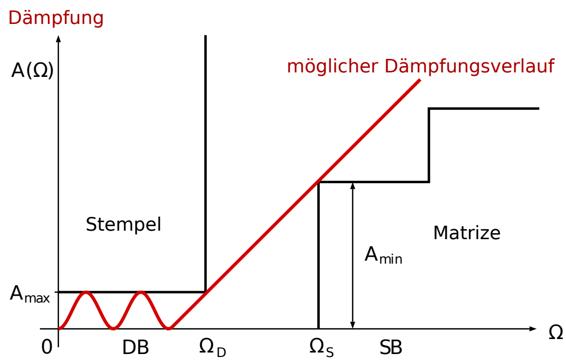
Dazu sind folgende Schritte notwendig:

1. Frequenznormierung durchführen
2. Normierter Tiefpass bestimmen (gegebenes Filter in ein Tiefpass transformieren)
3. Art der Approximation wählen (Butterworth, Tschebyscheff I und II, Cauer, Bessel, Gauss, ...)
4. Benötigten Filterordnung bestimmen (Nomogramm, Formel, Matlab)
5. Normierte Tiefpass-UTF mittels Tabellen bestimmen
6. Normierte Tiefpass-UTF in gewünschte Filter-UTF transformieren und entnormieren
7. L- und C-Werte für den normierten Tiefpass mittels Tabellen bestimmen
8. L- und C-Werte eventuell noch auf die gewünschte Grenzfrequenz anpassen
9. L- und C-Werte in die gewünschten Filter-Werte transformieren
10. L- und C-Werte bezüglich der Frequenz und des Impedanzniveaus entnormieren

7.2 Das Toleranzschema

Die technischen Anforderungen an die Übertragungseigenschaften eines Filters werden häufig im Frequenzbereich mit Hilfe eines Toleranzschemas beschrieben.

- **Stempel:** Bestimmt im Durchlassbereich (DB) die maximal zulässige Dämpfung A_{max}
- **Matrize:** Bestimmt im Sperrbereich (SB) die minimal nötige Dämpfung A_{min}



7.3 Frequenznormierung

Die Normierten Grössen berechnen sich folgendermassen:

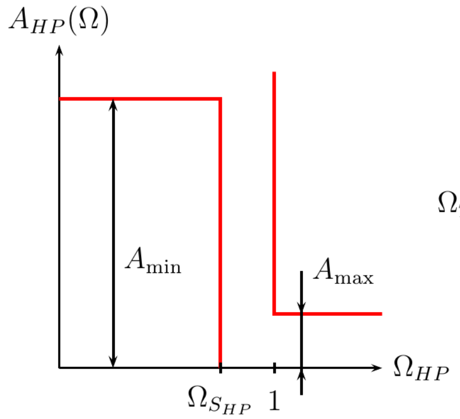
$$\boxed{S = \frac{s}{\omega_r} \qquad \Omega = \frac{\omega}{\omega_r} \qquad \sigma' = \frac{\sigma}{\omega_r}}$$

TP und HP: Referenzfrequenz $\omega_r = \omega_D$ Druchlassfrequenz

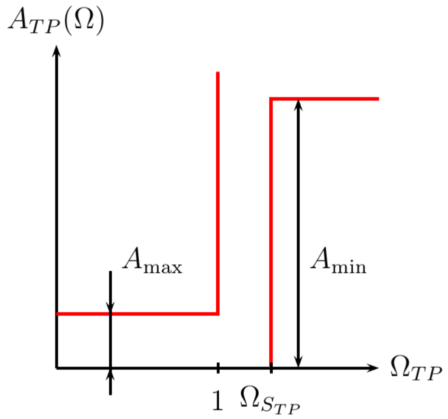
BP und BS: Referenzfrequenz $\omega_r = \omega_m$ Mittenfrequenz

7.4 Filtertransformationen

7.4.1 Tiefpass - Hochpass - Transformation



$$\Longleftrightarrow \quad \Omega_{TP} = \frac{1}{\Omega_{HP}}$$



Für die Transformation gelten folgende Regeln:

Ordnung: $\boxed{n_{HP} = n_{TP}}$

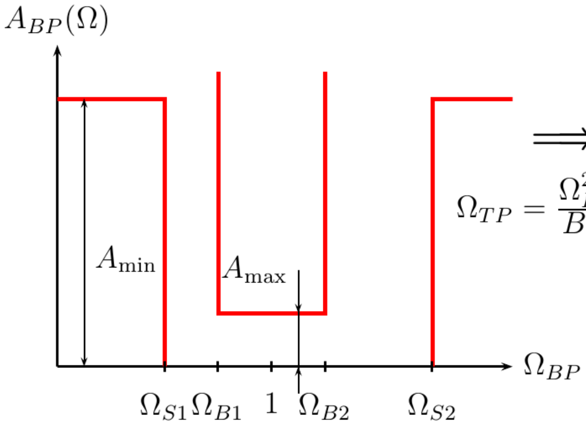
Übertragungsfunktion: $\boxed{\text{TP} \to \text{HP} \quad ; \quad S \to \frac{1}{S} \quad ; \quad H_{HP}(S) = H_{TP}\left(\frac{1}{S}\right)}$

Eckfrequenzen: $\boxed{\Omega_{S_{TP}} = \frac{1}{\Omega_{S_{HP}}} \quad ; \quad \Omega_{D_{TP}} = \frac{1}{\Omega_{D_{HP}}} = 1}$

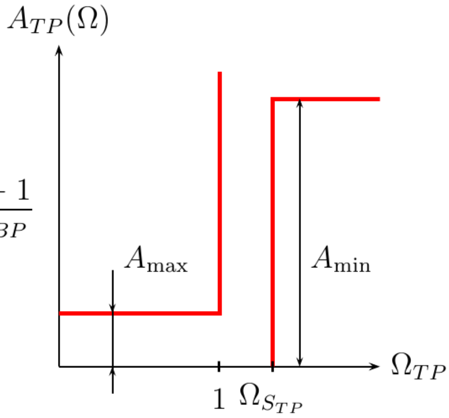
Singularitäten (P/NS): $\boxed{P_{kHP} = \frac{1}{P_{kTP}} \quad ; \quad Z_{iHP} = \frac{1}{Z_{iTP}}}$

Transformation und Entnormierung: $\boxed{S \to \frac{\omega_D}{s \cdot \Omega_{3.01\,dB}}}$

7.4.2 Tiefpass - Bandpass - Transformation



$$\Longrightarrow \quad \Omega_{TP} = \frac{\Omega_{BP}^2 - 1}{B \cdot \Omega_{BP}}$$



Für die Transformation gelten folgende Regeln:

Ordnung: $\boxed{n_{BP} = 2 \cdot n_{TP}}$

Bandbreite: $\boxed{B = \frac{\omega_{B2} - \omega_{B1}}{\omega_r} = \Omega_{B2} - \Omega_{B1}}$

Mittenfrequenz: $\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_{B1} \cdot \omega_{B2}} = \sqrt{\omega_{S1} \cdot \omega_{S2}} \quad ; \quad \Omega_{B1} \cdot \Omega_{B2} = \Omega_{S1} \cdot \Omega_{S2} = 1}$

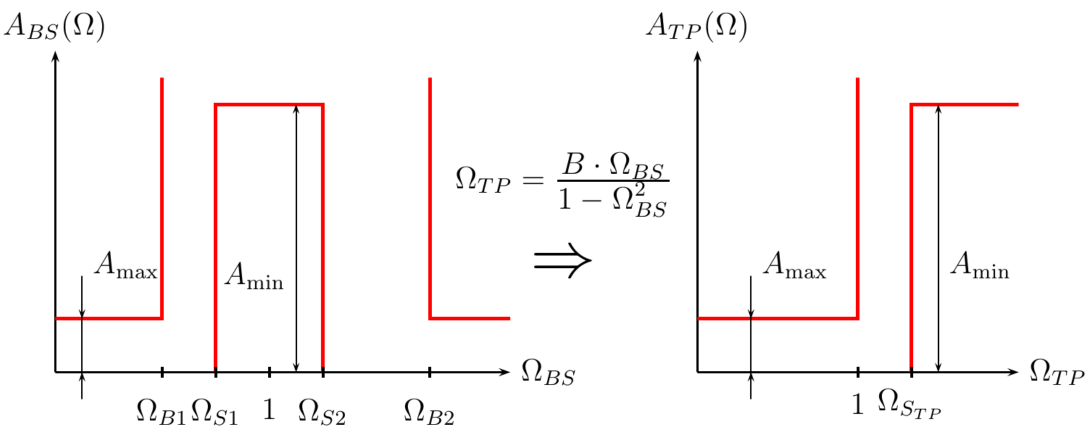
Übertragungsfunktion: $\boxed{\text{TP} \to \text{BP} \quad ; \quad S \to \frac{S^2 + 1}{B \cdot S} \quad ; \quad H_{BP}(S) = H_{TP}\left(\frac{S^2 + 1}{B \cdot S}\right)}$

Eckfrequenzen: $\boxed{\Omega_{S_{TP}} = \frac{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}}{B} = \frac{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}}{\Omega_{B2} - \Omega_{B1}} = \frac{\omega_{S2} - \omega_{S1}}{\omega_{B2} - \omega_{B1}} = \frac{f_{S2} - f_{S1}}{f_{B2} - f_{B1}}}$

Singularitäten (P/NS): $\boxed{P_{kBP_{1,2}} = \dfrac{P_{kTP} \cdot B \pm \sqrt{(P_{kTP} \cdot B)^2 - 4}}{2}}$ $\boxed{Z_{iBP_{1,2}} = \dfrac{Z_{iTP} \cdot B \pm \sqrt{(Z_{iTP} \cdot B)^2 - 4}}{2}}$

Transformation und Entnormierung: $\boxed{S \to \dfrac{\left(\dfrac{s}{\omega_r}\right)^2 + 1}{\dfrac{s}{\omega_r} \cdot B \cdot \Omega_{3.01\,dB}}}$

7.4.3 Tiefpass - Bandsperre - Transformation



Für die Transformation gelten folgende Regeln:

Ordnung: $\boxed{n_{BS} = 2 \cdot n_{TP}}$

Bandbreite: $\boxed{B = \dfrac{\omega_{B2} - \omega_{B1}}{\omega_r} = \Omega_{B2} - \Omega_{B1}}$

Mittenfrequenz: $\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_{B1} \cdot \omega_{B2}} = \sqrt{\omega_{S1} \cdot \omega_{S2}} \quad ; \quad \Omega_{B1} \cdot \Omega_{B2} = \Omega_{S1} \cdot \Omega_{S2} = 1}$

Übertragungsfunktion: $\boxed{\text{TP} \to \text{BS} \quad ; \quad S \to \dfrac{B \cdot S}{S^2 + 1} \quad ; \quad H_{BS}(S) = H_{TP}\left(\dfrac{B \cdot S}{S^2 + 1}\right)}$

Eckfrequenzen: $\boxed{\Omega_{S_{TP}} = \dfrac{B}{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}} = \dfrac{\Omega_{B2} - \Omega_{B1}}{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}} = \dfrac{\omega_{B2} - \omega_{B1}}{\omega_{S2} - \omega_{S1}} = \dfrac{f_{B2} - f_{B1}}{f_{S2} - f_{S1}}}$

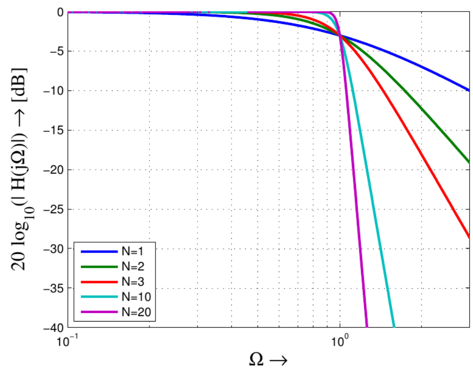
Singularitäten (P/NS): $\boxed{P_{kBS_{1,2}} = \dfrac{\dfrac{B}{P_{kTP}} \pm \sqrt{\left(\dfrac{B}{P_{kTP}}\right)^2 - 4}}{2}}$ $\boxed{Z_{iBS_{1,2}} = \dfrac{\dfrac{B}{Z_{iTP}} \pm \sqrt{\left(\dfrac{B}{Z_{iTP}}\right)^2 - 4}}{2}}$

Transformation und Entnormierung: $\boxed{S \to \dfrac{\dfrac{s}{\omega_r} \cdot B \cdot \Omega_{3.01\,dB}}{\left(\dfrac{s}{\omega_r}\right)^2 + 1}}$

7.5 Tiefpass - Filter - Approximationen

7.5.1 Butterworth - Filter - Approximation (Allpolfilter) S.310

Amplitudengang: $\boxed{|H(j\Omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\Omega^{2n}}}}$



Durchlassbereich	Sperrbereich
$\lvert H(0)\rvert = H_{max} = 1$ $\lvert H(j\cdot 1)\rvert = \dfrac{H_{max}}{\sqrt{2}} \hat{=} -3.01dB$	$\lvert H(j\Omega)\rvert \approx \dfrac{1}{\Omega^n}$ mit $-n \cdot 20dB/Dek$ abfallend

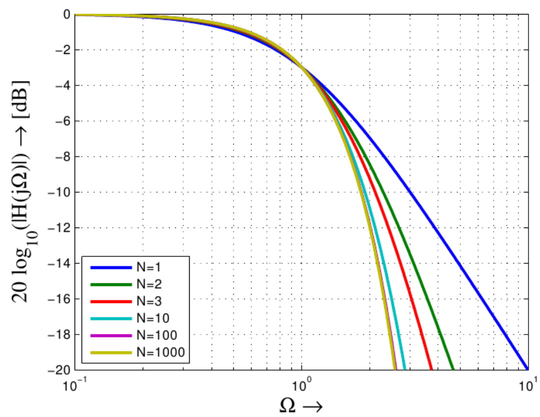
Pole: Alle Pole liegen in der linken s-Halbebene auf dem Einheitskreis im Abstand $\dfrac{\pi}{n}$

Filterordnung: $\boxed{n \geq \dfrac{\log\left(\dfrac{10^{A_{min}/10}-1}{10^{A_{max}/10}-1}\right)}{2\cdot\log\left(\dfrac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)}}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

7.5.2 Gauss - Filter - Approximation (kritisch gedämpfte Filter) (Allpolfilter) S.317

Übertragungsfunktion: $\boxed{H(s) = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{s}{\omega_c}\right)^n}}$

ω_c: $-3.01dB$-Punkt von jedem der n Teilfilter der Serieschaltung.



Durchlassbereich	Sperrbereich
$\lvert H(0)\rvert = H_{max} = 1$ $\lvert H(j\cdot 1)\rvert = \dfrac{H_{max}}{\sqrt{2}} \hat{=} -3.01dB$	$\lvert H(j\Omega)\rvert \approx \dfrac{1}{\Omega^n}$ mit $-n \cdot 20dB/Dek$ abfallend

Pole: n-facher Pol auf der negativen σ-Achse $\rightarrow$ kein Einschwingvorgang

Dämpfung α bei ω_D, dann muss $\boxed{\omega_c = \dfrac{\omega_D}{\sqrt{10^{\alpha/(10\,n)}-1}}}$ sein.

7.5.3 Bessel - Filter - Approximation (Allpolfilter) S.339

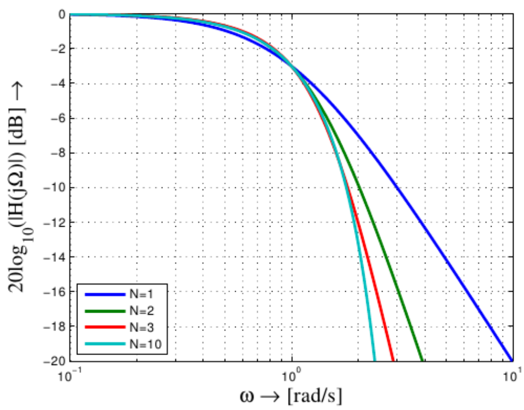
Übertragungsfunktion: $\boxed{H(S) = K\cdot \mathrm{e}^{-ST_0}}$

$\rightarrow$ konstante Gruppenlaufzeit

mit $T_0 = 1$ gilt: $\quad H(S) = K\,\mathrm{e}^{-S} = \dfrac{K}{\mathrm{e}^S} \approx \dfrac{K}{D(S)} = \dfrac{K}{B_n(S)}$

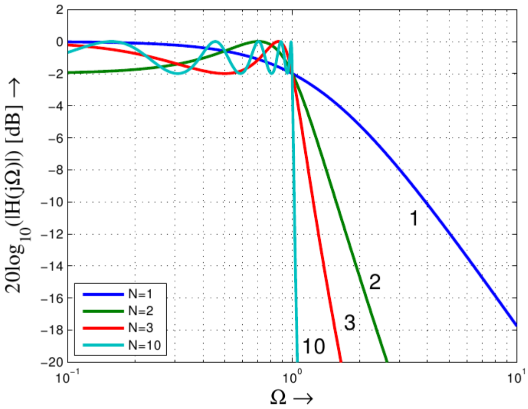
Bessel-Polynom:

$$\boxed{\begin{array}{l} B_n(S) = (2n-1)B_{n-1} + S^2 B_{n-2} \\ B_0(S) = 1 \quad ; \quad B_1(S) = S+1 \end{array}}$$



Pole: Alle Pole liegen in der linken s-Halbebene

7.5.4 Tschebyscheff I - Filter - Approximation (Allpolfilter) S.321



Amplitudengang: $$\boxed{|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2\cdot C_n^2(\Omega)}}}$$

Rippelfaktor: $e = \sqrt{10^{A_{max}/10}-1}$

Tschebyscheff-Polynom erster Art:

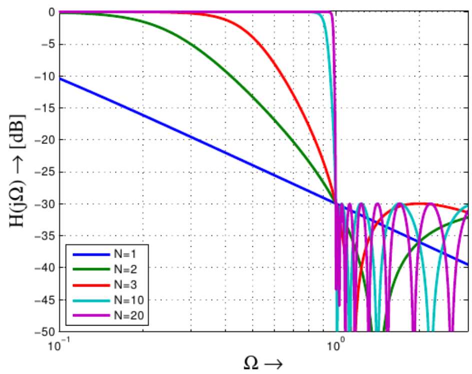
$$\boxed{\begin{aligned} &C_n(\Omega) = 2\cdot\Omega\cdot C_{n-1}(\Omega) - C_{n-2}(\Omega) \\ &C_0(\Omega) = 1 \quad ; \quad C_1(\Omega) = \Omega \end{aligned}}$$

Durchlassbereich	Sperrbereich
$\|H(0)\| = \begin{cases} H_{max} = 1\,; & n \text{ ungerade} \\ \dfrac{H_{max}}{\sqrt{1+e^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^2}}\,; & n \text{ gerade} \end{cases}$	$\|H(j\Omega)\| \approx \dfrac{1}{e\cdot C_n(\Omega)}$
$\|H(j\cdot 1)\| = \dfrac{H_{max}}{\sqrt{1+e^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^2}}$	mit $-n\cdot 20dB/Dek$ abfallend

Pole: Alle Pole liegen in der linken s-Halbebene auf einer Ellipse

Filterordnung: $$\boxed{n \geq \frac{\operatorname{arcosh}\sqrt{\dfrac{10^{A_{min}/10}-1}{10^{A_{max}/10}-1}}}{\operatorname{arcosh}\left(\dfrac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)}} \qquad n \in \mathbb{N} \qquad n = (\sum \text{Wendepunte im Durchlassbereich}) + 1$$

7.5.5 Tschebyscheff II - Filter - Approximation S.330



Amplitudengang: $$\boxed{|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{e^2\cdot C_n^2\left(\frac{1}{\Omega}\right)}}}}$$

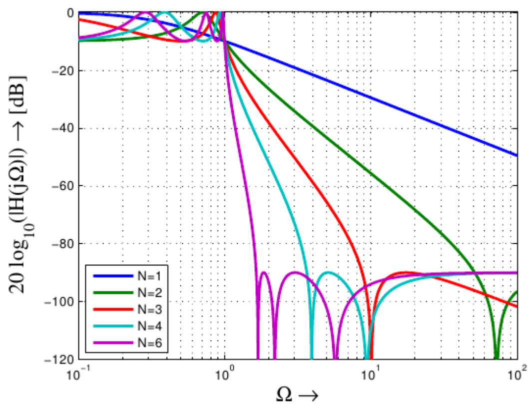
Rippelfaktor e und Tschebyscheff-Polynom $C_n$siehe Tschebyscheff I

Filterordnung: siehe Tschebyscheff I

Pole/Nullstellen: Pole in der linken s-Halbebene,
Nullstellen auf der $j\omega$-Achse

Durchlassbereich	Sperrbereich
streng monoton fallend	Oszillation zwischen 0 und $\dfrac{e}{\sqrt{1+e^2}}$ bzw. $-\infty\, dB$ und $20\log\left(\dfrac{e}{\sqrt{1+e^2}}\right) dB$

7.5.6 Cauer - Filter - Approximation S.333



Amplitudengang: $$\boxed{|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2 \cdot R_n^2(\Omega)}}}$$

Rippelfaktor: $e = \sqrt{10^{A_{max}/10} - 1}$

tschebyscheff-rationale Funktion:

$$R_n(\Omega) = k \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{(\Omega^2 - \Omega_{2i-1}^2)}{(\Omega^2 - \Omega_{2i}^2)} \qquad \text{gerade } R_n(\Omega) \text{ Funktion}$$

$$R_n(\Omega) = k\,\Omega \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(\Omega^2 - \Omega_{2i-1}^2)}{(\Omega^2 - \Omega_{2i}^2)} \qquad \text{ungerade } R_n(\Omega) \text{ Funktion}$$

Durchlassbereich	Sperrbereich
$\lvert H(0)\rvert = \begin{cases} H_{max} = 1\,; & n \text{ ungerade} \\ \frac{H_{max}}{\sqrt{1+e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}\,; & n \text{ gerade} \end{cases}$	Oszillation zwischen 0 und $\frac{1}{\sqrt{1+e^2\,L^2}}$
$\lvert H(j\cdot 1)\rvert = \frac{H_{max}}{\sqrt{1+e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$	bzw. $-\infty\,dB$ und $20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^2\,L^2}}\right)dB$

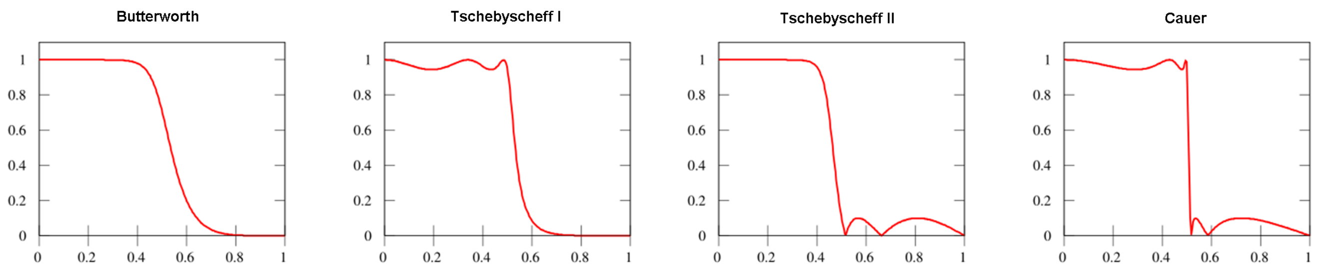
Pole/Nullstellen: Pole in der linken s-Halbebene, Nullstellen auf der $j\omega$-Achse $\qquad e\,L = \sqrt{10^{A_{min}/10} - 1}$

Filterordnung: $$\boxed{n \geq \frac{K\left(\left(\frac{\Omega_D}{\Omega_S}\right)^2\right) K\left(1 - \frac{10^{A_{max}/10}-1}{10^{A_{min}/10}-1}\right)}{K\left(1 - \left(\frac{\Omega_D}{\Omega_S}\right)^2\right) K\left(\frac{10^{A_{max}/10}-1}{10^{A_{min}/10}-1}\right)}, \quad \text{mit } K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k\,(\sin(\theta))^2}}\,d\theta}$$

7.5.7 Vergleich der Tiefpassapproximationen

Typische Amplitudengänge der vier Filtertypen.

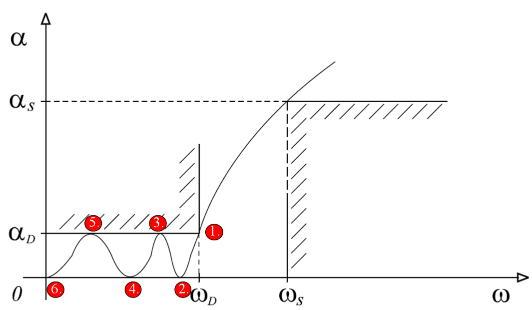
Übersicht: (Ordinate: Verstärkung (lin); Abszisse: Frequenz)



Butterworth Dämpfungsverlauf:
Dämpfung von $-n \cdot 20dB$ pro Dekade

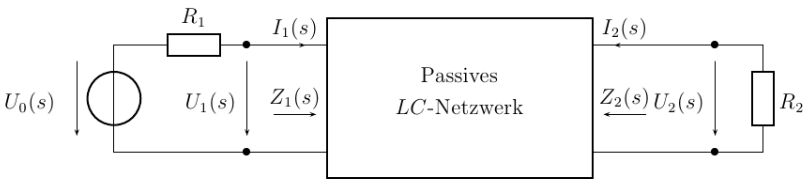
Tschebyscheff Dämpfungsverlauf:
Dämpfung von $-n \cdot 20dB$ pro Dekade

Tschebyscheff Dämpfungsverlauf im Toleranzschema:
Ein Filter mit Filterordnung n hat $n+1$ Berührpunkte unter dem Stempel. Man muss bei ω_D anfangen mit zählen.



6 Punkte $\Longrightarrow$ Filterordnung $n = 5$

7.6 Entwurf von LC-Filtern



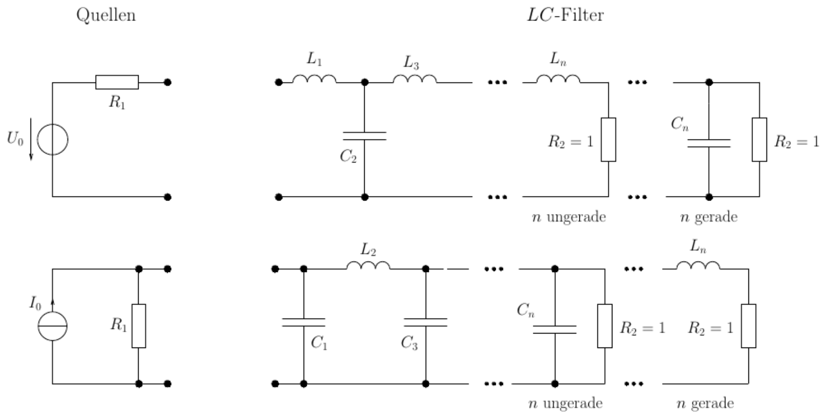
7.6.1 LC-Tiefpass bestimmen

Zwei Aufbauarten von Tiefpassfiltern:

- Minimal-L Schaltung (häufiger Fall)
  $\rightarrow$ obere Legende der Tabelle
- Minimal-C Schaltung
  $\rightarrow$ untere Legende der Tabelle

Die Tabellenwerte sind auf $R_2 = 1$ normiert.

$$\rightarrow \quad R_1 = \frac{R_{\text{Quelle}}}{R_{\text{Last}}}$$



7.6.2 Anpassung der Grenzfrequenz

Da die Tabellewerte auf die $3.01\,dB$-Frequenz normiert sind, müssen diese auf die gewünschte Grenzfrequenz entnormiert werden.

$$\boxed{L_{TP} = \frac{L_{tab}}{\Omega_{3.01\,dB}} \quad ; \quad C_{TP} = \frac{C_{tab}}{\Omega_{3.01\,dB}}}$$

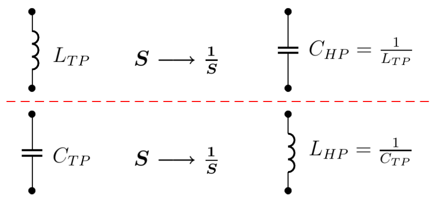
Butterworth-Filter $\quad \Omega_{3.01\,dB} = \sqrt[2n]{\dfrac{1}{10^{A_{max}/10} - 1}}$

Tschebyscheff-Filter $\quad \Omega_{3.01\,dB} = \cosh\left[\left(\dfrac{1}{n}\right) \operatorname{arcosh}\left(\dfrac{1}{e}\right)\right]$

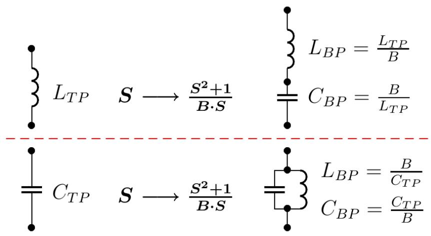
Gauss-Filter $\quad \Omega_{3.01\,dB} = \sqrt{\dfrac{2^{1/n} - 1}{10^{\frac{A_{max}}{10n}} - 1}}$

7.6.3 Filtertransformation von LC-Filtern

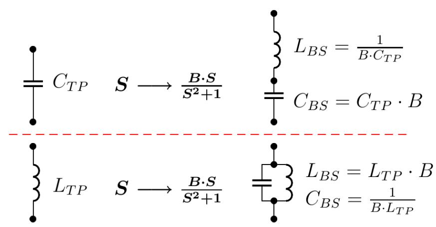
Tiefpass - Hochpass



Tiefpass - Bandpass



Tiefpass - Bandsperre



7.6.4 Entnormierung der Frequenz und des Impedanzniveaus

Um die L- und C-Werte für den Bau des Filters zu erhalten müssen die Normierten Grössen bezüglich der Frequenz und des Impedanzniveaus entnormiert werden.

$$\boxed{L = \frac{L_{FI} \cdot R_r}{\omega_r} \quad ; \quad C = \frac{C_{FI}}{\omega_r \cdot R_r}}$$

Signal / Funktion	Endliche Signalleistung $0 < P_n < \infty$, $(W_n = \infty)$		Endliche Signalenergie $W_n < \infty$
	periodisch $(\omega_0 = 2\pi/T_0)$	stochastisch (stationär)	abklingend, zeitbegrenzt
Autokorrelationsfunktion (AKF)	$\varphi(\tau) = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)f(t+\tau)dt$	$\varphi(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)dt$	$\varphi(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt$
Fourier-Transformation der AKF	$P_n = \frac{1}{T_0} \int\limits_{T_0/2}^{T_0/2} \varphi(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}d\tau$	$\Phi(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$	$E(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$
Rücktransformation der AKF	$\varphi(\tau) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0\tau}$	$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$	$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$
Amplitudenspektrum	$c_n = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$	–	–
Amplitudendichtespektrum	–	–	$F(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$
Leistungsspektrum	$P_n = \|c_n\|^2$	–	–
Leistungsdichtespektrum	–	$\Phi(j\omega) = E\left\{ \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\| \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega t}dt \right\|^2 \right\}$	–
Energiedichtespektrum	–	–	$E(j\omega) = \|F(j\omega)\|^2$
Energie	–	–	$W = \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)d\omega$
Leistung	$P = \varphi(0) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P_n$	$P = \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega)d\omega$	–
Fourier-Reihe	$f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$	–	–
Fourier-Integral	–	–	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Tabelle 1.5: Zusammenstellung einiger wichtiger Funktionen von Signalen der Klassen 1, 2a und 2b. $E\{\cdot\}$ ist der Erwartungswertoperator.

1.5.7 Zusammenstellung einiger Dichtefunktionen

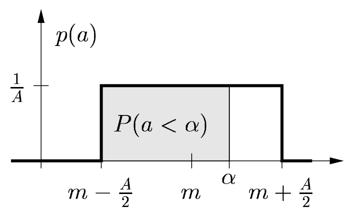
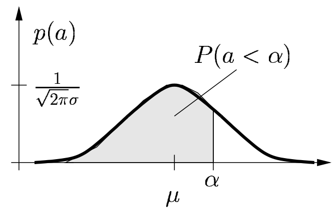
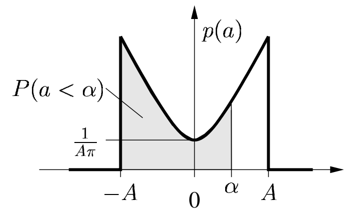
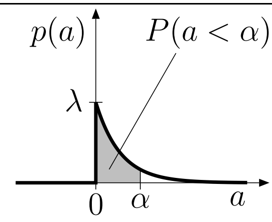
Verteilung	**gleichverteilt**	**gaussförmig**	**sinusförmig** (Zeitsignal)	**exponentiell**
				
Amplitudendichte $p(a) =$	$\begin{cases} \frac{1}{A} & \lvert a-m\rvert \le \frac{A}{2}, \\ 0 & \lvert a-m\rvert > \frac{A}{2}. \end{cases}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{A^2-a^2}} & \lvert a\rvert \le A, \\ 0 & \lvert a\rvert > A. \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda a} & a \ge 0, \\ 0 & a < 0. \end{cases}$
Wahrscheinlichkeit, dass die Amplitude a kleiner gleich α ist $P(a \le \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} p(a)da =$	$\begin{cases} 0 & \alpha < m-\frac{A}{2}, \\ \frac{\alpha-(m-\frac{A}{2})}{A}, & \lvert\alpha-m\rvert \le \frac{A}{2} \\ 1 & \alpha \ge m+\frac{A}{2}. \end{cases}$	$Q\left(\frac{\mu-\alpha}{\sigma}\right)$	$\begin{cases} 0 & \alpha \le -A, \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{A}\right)\right) & \lvert\alpha\rvert < A, \\ 1 & \alpha \ge A. \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \alpha < 0, \\ 1-e^{-\lambda\alpha} & \alpha \ge 0. \end{cases}$
linearer Mittelwert	m	μ	0	$\frac{1}{\lambda}$
Varianz	$\frac{\left(\frac{A}{2}\right)^2}{3} = \frac{A^2}{12}$	σ^2	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Leistung (quad. Mittelwert)	$m^2 + \frac{A^2}{12}$	$\mu^2 + \sigma^2$	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{2}{\lambda^2}$

Tabelle 1.4: Zusammenstellung einiger Verteilungen, wobei die Q-Funktion gemäss Formel 1.36 definiert ist. Ferner gilt: $A,\ m,\ \mu,\ \lambda,\ \sigma \in \mathbb{R}$ und $A,\ \lambda,\ \sigma > 0$.

Anhang zum Kapitel 1

1.A Tabelle der Q-Funktion

$$Q(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

ξ	$Q(\xi)$	ξ	$Q(\xi)$	$Q(\xi)$	ξ	$Q(\xi)$	ξ	$Q(\xi)$	ξ
0.0	5.000e−01	4.0	3.167e−05	5e−01	0.000	1e−05	4.265	6e−10	6.080
0.1	4.602e−01	4.1	2.066e−05	4e−01	0.253	9e−06	4.288	5e−10	6.109
0.2	4.207e−01	4.2	1.335e−05	3e−01	0.524	8e−06	4.314	4e−10	6.145
0.3	3.821e−01	4.3	8.540e−06	2e−01	0.842	7e−06	4.344	3e−10	6.190
0.4	3.446e−01	4.4	5.413e−06	1e−01	1.282	6e−06	4.378	2e−10	6.254
0.5	3.085e−01	4.5	3.398e−06	9e−02	1.341	5e−06	4.417	1e−10	6.361
0.6	2.743e−01	4.6	2.112e−06	8e−02	1.405	4e−06	4.465	9e−11	6.378
0.7	2.420e−01	4.7	1.301e−06	7e−02	1.476	3e−06	4.526	8e−11	6.396
0.8	2.119e−01	4.8	7.933e−07	6e−02	1.555	2e−06	4.611	7e−11	6.416
0.9	1.841e−01	4.9	4.792e−07	5e−02	1.645	1e−06	4.753	6e−11	6.439
1.0	1.587e−01	5.0	2.867e−07	4e−02	1.751	9e−07	4.775	5e−11	6.467
1.1	1.357e−01	5.1	1.698e−07	3e−02	1.881	8e−07	4.798	4e−11	6.501
1.2	1.151e−01	5.2	9.964e−08	2e−02	2.054	7e−07	4.825	3e−11	6.544
1.3	9.680e−02	5.3	5.790e−08	1e−02	2.326	6e−07	4.856	2e−11	6.604
1.4	8.076e−02	5.4	3.332e−08	9e−03	2.366	5e−07	4.892	1e−11	6.706
1.5	6.681e−02	5.5	1.899e−08	8e−03	2.409	4e−07	4.935	9e−12	6.721
1.6	5.480e−02	5.6	1.072e−08	7e−03	2.457	3e−07	4.991	8e−12	6.739
1.7	4.457e−02	5.7	5.990e−09	6e−03	2.512	2e−07	5.069	7e−12	6.758
1.8	3.593e−02	5.8	3.316e−09	5e−03	2.576	1e−07	5.199	6e−12	6.780
1.9	2.872e−02	5.9	1.818e−09	4e−03	2.652	9e−08	5.219	5e−12	6.807
2.0	2.275e−02	6.0	9.866e−10	3e−03	2.748	8e−08	5.241	4e−12	6.839
2.1	1.786e−02	6.1	5.303e−10	2e−03	2.878	7e−08	5.265	3e−12	6.880
2.2	1.390e−02	6.2	2.823e−10	1e−03	3.090	6e−08	5.293	2e−12	6.937
2.3	1.072e−02	6.3	1.488e−10	9e−04	3.121	5e−08	5.327	1e−12	7.034
2.4	8.198e−03	6.4	7.769e−11	8e−04	3.156	4e−08	5.367	9e−13	7.049
2.5	6.210e−03	6.5	4.016e−11	7e−04	3.195	3e−08	5.419	8e−13	7.066
2.6	4.661e−03	6.6	2.056e−11	6e−04	3.239	2e−08	5.491	7e−13	7.084
2.7	3.467e−03	6.7	1.042e−11	5e−04	3.291	1e−08	5.612	6e−13	7.105
2.8	2.555e−03	6.8	5.231e−12	4e−04	3.353	9e−09	5.630	5e−13	7.131
2.9	1.866e−03	6.9	2.600e−12	3e−04	3.432	8e−09	5.650	4e−13	7.161
3.0	1.350e−03	7.0	1.280e−12	2e−04	3.540	7e−09	5.673	3e−13	7.200
3.1	9.676e−04	7.1	6.238e−13	1e−04	3.719	6e−09	5.700	2e−13	7.256
3.2	6.871e−04	7.2	3.011e−13	9e−05	3.746	5e−09	5.731	1e−13	7.349
3.3	4.834e−04	7.3	1.439e−13	8e−05	3.775	4e−09	5.768	9e−14	7.363
3.4	3.369e−04	7.4	6.809e−14	7e−05	3.808	3e−09	5.817	8e−14	7.379
3.5	2.326e−04	7.5	3.191e−14	6e−05	3.846	2e−09	5.884	7e−14	7.396
3.6	1.591e−04	7.6	1.481e−14	5e−05	3.891	1e−09	5.998	6e−14	7.417
3.7	1.078e−04	7.7	6.803e−15	4e−05	3.944	9e−10	6.015	5e−14	7.441
3.8	7.235e−05	7.8	3.095e−15	3e−05	4.013	8e−10	6.034	4e−14	7.470
3.9	4.810e−05	7.9	1.395e−15	2e−05	4.107	7e−10	6.055	3e−14	7.508
4.0	3.167e−05	8.0	6.221e−16	1e−05	4.265	6e−10	6.080	2e−14	7.561

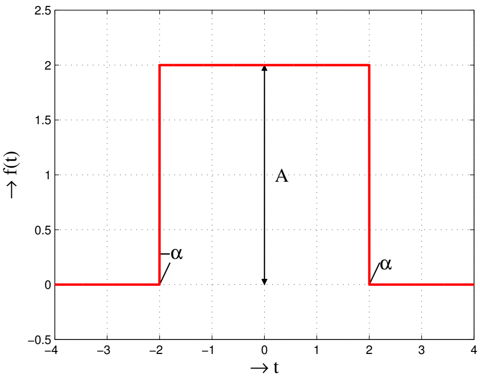
Anhang zum Kapitel 2

2.A Tabelle von Fourier-Transformationspaaren

Die Fourier-Transformationspaare sind zum Teil von [6, 47, 69] entnommen. Es gilt jeweils: $0 < (\alpha, \beta, t_0, \omega_0, A) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

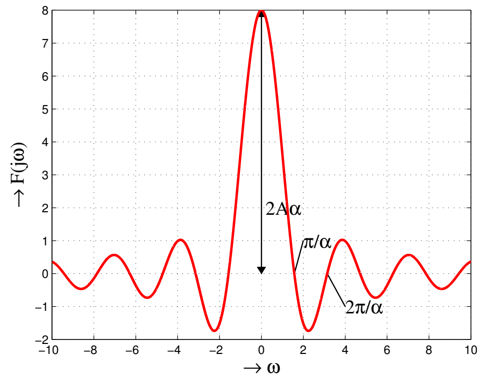
<table>
<tr><th>#</th><th>Zeitfunktion: $\boldsymbol{f(t)}$</th><th>Spektralfunktion: $\boldsymbol{F(j\omega)}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>

$$A \cdot p_\alpha(t) = \begin{cases} A & \text{für } |t| < \alpha, \\ \frac{A}{2} & \text{für } |t| = \alpha, \\ 0 & \text{für } |t| > \alpha. \end{cases}$$



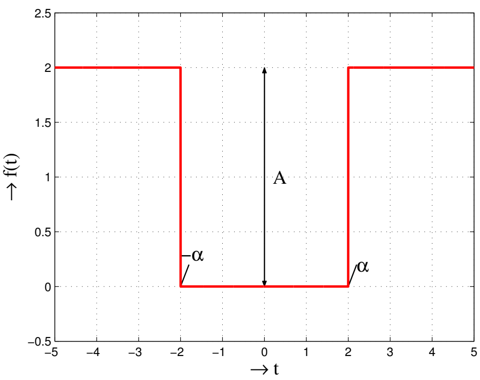
</td><td>

$\frac{2A}{\omega}\sin(\alpha\omega) = 2A\alpha \cdot sinc(\alpha\omega)$



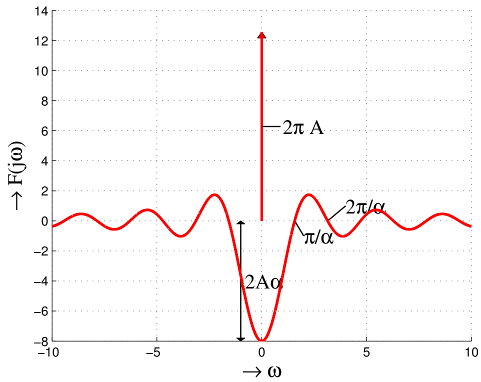
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

$$A(1 - p_\alpha(t)) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| < \alpha, \\ \frac{A}{2} & \text{für } |t| = \alpha, \\ A & \text{für } |t| > \alpha. \end{cases}$$



</td><td>

$2 \cdot \pi \cdot A\delta(\omega) - 2A\alpha \cdot sinc(\alpha\omega)$



</td></tr>
</table>

Tabelle 2.3: Fourier-Transformationspaare

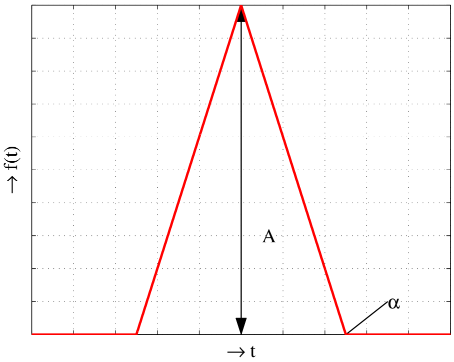
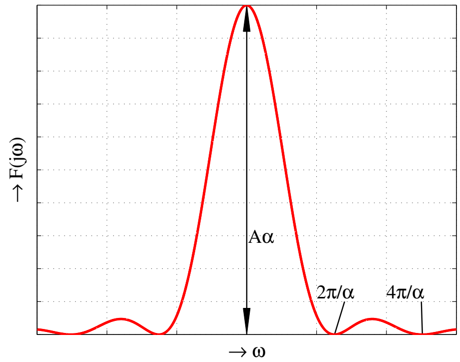
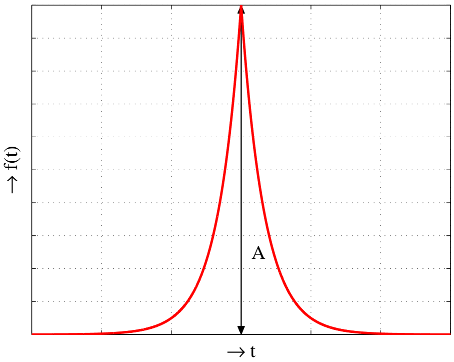
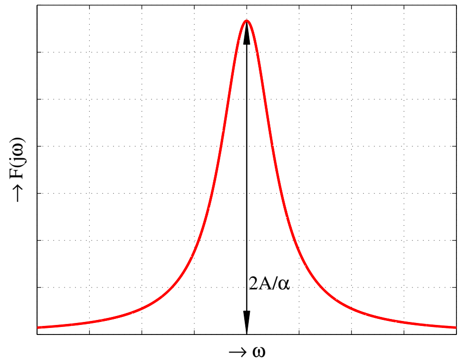
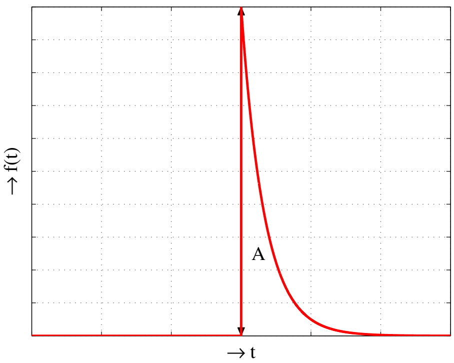
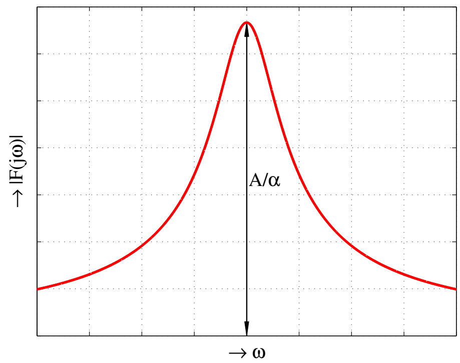
<table>
<tr><th>#</th><th>Zeitfunktion: $\boldsymbol{f(t)}$</th><th>Spektralfunktion: $\boldsymbol{F(j\omega)}$</th></tr>
<tr><td>4</td><td>$A\cdot\Lambda_\alpha(t) = \begin{cases} A-\frac{A|t|}{\alpha} & \text{für } |t|<\alpha, \\ 0 & \text{für } |t|\geq 0. \end{cases}$
</td><td>$A\alpha\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)}{\frac{\alpha\omega}{2}}\right)^2 = A\alpha\cdot\left(sinc\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)\right)^2$
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$Ae^{-\alpha|t|}$
</td><td>$\frac{2\alpha A}{\alpha^2+\omega^2}$
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$Ae^{-\alpha t}u(t)$
</td><td>$A\frac{\alpha-j\omega}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{A}{\alpha+j\omega}$
</td></tr>
</table>

Tabelle 2.4: Fourier-Transformationspaare

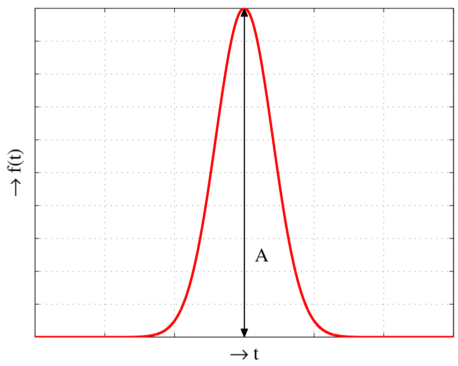
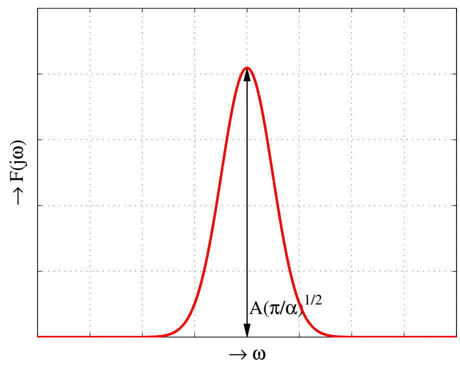
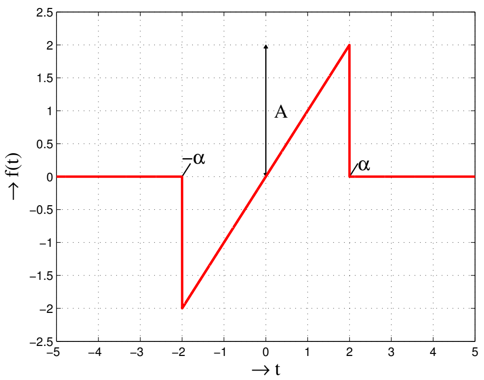
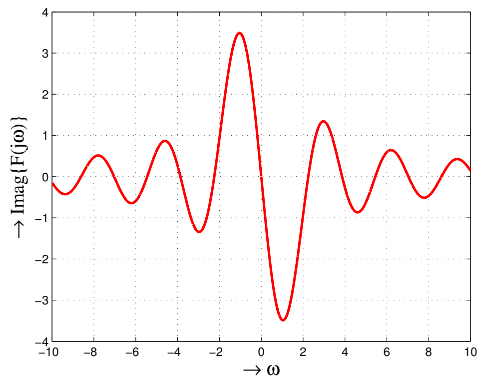
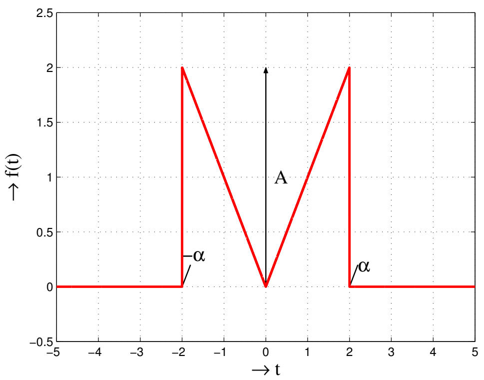
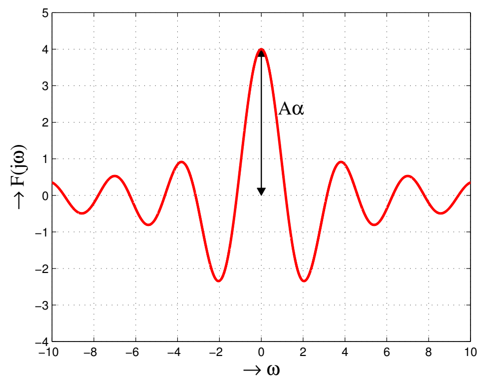
<table>
<tr><th>#</th><th>Zeitfunktion: $f(t)$</th><th>Spektralfunktion: $F(j\omega)$</th></tr>
<tr><td>7</td><td>$Ae^{-\alpha t^2}$

</td><td>$A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{-\omega^2}{4\alpha}}$

</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$e^{-\alpha t^2+\beta t}$</td><td>$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2-j2\alpha\beta\omega-\omega^2}{4\alpha}}$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$e^{\pm j\alpha t^2}$</td><td>$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\mp j\frac{\omega^2-\alpha\pi}{4\alpha}}$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$\frac{1}{t}\sin(\alpha t) = sinc_\alpha(t)$</td><td>$\pi \cdot p_\alpha(\omega)$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>$sinc(\alpha t)$</td><td>$\frac{\pi}{\alpha} \cdot p_\alpha(\omega)$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>$\frac{A\cdot t}{\alpha} \cdot p_\alpha(t)$

</td><td>$j\frac{2A}{\omega}\left(\cos(\omega\alpha) - \frac{\sin(\omega\alpha)}{\omega\alpha}\right)$

</td></tr>
<tr><td>13</td><td>$\frac{A\cdot\lvert t\rvert}{\alpha} \cdot p_\alpha(t)$

</td><td>$2A\alpha\left(\frac{\sin(\omega\alpha)}{\omega\alpha} - 2\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega\alpha}{2}\right)}{\omega\alpha}\right)^2\right)$

</td></tr>
</table>

Tabelle 2.5: Fourier-Transformationspaare

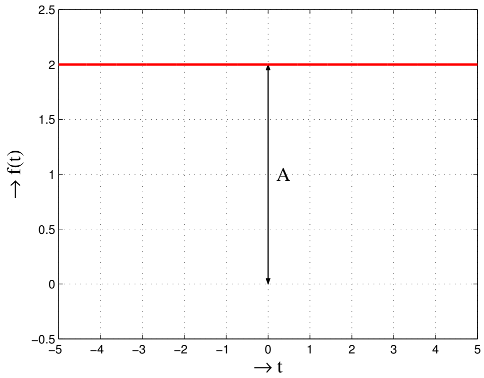
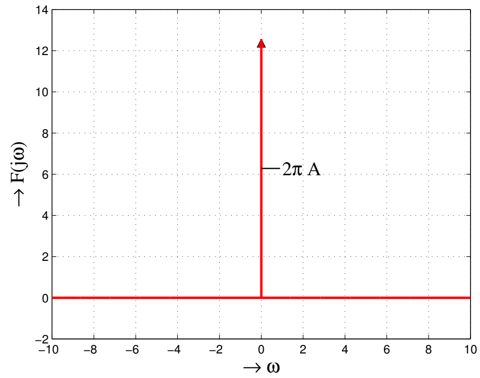
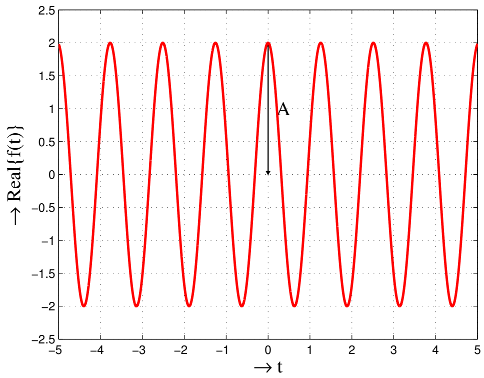
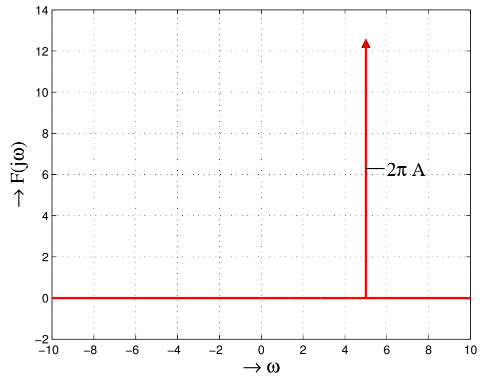
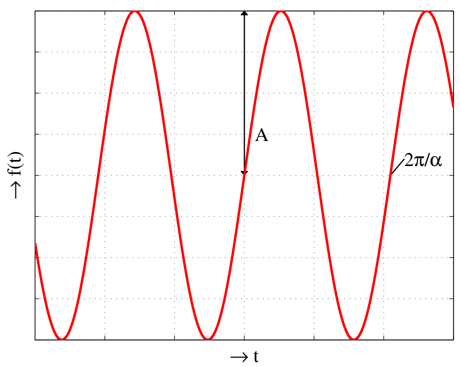
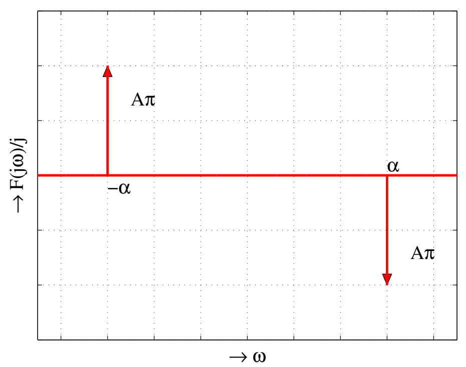
<table>
<tr><th>#</th><th>Zeitfunktion: $\boldsymbol{f(t)}$</th><th>Spektralfunktion: $\boldsymbol{F(j\omega)}$</th></tr>
<tr><td>14</td><td>$\left(\frac{1}{t}\sin(\alpha t)\right)^2 = \left(sinc_\alpha(t)\right)^2$</td><td>$\frac{\pi}{2} \cdot (2\alpha - |\omega|) \cdot p_{2\alpha}(\omega) = \pi\alpha \cdot \Lambda_{2\alpha}(\omega)$</td></tr>
<tr><td>15</td><td>$\frac{1}{|t|}\sin(\alpha t)$</td><td>$-j \cdot sgn(\omega) \ln \left|\frac{|\omega|+\alpha}{|\omega|-\alpha}\right|$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>A
</td><td>$2\pi \cdot A \cdot \delta(\omega)$
</td></tr>
<tr><td>17</td><td>$A \cdot e^{j\omega_0 t}$
</td><td>$2\pi A \cdot \delta(\omega - \omega_0)$
</td></tr>
<tr><td>18</td><td>$\delta(t - \beta)$</td><td>$e^{-j\beta\omega}$</td></tr>
<tr><td>19</td><td>$A\sin(\alpha t)$
</td><td>$jA\pi[\delta(\omega + \alpha) - \delta(\omega - \alpha)]$
</td></tr>
</table>

Tabelle 2.6: Fourier-Transformationspaare

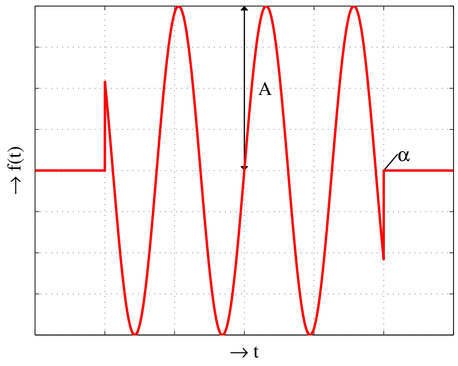
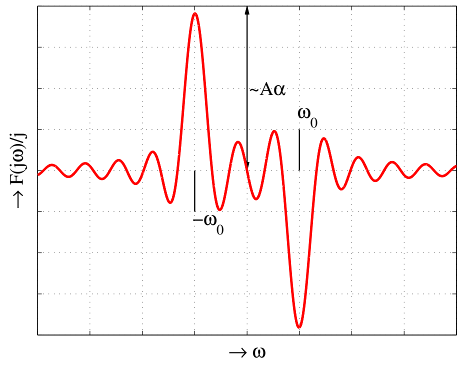
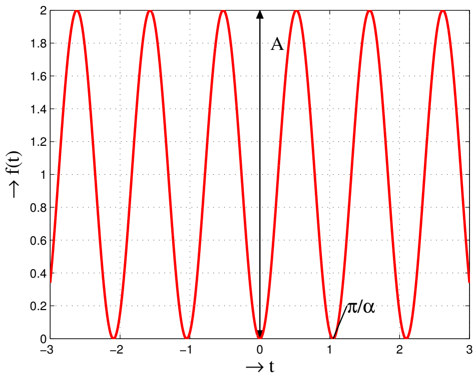
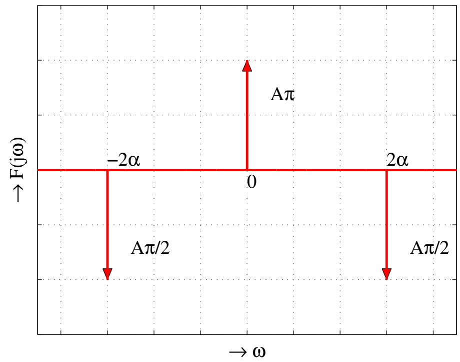
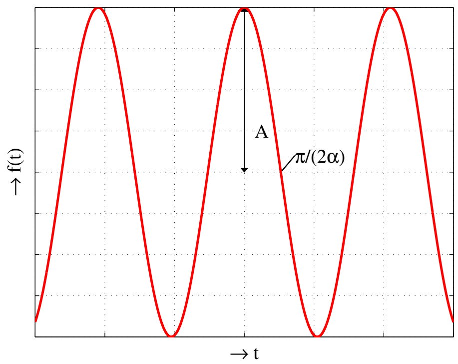
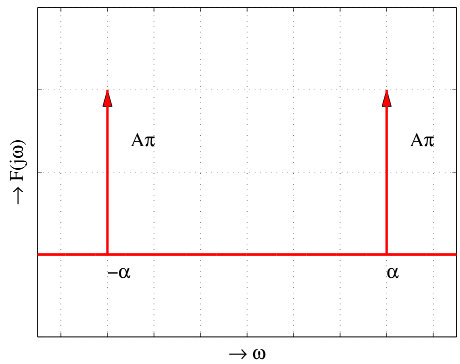
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
20	$A\sin(\omega_0 t)p_\alpha(t)$  	$jA\left(\frac{\sin(\alpha(\omega+\omega_0))}{\omega+\omega_0} - \frac{\sin(\alpha(\omega-\omega_0))}{\omega-\omega_0}\right)$ 
21	$A\left(\sin(\alpha t)\right)^2$  	$\frac{A\pi}{2}[-\delta(\omega+2\alpha)+2\delta(\omega)-\delta(\omega-2\alpha)]$ 
22	$A\cos(\alpha t)$  	$A\pi[\delta(\omega+\alpha)+\delta(\omega-\alpha)]$ 
23	$A\cdot\sin(\omega_0 t)e^{-at}u(t)$	$\frac{A\omega_0}{a^2+\omega_0^2-\omega^2+j2a\omega} = \frac{A\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$
24	$A\cdot\cos(\omega_0 t)e^{-at}u(t)$	$\frac{A(a+j\omega)}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$

Tabelle 2.7: Fourier-Transformationspaare

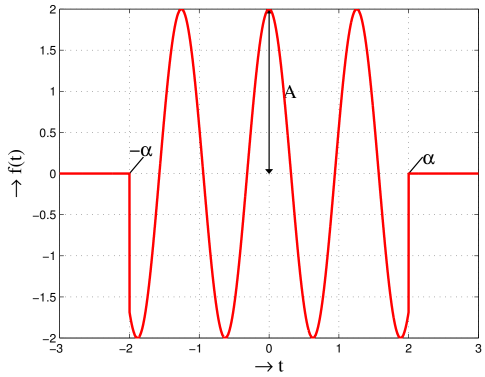
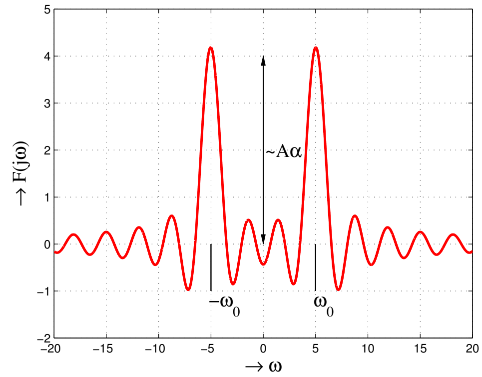
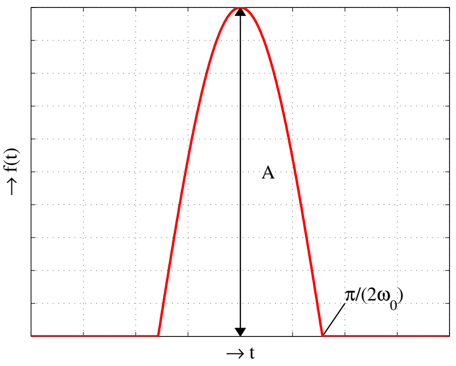
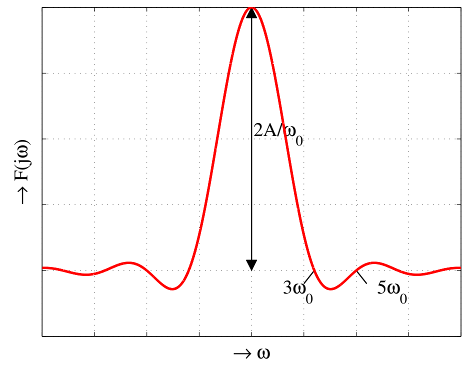
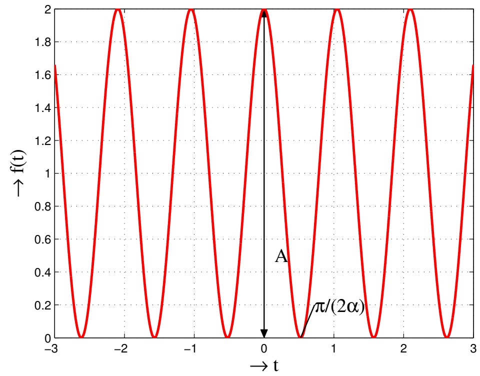
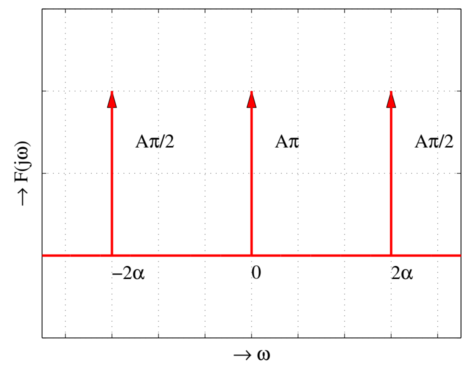
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
25	$A\cos(\omega_0 t)p_\alpha(t)$ 	$A\left(\frac{\sin(\alpha(\omega+\omega_0))}{\omega+\omega_0}+\frac{\sin(\alpha(\omega-\omega_0))}{\omega-\omega_0}\right)$ 
26	$A\cos(\omega_0 t)p_{\frac{\pi}{2\omega_0}}(t)$ 	$A\frac{2\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_0}\right)$ 
27	$A\left(\cos(\alpha t)\right)^2$ 	$\frac{A\pi}{2}[\delta(\omega+2\alpha)+2\delta(\omega)+\delta(\omega-2\alpha)]$ 
28	$\sin(\alpha t^2)$	$-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{\omega^2-\alpha\pi}{4\alpha}\right)$
29	$\cos(\alpha t^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\left(\frac{\omega^2-\alpha\pi}{4\alpha}\right)$

Tabelle 2.8: Fourier-Transformationspaare

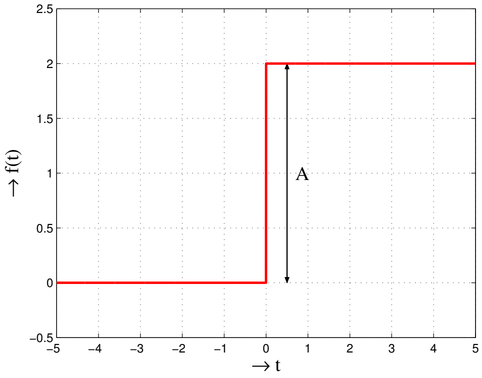
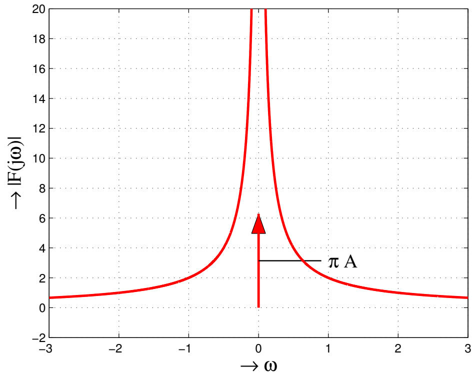
#	Zeitfunktion: $f(t)$	Spektralfunktion: $F(j\omega)$
30	$A \cdot u(t)$ 	$A \cdot \left(\pi \cdot \delta(\omega) - j\frac{1}{\omega}\right)$ 
31	$\frac{1}{t}$	$j\pi sgn(\omega)$
32	t^{-n}	$-j\pi\frac{(-j\omega)^{n-1}}{(n-1)!}sgn(\omega)$
33	$\|t\|$	$-\frac{2}{\omega^2}$
34	$r(t) = t \cdot u(t)$	$j\pi\frac{d\delta(\omega)}{dt} - \frac{1}{\omega^2}$
35	$A \cdot sgn(t)$	$\frac{-2jA}{\omega}$
36	$t^{-n}sgn(t)$	$(-j)^{n+1}\frac{2 \cdot n!}{\omega^{n+1}}$
37	$\sqrt{\|t\|}$	$-\sqrt{\frac{2\pi}{\|\omega\|}}$
38	$A \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0)$	$\frac{2\pi A}{t_0} \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{t_0})$
39	$A \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0 - \frac{t_0}{2})$	$\frac{2\pi A}{t_0} \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\delta(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{t_0})$
40	$A \cdot \sum\limits_{n=0}^{N-1} \delta(t - n \cdot t_0 - \beta + \frac{(N-1)t_0}{2})$	$Ae^{j\beta\omega}\frac{\sin(N\omega t_o/2)}{\sin(\omega t_0/2)}$
41	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0)\,(A + \alpha\cos(\omega_0 t))$	$\frac{2\pi}{t_0} \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left(A\delta(\omega - n\frac{2\pi}{t_0}) + \frac{\alpha}{2}\left(\delta(\omega - n\frac{2\pi}{t_0} + \omega_0) + \delta(\omega - n\frac{2\pi}{t_0} - \omega_0)\right)\right)$
42	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0)\,(A + \alpha\sin(\omega_0 t))$	$\frac{2\pi}{t_0} \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left(A\delta(\omega - n\frac{2\pi}{t_0}) + \frac{j\alpha}{2}\left(\delta(\omega - n\frac{2\pi}{t_0} + \omega_0) - \delta(\omega - n\frac{2\pi}{t_0} - \omega_0)\right)\right)$
43	$A\delta(t)$	A
44	$A\delta(t - t_0)$	$Ae^{-jt_0\omega}$
45	$A\,(\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0))$	$2A\cos(\omega t_0)$
46	$e^{j\beta t}\,(A + \alpha\cos(\omega_0 t))$	$2\pi\left(A\delta(\omega-\beta) + \frac{\alpha}{2}(\delta(\omega-\beta+\omega_0) + \delta(\omega-\beta-\omega_0))\right)$
47	$e^{j\beta t}\,(A + \alpha\sin(\omega_0 t))$	$2\pi\left(A\delta(\omega-\beta) + \frac{j\alpha}{2}(\delta(\omega-\beta+\omega_0) - \delta(\omega-\beta-\omega_0))\right)$
48	$A\,(1 - e^{-at})\,u(t)$	$\pi A\delta(\omega) - A\left(\frac{a}{a^2+\omega^2} + \frac{ja^2}{\omega(a^2+\omega^2)}\right)$
49	$sgn(t) \cdot A \cdot e^{-a\|t\|}$	$-2jA\frac{\omega}{\omega^2+a^2}$
50	$A \cdot e^{j\omega_0 t - a\|t\|}$	$\frac{2A}{a} \cdot \frac{a^2}{(\omega-\omega_0)^2+a^2}$
51	$A \cdot \cos(\omega_0 t)e^{-a\|t\|}$	$\frac{A}{a} \cdot \frac{2a^2(a^2+\omega_0^2+\omega^2)}{(a^2+\omega_0^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}$
52	$A \cdot p_\alpha(t - \beta)$	$2Ae^{-j\beta\omega}\frac{\sin(\alpha\omega)}{\omega} = \frac{jA}{\omega}\left(e^{-j\omega(\beta+\alpha)} - e^{-j\omega(\beta-\alpha)}\right)$
53	$A \cdot e^{j\omega_0 t}p_\alpha(t)$	$2A\frac{\sin(\alpha(\omega_0-\omega))}{\omega_0-\omega}$
54	$A \cdot (p_\alpha(t - \beta) + p_\alpha(t + \beta))$	$2A\frac{\cos(\beta\omega)\sin(\alpha\omega)}{\omega}$

Tabelle 2.9: Fourier-Transformationspaare

2.B Tabelle von Laplace-Transformationspaaren

Die Transformationspaare sind mehrheitlich [6, 7, 21, 47, 69] entnommen. Es gilt: $0 < \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, a, $\nu \in \mathbb{C}$, $s = \sigma + j\omega$ und somit $\Re\{s\} = \sigma$ und $\Im\{s\} = \omega$.

#	$\boldsymbol{f(t)}$, wobei $f(t) = 0$ für $t < 0$	$\boldsymbol{F(s)}$ mit **Konvergenzbereich**
1	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df(0)}{dt} - \ldots - \frac{d^{n-1} f(0)}{d^{n-1} t}$
2	$\int\limits_0^t f(x) dx$	$\frac{F(s)}{s}$
3	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_0^\infty F(s) ds$
4	$f(t-\alpha) u(t-\alpha)$	$e^{-s\alpha} F(s)$
5	$f(t+\alpha) u(t+\alpha)$	$e^{+s\alpha} \left(F(s) - \int\limits_0^a e^{-st} f(t) dt \right)$
6	$f_1(t) * f_2(t) * f_3(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s) \cdot F_3(s)$
7	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} (F_1(s) * F_2(s))$
8	$\lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$	$\lim\limits_{s \to \infty} sF(s)$
9	$\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$	$\lim\limits_{s \to 0} sF(s)$
10	$u(t)$	$\frac{1}{s}$ mit $\sigma > 0$
11	$\delta(t)$	1 mit $\sigma \in \mathbb{R}$
12	$\frac{d\delta(t)}{dt}$	s
13	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
14	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
15	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
16	$\frac{n! 4^n t^{n-\frac{1}{2}}}{(2n)! \sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{s^n \sqrt{s}}$
17	$J_\nu(at)$ mit $\Re\{\nu\} > -1$	$\frac{\left(\sqrt{s^2+a^2} - s\right)^\nu}{a^\nu \sqrt{s^2+a^2}}$ mit $\sigma > \lvert\Im\{a\}\rvert$
18	$I_\nu(at)$ mit $\Re\{\nu\} > -1$	$\frac{\left(s - \sqrt{s^2-a^2}\right)^\nu}{a^\nu \sqrt{s^2-a^2}}$ mit $\sigma > \lvert\Re\{a\}\rvert$
19	$\frac{\sin(\alpha t)}{t}$	$\underbrace{\arctan}_{\tan^{-1}} \left(\frac{\alpha}{s}\right)$ mit $\sigma > 0$

Tabelle 2.10: Laplace-Transformationspaare

$J_\nu(at)$ ist die **Bessel-** oder **Zylinderfunktion $\boldsymbol{\nu}$. Ordnung 1. Gattung** und $I_\nu(at)$ ist die **modifizierte Bessel-Funktion $\boldsymbol{\nu}$. Ordnung** [7].
Die folgende Tabelle ist nach dem Grad des Nenners geordnet. Die Tabelle ist bis zum Nennergrad 3 vollständig und stammt von [6, 21].

$\boldsymbol{F(s)}$,	**Konvergenzbereich**	$\boldsymbol{f(t)}$, wobei $\boldsymbol{f(t)=0}$ für $t<0$ mit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}$.
1,	$\sigma\in\mathbb{R}$	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$,	$\sigma>0$	$1\ (\equiv u(t))$
$\frac{1}{s+\alpha}$,	$\sigma>-\Re\{\alpha\}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{s^2}$,	$\sigma>0$	t
$\frac{1}{s(s+\alpha)}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},0\}$	$\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}\}$	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}\}$	$\frac{\alpha e^{-\alpha t}-\beta e^{-\beta t}}{\alpha-\beta}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$,	$\sigma>-\Re\{\alpha\}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$,	$\sigma>-\Re\{\alpha\}$	$e^{-\alpha t}(1-\alpha t)$
$\frac{1}{s^2-\alpha^2}$,	$\sigma>\|\Re\{\alpha\}\|$	$\frac{\sinh(\alpha t)}{\alpha}$
$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$,	$\sigma>\|\Re\{\alpha\}\|$	$\cosh(\alpha t)$
$\frac{1}{s^2+\alpha^2}$,	$\sigma>\|\Im\{\alpha\}\|$	$\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}$
$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$,	$\sigma>\|\Im\{\alpha\}\|$	$\cos(\alpha t)$
$\frac{1}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$,	$\sigma>\|\Im\{\alpha\}\|-\Re\{\beta\}$	$\frac{e^{-\beta t}\sin(\alpha t)}{\alpha}$
$\frac{s}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$,	$\sigma>\|\Im\{\alpha\}\|-\Re\{\beta\}$	$\frac{e^{-\beta t}(\alpha\cos(\alpha t)-\beta\sin(\alpha t))}{\alpha}$
$\frac{1}{s^3}$,	$\sigma>0$	$\frac{t^2}{2}$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},0\}$	$\frac{e^{-\alpha t}+\alpha t-1}{\alpha^2}$
$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\},0\}$	$\frac{(\alpha-\beta)+\beta e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\beta t}}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},0\}$	$\frac{1-e^{-\alpha t}-\alpha te^{-\alpha t}}{\alpha^2}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\},\Re\{\gamma\}\}$	$\frac{(\gamma-\beta)e^{-\alpha t}+(\alpha-\gamma)e^{-\beta t}+(\beta-\alpha)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\},\Re\{\gamma\}\}$	$\frac{\alpha(\beta-\gamma)e^{-\alpha t}+\beta(\gamma-\alpha)e^{-\beta t}+\gamma(\alpha-\beta)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\},\Re\{\gamma\}\}$	$\frac{-\alpha^2(\beta-\gamma)e^{-\alpha t}-\beta^2(\gamma-\alpha)e^{-\beta t}-\gamma^2(\alpha-\beta)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)^2}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}\}$	$\frac{e^{-\alpha t}-[1+(\beta-\alpha)t]e^{-\beta t}}{(\beta-\alpha)^2}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)^2}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}\}$	$\frac{-\alpha e^{-\alpha t}+[\alpha+t\beta(\beta-\alpha)]e^{-\beta t}}{(\beta-\alpha)^2}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)(s+\beta)^2}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}\}$	$\frac{\alpha^2e^{-\alpha t}+\beta(\beta-2\alpha-t\beta^2+\alpha\beta t)e^{-\beta t}}{(\beta-\alpha)^2}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^3}$,	$\sigma>-\Re\{\alpha\}$	$\frac{t^2e^{-\alpha t}}{2}$
$\frac{s}{(s+\alpha)^3}$,	$\sigma>-\Re\{\alpha\}$	$\frac{(2-\alpha t)te^{-\alpha t}}{2}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)^3}$,	$\sigma>-\Re\{\alpha\}$	$\frac{(2-4\alpha t+\alpha^2t^2)e^{-\alpha t}}{2}$
$\frac{1}{s[(s+\beta)^2+\alpha^2]}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\beta\}-\|\Im\{\alpha\}\|,0\}$	$\frac{\alpha-e^{-\beta t}[\alpha\cos(\alpha t)+\beta\sin(\alpha t)]}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}$
$\frac{1}{s(s^2+\alpha^2)}$,	$\sigma>\|\Im\{\alpha\}\|$	$\frac{1-\cos(\alpha t)}{\alpha^2}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$,	$\sigma>-\min\{-\|\Im\{\beta\}\|,\Re\{\alpha\}\}$	$\frac{\beta e^{-\alpha t}+\alpha\sin(\beta t)-\beta\cos(\beta t)}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$,	$\sigma>-\min\{-\|\Im\{\beta\}\|,\Re\{\alpha\}\}$	$\frac{-\alpha e^{-\alpha t}+\alpha\cos(\beta t)+\beta\sin(\beta t)}{\alpha^2+\beta^2}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$,	$\sigma>-\min\{-\|\Im\{\beta\}\|,\Re\{\alpha\}\}$	$\frac{\alpha^2e^{-\alpha t}-\alpha\beta\sin(\beta t)+\beta^2\cos(\beta t)}{\alpha^2+\beta^2}$
$\frac{1}{(s+\alpha)[(s+\beta)^2+\gamma^2]}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}-\|\Im\{\gamma\}\|\}$	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}\cos(\gamma t)+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}e^{-\beta t}\sin(\gamma t)}{(\beta-\alpha)^2+\gamma^2}$
$\frac{s}{(s+\alpha)[(s+\beta)^2+\gamma^2]}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}-\|\Im\{\gamma\}\|\}$	$\frac{-\alpha e^{-\alpha t}+\alpha e^{-\beta t}\cos(\gamma t)-\frac{\alpha\beta-\beta^2-\gamma^2}{\gamma}e^{-\beta t}\sin(\gamma t)}{(\beta-\alpha)^2+\gamma^2}$
$\frac{s^2}{(s+\alpha)[(s+\beta)^2+\gamma^2]}$,	$\sigma>-\min\{\Re\{\alpha\},\Re\{\beta\}-\|\Im\{\gamma\}\|\}$	$\frac{\alpha^2e^{-\alpha t}+[(\alpha-\beta)^2+\gamma^2-\alpha^2]e^{-\beta t}\cos(\gamma t)-\left(\alpha\gamma+\beta\left(\gamma-\frac{\beta(\alpha-\beta)}{\gamma}\right)\right)e^{-\beta t}\sin(\gamma t)}{(\beta-\alpha)^2+\gamma^2}$
$\frac{1}{s^4}$,	$\sigma>0$	$\frac{t^3}{6}$

Tabelle 2.11: Laplace-Transformationspaare

Anhang zum Kapitel 7

7.A Nomogramme zur Bestimmung der Filterordnung

Durch die Vorgaben von **minimaler Dämpfung** im **Sperrbereich** ($A_{\min}$), der **maximalen Dämpfung** im **Durchlassbereich** ($A_{\max}$), sowie der beiden normierten Eckfrequenzen Ω_S und Ω_D, lassen sich die dafür benötigte **Filterordnung** mit Hilfe der nachfolgenden **Nomogramme** bestimmen. Dazu bestimmt man die Lage des Punktes P_5 aus den Werten $A_{\max}$, $A_{\min}$ und Ω_S/Ω_D wie in der folgenden Skizze gezeigt. Die benötigte Filterordnung für das Tiefpassfilter entspricht dann dem Wert der nächst höher gelegenen Kurve ($\rightarrow n$).

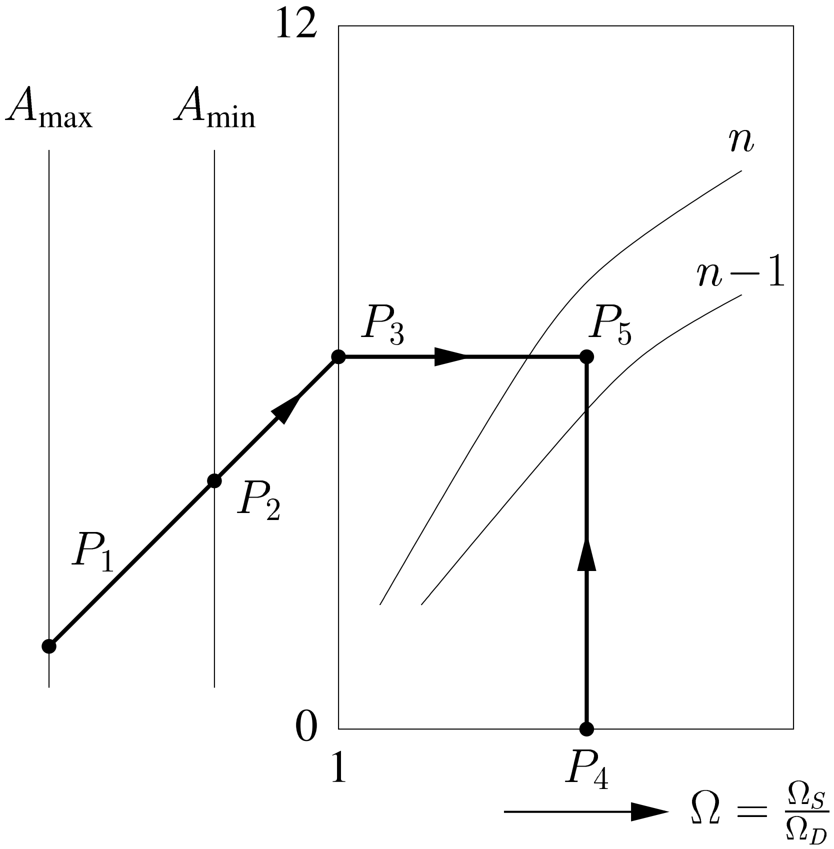


Abbildung 7.107: Gebrauch der Nomogramme

Aus den folgenden drei Nomogrammen (Abb. 7.108-7.110) ist ersichtlich, dass für die **Filterordnung** $\boldsymbol{n}$ (für fixe $A_{\min}$, $A_{\max}$ und $\Omega = \Omega_S/\Omega_D = \omega_S/\omega_D = f_S/f_D$) gilt:

$$\boldsymbol{n_{\mathbf{Butterworth}} \geq n_{\mathbf{Tschebyscheff_{(I,II)}}} \geq n_{\mathbf{Cauer}}}.$$

Zur Bestimmung der Filterordnung können auch die entsprechenden Formeln oder MATLAB-Befehle verwendet werden.

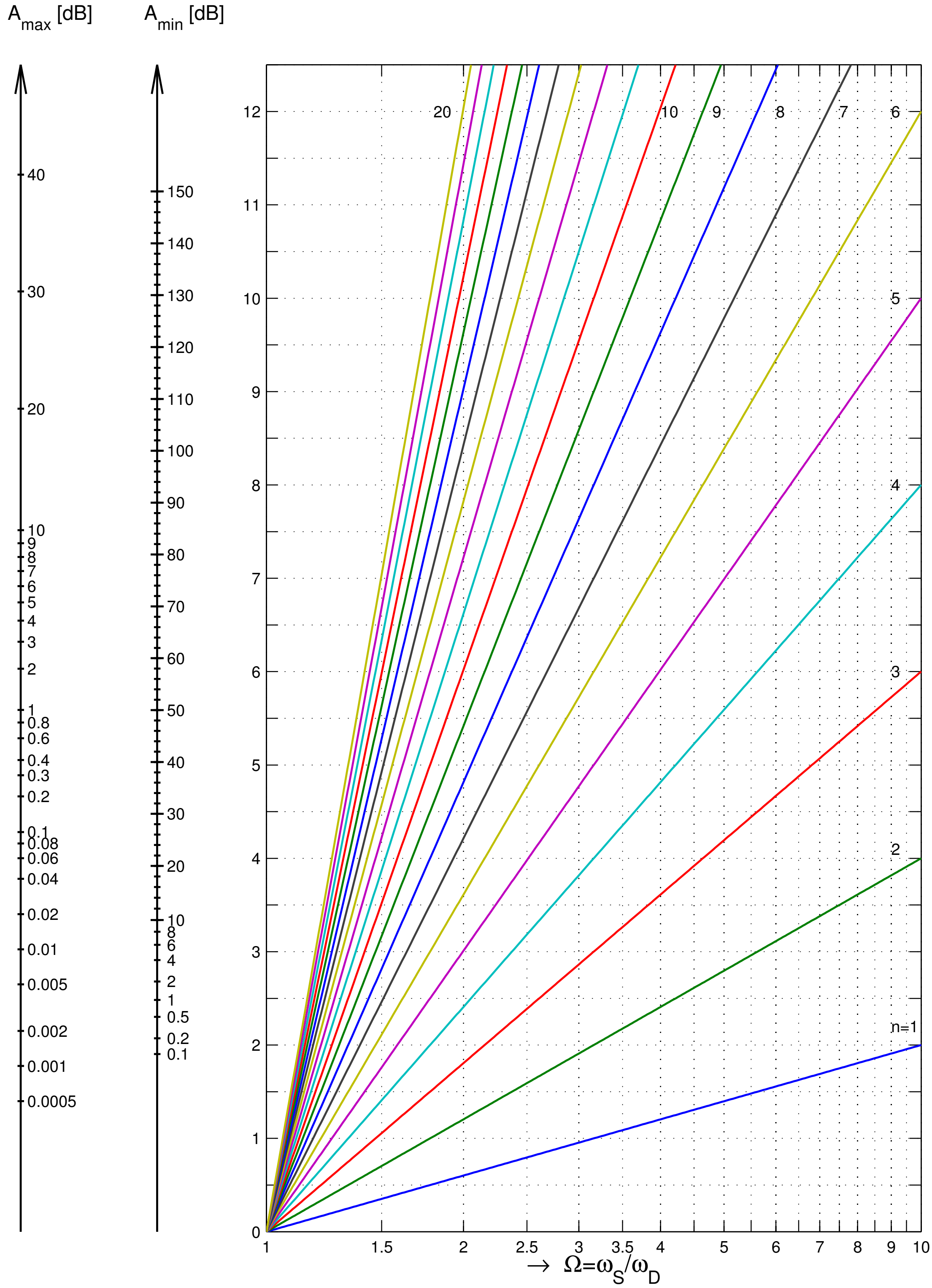


Abbildung 7.108: Nomogramm für Butterworth-Filter der Ordnung $n = 1 \ldots 20$

Es kann auch der MATLAB-Befehl `buttord` verwendet werden oder Formel 7.5:

$$n = \left\lceil \frac{\log\left[\dfrac{10^{A_{\min}/10} - 1}{10^{A_{\max}/10} - 1}\right]}{2 \cdot \log\left(\Omega_S/\Omega_D\right)} \right\rceil .$$

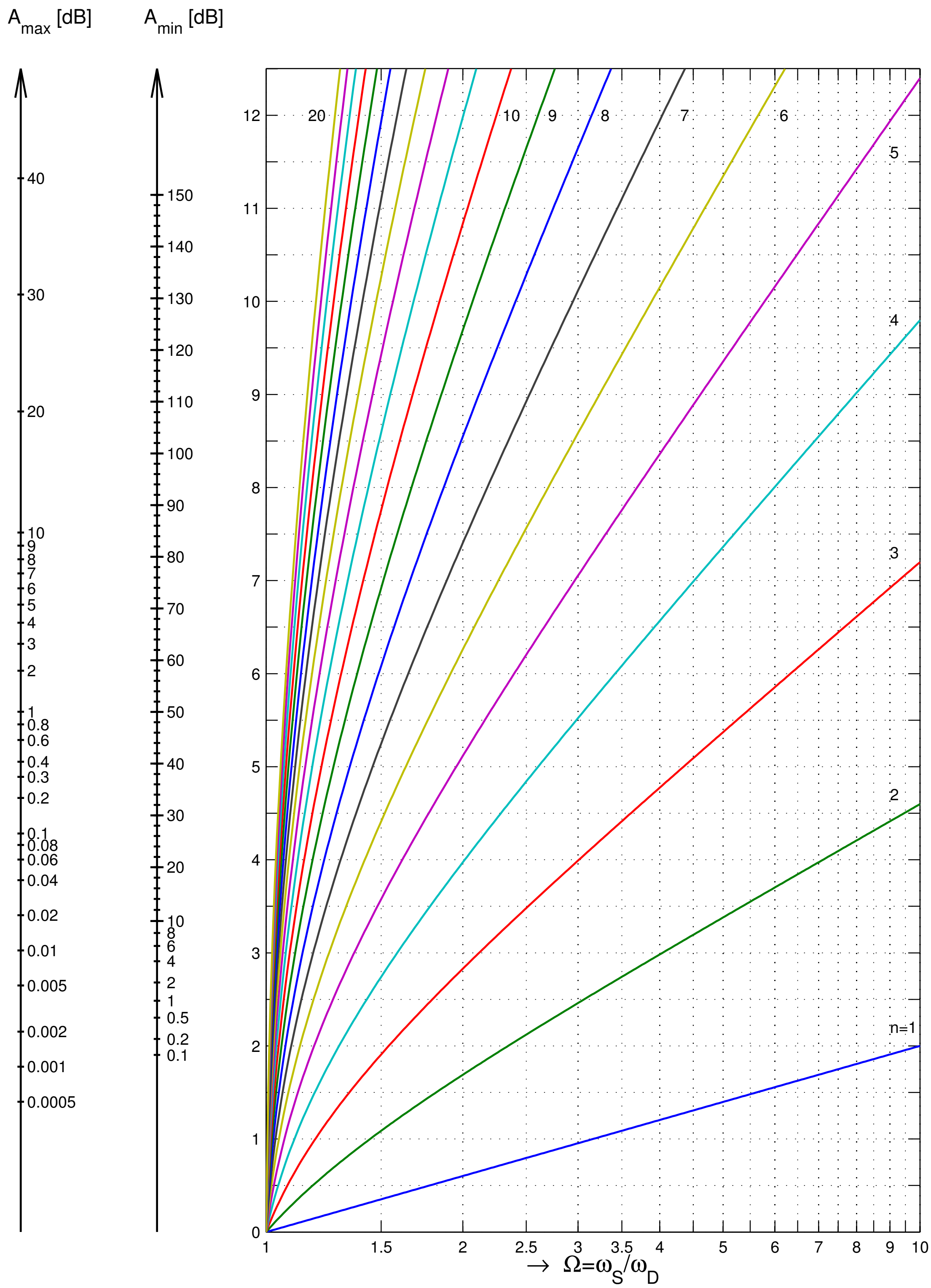


Abbildung 7.109: Nomogramm für Tschebyscheff (I und II)-Filter der Ordnung $n = 1 \dots 20$

Man kann auch den MATLAB-Befehl `cheb1ord` (`cheb2ord`) verwenden oder Formel 7.6:

$$n = \left\lceil \frac{\operatorname{Arcosh}\sqrt{\dfrac{10^{A_{\min}/10}-1}{10^{A_{\max}/10}-1}}}{\operatorname{Arcosh}\left(\Omega_S/\Omega_D\right)} \right\rceil .$$

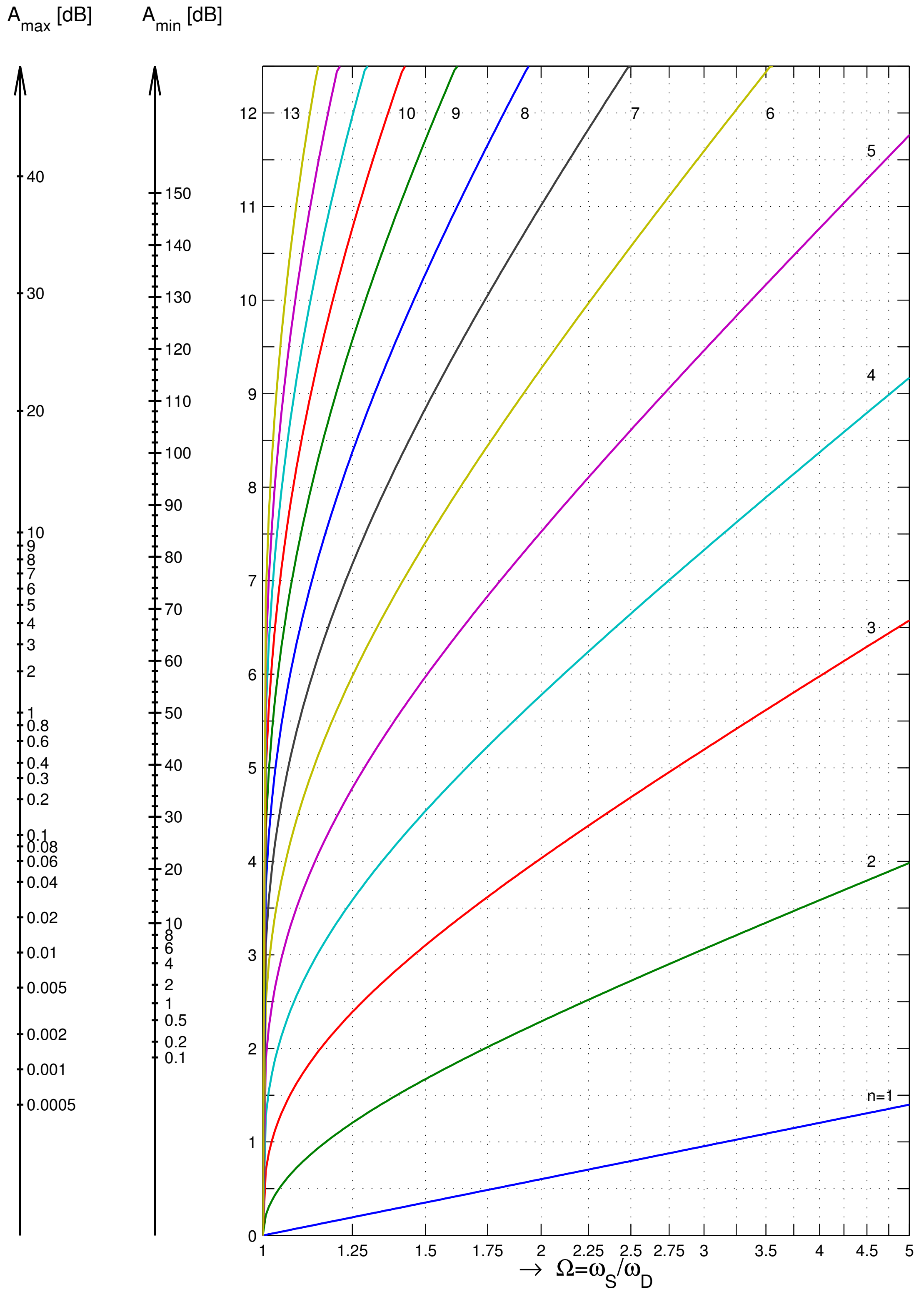


Abbildung 7.110: Nomogramm für Cauer-Filter (elliptische Filter) der Ordnung $n = 1 \ldots 13$

Man kann auch den MATLAB-Befehl `ellipord` verwenden oder Formel 7.7:

$$n = \left\lceil \frac{K\left(\left(\frac{\Omega_D}{\Omega_S}\right)^2\right) K\left(1 - \frac{10^{A_{\max}/10}-1}{10^{A_{\min}/10}-1}\right)}{K\left(1 - \left(\frac{\Omega_D}{\Omega_S}\right)^2\right) K\left(\frac{10^{A_{\max}/10}-1}{10^{A_{\min}/10}-1}\right)} \right\rceil, \quad \text{mit} \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k\sin^2\theta}}$$

7.B Normierte Tiefpassübertragungsfunktionen

7.B.1 Butterworth-Filter

$$\text{Ansatz:} \qquad |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\Omega^{2n}}$$

Zur Tabellierung der auf die **3.01 dB-Grenzfrequenz normierten Übertragungsfunktionen** $H(S)$ wurde $\max\limits_{S}|H(S)| = 1$ gewählt, wobei

$$H(S) = \frac{1}{D(S)} \quad \text{und} \quad D(S) = S^n + b_{n-1}S^{n-1} + \ldots + b_2S^2 + b_1S + b_0.$$

Die Koeffizienten von $D(S)$ können den Tabellen 7.2 und 7.3 entnommen oder mit Hilfe des MATLAB-Befehls `buttap` bestimmt werden. Die 3.01 dB-Grenzfrequenz kann mit der Beziehung

$$\omega_{3.01\mathrm{dB}} = \underbrace{\sqrt[2\cdot n]{\frac{1}{10^{A_{\max}/10}-1}}}_{\Omega_{3.01\ \mathrm{dB}}} \cdot \omega_D \tag{7.23}$$

aus den Grössen ω_D und $A_{\max}$ berechnet werden.

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9
1	1									
2	1	$\sqrt{2}$								
3	1	2	2							
4	1	2.61313	3.41421	2.61313						
5	1	3.23607	5.23607	5.23607	3.23607					
6	1	3.86370	7.46410	9.14162	7.46410	3.86370				
7	1	4.49396	10.09783	14.59179	14.59179	10.09783	4.49396			
8	1	5.12583	13.13707	21.84615	25.68836	21.84615	13.13707	5.12583		
9	1	5.75877	16.58172	31.16344	41.98638	41.98638	31.16344	16.58172	5.75877	
10	1	6.39245	20.43173	42.80206	64.88240	74.23343	64.88240	42.80206	20.43173	6.39245

Tabelle 7.2: Koeffizienten b von $D(S)$ der normierten UTF $H(S) = \frac{1}{D(S)}$ der kritisch-gedämpften Butterworth-Tiefpass-Filter ($|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Das bedeutet z. B., dass die UTF des normierten Butterworth-Tiefpass Filters 4. Ordnung wie folgt aussieht (Tabellen 7.2 und 7.3):

$$H(S) = \frac{1}{S^4 + 2.61313S^3 + 3.41421S^2 + 2.61313S + 1} = \frac{1}{(S^2 + 1.848S + 1)(S^2 + 0.765S + 1)}.$$

n	$D(S)$
1	$(1+S)$
2	$(1+\sqrt{2}S+S^2)$
3	$(1+S)(1+S+S^2)$
4	$(1+0.765S+S^2)(1+1.848S+S^2)$
5	$(1+S)(1+0.618S+S^2)(1+1.618S+S^2)$
6	$(1+0.518S+S^2)(1+1.414+S^2)(1+1.932S+S^2)$
7	$(1+S)(1+0.445S+S^2)(1+1.247S+S^2)(1+1.802S+S^2)$
8	$(1+0.390S+S^2)(1+1.111S+S^2)(1+1.663S+S^2)(1+1.962S+S^2)$
9	$(1+S)(1+0.347S+S^2)(1+S+S^2)(1+1.532S+S^2)(1+1.880S+S^2)$
10	$(1+0.313S+S^2)(1+0.908S+S^2)(1+1.414S+S^2)(1+1.782S+S^2)(1+1.975S+S^2)$

Tabelle 7.3: Faktorzerlegung von $D(S)$

Die konjugiert-komplexen Polpaare weisen folgende Polgüten auf:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q_{p1}	0.707	1	1.307	1.618	1.932	2.247	2.563	2.8794	3.1962
q_{p2}			0.541	0.618	0.707	0.802	0.900	1	1.1013
q_{p3}					0.518	0.555	0.601	0.6527	0.7071
q_{p4}							0.510	0.5321	0.5612
q_{p5}									0.5062

Tabelle 7.4: Polgüten der konj.-kompl. Polpaare der Butterworth-Filter

Aufgabe 7.7:
Bestimmen Sie die Polgüten der Butterworth-Filter von Tabelle 7.4 mit Hilfe des MATLAB-Befehl `buttap`.

7.B.2 Kritisch-gedämpfte Filter (Gauss-Filter)

Zur Tabellierung der normierten Übertragungsfunktionen wurde $\max_S |H(S)| = 1$, **sowie** $|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **(auf 3.01 dB-Grenzfrequenz normierte Übertragungsfunktionen)** gewählt:

$$H(S) = \frac{K}{D(S)}, \text{ wobei } \qquad D(S) = S^n + b_{n-1}S^{n-1} + \ldots + b_2S^2 + b_1S + b_0,$$

wobei immer gilt: $K = b_0$.

n	$b_0 = K$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9
1	1									
2	2.4142	3.1075								
3	7.5464	11.5420	5.8844							
4	27.9335	48.6020	31.7113	9.1958						
5	117.2829	226.1297	174.3977	67.2502	12.9663					
6	544.50	1143.3	1000.2	466.69	122.49	17.146				
7	2748.4	6206.9	6007.6	3230.4	1042.2	201.75	21.697			
8	14902.4	35866.6	37766.0	22723.4	8545.3	2056.6	309.37	26.5918		
9	86027.3	219071.5	247943.6	163695.5	69476.1	19658.1	3708.2	449.66	31.8079	
10	525025.6	1406573.6	1695730.8	1211455.9	567972.9	182595.8	40765.4	6240.7	626.97	37.327

Tabelle 7.5: Koeffizienten b von $D(S)$ und K der normierten UTF $H(S) = \frac{K}{D(S)}$ der kritisch-gedämpften Filter ($|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

Die Entormierung der Tabellenwerte erfolgt mit $S = \frac{s}{\omega_{3.01\text{dB}}}$ mit der maximalen Dämpfung $A_{\max}$ im Durchlassbereich ω_D und der Ordnung n

$$\omega_{3.01\text{dB}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2^{1/n} - 1}}{\sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10 \cdot n}} - 1}}}_{\Omega_{3.01 \text{ dB}}} \cdot \omega_D. \tag{7.24}$$

Beispiel 7.27: Die entnormierte UTF eines kritisch-gedämpften Filters der Ordnung 3 ist, mit $A_{\max} = 1$ dB, $\omega_D = 1000\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, und somit $\omega_{3.01\text{dB}} = \frac{\omega_D \cdot \sqrt{2^{1/n}-1}}{\sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10\cdot n}}-1}} = 1.8050 \cdot \omega_D = 1805.0\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ und $S = \frac{s}{\omega_{3.01\text{dB}}} = \frac{s}{1805.0}$.

$$H(s) = \frac{4.43811e10}{s^3 + 1.062154e4s^2 + 3.76057e7s + 4.43811e10},$$

was wir z.B. mit `[z n]=lp2lp(7.5464,[1 5.8844 11.5420 7.5464],1805)]; tf(z,n)`) erhalten können.

n	$D(S)$	$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{2}-1}}$
1	$(\omega_c + S)^1$	1
2	$(\omega_c + S)^2$	1.5538
3	$(\omega_c + S)^3$	1.9615
4	$(\omega_c + S)^4$	2.2990
5	$(\omega_c + S)^5$	2.5933
6	$(\omega_c + S)^6$	2.8576
7	$(\omega_c + S)^7$	3.0995
8	$(\omega_c + S)^8$	3.3240
9	$(\omega_c + S)^9$	3.5342
10	$(\omega_c + S)^{10}$	3.7327

Tabelle 7.6: Faktorzerlegung von $D(S)$

Bemerkung:

Wählt man als Normierung für jedes der n Teilfilter eines kritisch-gedämpften Filters n. Ordnung $\omega_c = 1$, so erhält man n identische Filter mit jeweils 3.01 dB Dämpfung bei $\omega = 1$, was bedeutet, dass die gesamte UTF bei $\omega = 1$ eine Dämpfung von $n \cdot$ 3.01 dB hat. Stellt man diese Filter dar, so erhält man für den Zähler der UTF jeweils 1 und die **Nennerkoeffizienten** ergeben sich zu den **Binomialkoeffizienten**, d. h. zum **Pascalschen Dreieck**.

Beispiel 7.28: UTF des kritisch-gedämpften Filters 5. Ordnung mit $\omega_c = 1$

$$H(s) = \frac{1}{s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1}$$

Mit dem Wissen des Pascalschen Dreiecks können wir die UTF jedes kritisch-gedämpften Filters n. Ordnung, mit $A_{\max}$, ω_D, und $\omega_c = \frac{\omega_D}{\sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10\cdot n}}-1}}$ direkt aufstellen:

$$H(s) = \frac{\omega_c^n}{\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i \omega_c^{n-i}}. \tag{7.25}$$

Beispiel 7.29: UTF des kritisch-gedämpften Filters 5. Ordnung mit $A_{\max} = 0.5$ dB und $\omega_D = 100$

$$\omega_c = \frac{\omega_D}{\sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10 \cdot n}} - 1}} = \frac{100}{\sqrt{10^{\frac{0.5}{10 \cdot n}} - 1}} = 6.552203 \cdot \omega_D = 655.2203 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

und somit ist die UTF (z.B. auch mit `[z n]=lp2lp(1,[1 5 10 10 5 1],655.2203)]; tf(z,n)`)

$$H(s) = \frac{1.2079e14}{s^5 + 3.2761e3s^4 + 4.2931e6s^3 + 2.8130e9s^2 + 9.2155e11s + 1.2079e14}.$$

Mit `bodemag` erhalten wir folgende Abbildung:

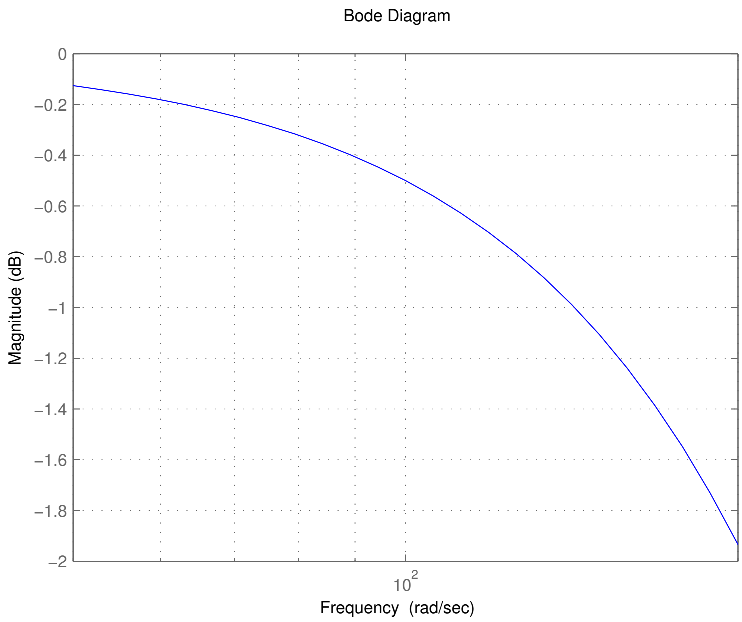


Abbildung 7.111: Amplitudengang des kritisch-gedämpften Filters 5. Ordnung mit $A_{\max} = 0.5$ dB und $\omega_D = 100 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

7.B.3 Tschebyscheff-Filter (Tschebyscheff-I)

$$\text{Ansatz:} \qquad |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + e^2 C_n^2(\Omega)}$$

Die Tschebyscheff-Polynome können der Tabelle 7.7 entnommen werden.

n	$C_n(\Omega)$
0	1
1	Ω
2	$2\Omega^2 - 1$
3	$4\Omega^3 - 3\Omega$
4	$8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$
5	$16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega$
6	$32\Omega^6 - 48\Omega^4 + 18\Omega^2 - 1$
7	$64\Omega^7 - 112\Omega^5 + 56\Omega^3 - 7\Omega$
8	$128\Omega^8 - 256\Omega^6 + 160\Omega^4 - 32\Omega^2 + 1$

Tabelle 7.7: Tschebyscheff-Polynome $C_n(\Omega)$

Zur Tabellierung der auf die **Rippelgrenzfrequenz normierten Übertragungsfunktionen** wurde $\max_S |H(S)| = 1$ gewählt:

$$H(S) = \frac{K}{D(S)}, \quad \text{wobei} \qquad D(S) = S^n + b_{n-1}S^{n-1} + \ldots + b_2S^2 + b_1S + b_0.$$

Die Koeffizienten können mit Hilfe vom MATLAB-Befehl `cheb1ap` bestimmt werden, oder den Tabellen 7.9 bis 7.18 entnommen werden. Die 3.01 dB-Grenzfrequenz ($\omega_{3.01\text{dB}}$) kann mit der Beziehung

$$\omega_{3.01\text{dB}} = \underbrace{\cosh\left[\left(\frac{1}{n}\right) \text{Arcosh}\left(\frac{1}{e}\right)\right]}_{\Omega_{3.01\ \text{dB}}} \cdot \omega_D \qquad (7.26)$$

aus den Grössen ω_D (Rippelgrenzfrequenz) und $e = \sqrt{10^{A_{\max}/10} - 1}$ bestimmt werden, oder der Tabelle 7.8 entnommen werden.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
$A_{\max}$=0.1 dB	6.55220	1.94322	1.38899	1.21310	1.13472	1.09293	1.06800	1.05193
$A_{\max}$=0.5 dB	2.86278	1.38974	1.16749	1.09310	1.05926	1.04103	1.03009	1.02301
$A_{\max}$=1 dB	1.96523	1.21763	1.09487	1.05300	1.03381	1.02344	1.01721	1.01316
$A_{\max}$=2 dB	1.30756	1.07414	1.03273	1.01837	1.01174	1.00815	1.00598	1.00458
$A_{\max}$=3 dB	1.00238	1.00059	1.00026	1.00015	1.00010	1.00007	1.00005	1.00004

Tabelle 7.8: Verhältnis $\left(\frac{\omega_{3.01\text{dB}}}{\omega_D}\right)$ zwischen der 3.01 dB-Grenzfrequenz ($\omega_{3.01\text{dB}}$) und der Rippelgrenzfrequenz (ω_D)

Aufgabe 7.8:

Wie gross ist das Verhältnis von $\left(\frac{\omega_{3.01\text{dB}}}{\omega_D}\right)$ bei einem Tschebyscheff-Filter der Ordnung $n = 23$ mit Rippel $e = 0.05$? Wie gross ist $A_{\max}$?

In den Tabellen 7.9 bis 7.23 sind die Werte jeweils auf die entsprechenden **Rippeleckfrequenzen** normiert. D. h., dass nur bezüglich der **Durchlassbereichseckfrequenz** $\boldsymbol{\omega_D}$ entormiert werden muss.

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	K
1	6.55220								6.55220
2	3.31329	2.37209							3.27610
3	1.63809	2.62953	1.93883						1.63805
4	0.82851	2.02550	2.62680	1.80377					0.819025
5	0.40951	1.42556	2.39696	2.77071	1.74396				0.4095127
6	0.20713	0.90176	2.04784	2.77908	2.96575	1.71217			0.2047564
7	0.10238	0.56179	1.48293	2.70514	3.16925	3.18350	1.69322		0.102378
8	0.05179	0.32645	1.06667	2.15932	3.41855	3.56485	3.41297	1.68104	0.0511891

Tabelle 7.9: Koeffizienten von $D(S)$ für eine UTF mit 0.1 dB Rippel ($e = 0.152620 = \sqrt{10^{0.1/10} - 1}$)

Aufgabe 7.9:
Bestimmen Sie für ein normiertes Tschebyscheff-TP-Filter der Ordnung 6 alle Koeffizienten b_0 bis b_6 sowie K. Was ist die Beziehung von K und b_0?

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	K
1	2.86278								2.86278
2	1.51620	1.42562							1.43129
3	0.71569	1.53490	1.25291						0.71569
4	0.37905	1.02546	1.71687	1.19739					0.35785
5	0.17892	0.75252	1.30957	1.93737	1.17249				0.17892
6	0.09476	0.43237	1.17186	1.58976	2.17184	1.15918			0.08946
7	0.04473	0.28207	0.75565	1.64790	1.86941	2.41265	1.15122		0.04473
8	0.02369	0.15254	0.57356	1.14859	2.18402	2.14922	2.65675	1.14608	0.02237

Tabelle 7.10: Koeffizienten von $D(S)$ für eine UTF mit 0.5 dB Rippel ($e = 0.349$)

Das bedeutet z.B., dass die UTF des normierten Tschebyscheff-I Tiefpass-Filters 4. Ordnung mit 0.5 dB Rippel wie folgt aussieht:

$$H(S) = \frac{0.35785}{S^4 + 1.19739 \cdot S^3 + 1.71687 \cdot S^2 + 1.02546 \cdot S + 0.37905}$$

und die bezüglich $\omega_D = 100\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ entnormierte **UTF** $\left(S \rightarrow \frac{s}{\omega_D} = \frac{s}{100}\right)$ wie folgt lautet[10]:
$H(s) = \frac{35785000}{s^4+119.739s^3+17168.7s^2+1025460s+37905000}$.

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	K
1	1.96523								1.96523
2	1.10251	1.09773							0.98261
3	0.49131	1.23841	0.98834						0.49131
4	0.27563	0.74262	1.45392	0.95281					0.24565
5	0.12283	0.58053	0.97440	1.68882	0.93682				0.12283
6	0.06891	0.30708	0.93935	1.20214	1.93083	0.92825			0.06143
7	0.03071	0.21367	0.54862	1.35754	1.42879	2.17608	0.92312		0.03071
8	0.01723	0.10734	0.44783	0.84682	1.83690	1.65516	2.42303	0.91981	0.01535

Tabelle 7.11: Koeffizienten von $D(S)$ für eine UTF mit 1 dB Rippel ($e = 0.509$)

[10] Das Resultat erhalten wir einfach mit: `[z n]=lp2lp(0.35785,[1 1.19739 1.71687 1.02546 0.37905],100), tf(z,n)`.

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	K
1	1.30756								1.30756
2	0.82302	0.80382							0.65378
3	0.32689	1.02291	0.73782						0.32689
4	0.20577	0.51680	1.25648	0.71622					0.16345
5	0.08172	0.45935	0.69348	1.49954	0.70646				0.08172
6	0.05144	0.21027	0.77146	0.86701	1.74586	0.70123			0.04086
7	0.02042	0.16609	0.38251	1.14444	1.03922	1.99353	0.69789		0.02043
8	0.01286	0.07294	0.35870	0.59822	1.57958	1.21171	2.24225	0.69606	0.01022

Tabelle 7.12: Koeffizienten von $D(S)$ für eine UTF mit 2 dB Rippel ($e = 0.765$)

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	K
1	1.00238								1.00238
2	0.70795	0.64490							0.50119
3	0.25059	0.92835	0.59724						0.25059
4	0.17699	0.40477	1.16912	0.58158					0.12530
5	0.06264	0.40794	0.54886	1.41498	0.57443				0.06265
6	0.04425	0.16343	0.69910	0.69061	1.66285	0.57070			0.03132
7	0.01566	0.14615	0.30002	1.05184	0.83144	1.91155	0.56842		0.01566
8	0.01106	0.05648	0.32076	0.47190	1.46670	0.97195	2.16071	0.56695	0.00783

Tabelle 7.13: Koeffizienten von $D(S)$ für eine UTF mit 3 dB Rippel ($e = 0.99762$)

n	$D(S)$	K
1	$(6.55220 + S)$	6.55220
2	$(3.31329 + 2.37209S + S^2)$	3.27610
3	$(0.969 + S)(1.690 + 0.969S + S^2)$	1.63805
4	$(1.330 + 0.528S + S^2)(0.623 + 1.275S + S^2)$	0.819025
5	$(0.539 + S)(1.195 + 0.333S + S^2)(0.636 + 0.872S + S^2)$	0.4095127
6	$(1.129 + 0.229S + S^2)(0.696 + 0.627S + S^2)(0.263 + 0.856S + S^2)$	0.2047564
7	$(0.377 + S)(1.092 + 0.168S + S^2)(0.753 + 0.470S + S^2)(0.330 + 0.679S + S^2)$	0.102378
8	$(1.069 + 0.128S + S^2)(0.799 + 0.364S + S^2)(0.416 + 0.545S + S^2)(0.146 + 0.643S + S^2)$	0.0511891

Tabelle 7.14: Faktorzerlegung von $D(S)$ für 0.1 dB Rippel ($e = 0.153$)

n	$D(S)$	K
1	$(2.86278 + S)$	2.86278
2	$(1.51620 + 1.42562S + S^2)$	1.43129
3	$(0.626 + S)(1.142 + 0.626S + S^2)$	0.71569
4	$(1.064 + 0.351S + S^2)(0.356 + 0.847S + S^2)$	0.35785
5	$(0.362 + S)(1.036 + 0.224S + S^2)(0.477 + 0.586S + S^2)$	0.17892
6	$(1.023 + 0.155S + S^2)(0.590 + 0.424S + S^2)(0.157 + 0.580S + S^2)$	0.08946
7	$(0.256 + S)(1.016 + 0.114S + S^2)(0.677 + 0.319S + S^2)(0.254 + 0.462S + S^2)$	0.04473
8	$(1.012 + 0.087S + S^2)(0.741 + 0.248S + S^2)(0.359 + 0.372S + S^2)(0.088 + 0.439S + S^2)$	0.02237

Tabelle 7.15: Faktorzerlegung von $D(S)$ für 0.5 dB Rippel ($e = 0.349$)

n	$D(S)$	K
1	$(1.96523 + S)$	1.96523
2	$(1.10251 + 1.09773S + S^2)$	0.98261
3	$(0.494 + S)(0.994 + 0.494S + S^2)$	0.49131
4	$(0.98650 + 0.2791S + S^2)(0.2794 + 0.67374S + S^2)$	0.24565
5	$(0.289 + S)(0.988 + 0.179S + S^2)(0.429 + 0.468S + S^2)$	0.12283
6	$(0.991 + 0.124S + S^2)(0.558 + 0.340S + S^2)(0.125 + 0.464S + S^2)$	0.06143
7	$(0.205 + S)(0.993 + 0.091S + S^2)(0.653 + 0.256S + S^2)(0.230 + 0.370S + S^2)$	0.03071
8	$(0.994 + 0.070S + S^2)(0.724 + 0.199S + S^2)(0.341 + 0.298S + S^2)(0.070 + 0.352S + S^2)$	0.01535

Tabelle 7.16: Faktorzerlegung von $D(S)$ für 1 dB Rippel ($e = 0.509$)

n	$D(S)$	K
1	$(1.30756 + S)$	1.30756
2	$(0.82302 + 0.80382S + S^2)$	0.65378
3	$(0.369 + S)(0.886 + 0.369S + S^2)$	0.32689
4	$(0.929 + 0.210S + S^2)(0.222 + 0.506S + S^2)$	0.16345
5	$(0.218 + S)(0.952 + 0.135S + S^2)(0.393 + 0.353S + S^2)$	0.08172
6	$(0.966 + 0.094S + S^2)(0.533 + 0.257S + S^2)(0.100 + 0.351S + S^2)$	0.04086
7	$(0.155 + S)(0.975 + 0.069S + S^2)(0.635 + 0.194S + S^2)(0.212 + 0.280S + S^2)$	0.02043
8	$(0.980 + 0.053S + S^2)(0.710 + 0.151S + S^2)(0.327 + 0.226S + S^2)(0.057 + 0.266S + S^2)$	0.01022

Tabelle 7.17: Faktorzerlegung von $D(S)$ für 2 dB Rippel ($e = 0.765$)

n	$D(S)$	K
1	$(1.00238 + S)$	1.00238
2	$(0.70795 + 0.64490S + S^2)$	0.50119
3	$(0.299 + S)(0.839 + 0.299S + S^2)$	0.25059
4	$(0.903 + 0.170S + S^2)(0.196 + 0.411S + S^2)$	0.12530
5	$(0.178 + S)(0.936 + 0.110S + S^2)(0.377 + 0.287S + S^2)$	0.06265
6	$(0.955 + 0.076S + S^2)(0.522 + 0.209S + S^2)(0.089 + 0.285S + S^2)$	0.03132
7	$(0.126 + S)(0.966 + 0.056S + S^2)(0.627 + 0.158S + S^2)(0.204 + 0.228S + S^2)$	0.01566
8	$(0.974 + 0.043S + S^2)(0.704 + 0.123S + S^2)(0.321 + 0.184S + S^2)(0.050 + 0.217S + S^2)$	0.00783

Tabelle 7.18: Faktorzerlegung von $D(S)$ für 3 dB Rippel ($e = 0.99762$)

Die **konjugiert-komplexen Polpaare** weisen folgende **Polgüten** auf:

n	2	3	4	5	6	7	8
q_{p1}	0.767	1.341	2.183	3.282	4.633	6.233	8.082
q_{p2}			0.619	0.915	1.332	1.847	2.453
q_{p3}					0.600	0.847	1.183
q_{p4}							0.593

Tabelle 7.19: Polgüten der konj.-kompl. Polpaare für 0.1 dB Rippel der normierten Tschebyscheff-TP-Filter

n	2	3	4	5	6	7	8
q_{p1}	0.864	1.706	2.941	4.545	6.513	8.842	11.531
q_{p2}			0.705	1.178	1.810	2.576	3.466
q_{p3}					0.684	1.092	1.611
q_{p4}							0.677

Tabelle 7.20: Polgüten der konj.-kompl. Polpaare für 0.5 dB Rippel der normierten Tschebyscheff-TP-Filter

n	2	3	4	5	6	7	8
q_{p1}	0.957	2.018	3.559	5.556	8.004	10.899	14.241
q_{p2}			0.785	1.399	2.198	3.156	4.266
q_{p3}					0.761	1.297	1.956
q_{p4}							0.753

Tabelle 7.21: Polgüten der konj.-kompl. Polpaare für 1 dB Rippel der normierten Tschebyscheff-TP-Filter

n	2	3	4	5	6	7	8
q_{p1}	1.129	2.552	4.594	7.232	10.462	14.280	18.687
q_{p2}			0.929	1.775	2.844	4.115	5.584
q_{p3}					0.902	1.645	2.533
q_{p4}							0.892

Tabelle 7.22: Polgüten der konj.-kompl. Polpaare für 2 dB Rippel der normierten Tschebyscheff-TP-Filter

n	2	3	4	5	6	7	8
q_{p1}	1.305	3.068	5.578	8.818	12.780	17.464	22.870
q_{p2}			1.076	2.138	3.458	5.021	6.825
q_{p3}					1.044	1.983	3.080
q_{p4}							1.034

Tabelle 7.23: Polgüten der konj.-kompl. Polpaare für 3 dB Rippel der normierten Tschebyscheff-TP-Filter

7.B.4 Bessel-Filter

Ansatz: $$H(S) = K \cdot e^{-ST_0} \approx \frac{K}{B_n(S)} = \frac{K}{S^n + \beta_{n-1}S^{n-1} + \ldots + \beta_2 S^2 + \beta_1 S + \beta_0}$$

Die Bessel-Polynome können der Tabelle 7.24 entnommen werden.

n	$\beta_0 = K$	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9
1	1									
2	3	3								
3	15	15	6							
4	105	105	45	10						
5	945	945	420	105	15					
6	10395	10395	4725	1260	210	21				
7	135135	135135	62370	17325	3150	378	28			
8	2027025	2027025	945945	270270	51975	6930	630	36		
9	34459425	34459425	16216200	4729725	945945	135135	13860	990	45	
10	654729075	654729075	310134825	91891800	18918900	2837835	315315	25740	1485	55

Tabelle 7.24: Koeffizienten β der Bessel-Polynome $B_n(S)$ $(K = \beta_0)$ mit $T_0 = 1$

<u>Aufgabe 7.10:</u>
Bestimmen Sie die Koeffizienten des Bessel-Polynomes $B_{13}(S)$ (Tipp: Verwenden Sie die Rekursionsformel 7.4.7).

Zur Tabellierung der auf die **3 dB-Grenzfrequenz normierten Übertragungsfunktionen**

$$H(S) = \frac{K}{D(S)} \qquad \text{mit} \qquad D(S) \;= S^n + b_{n-1}S^{n-1} + \ldots + b_2 S^2 + b_1 S + b_0$$

wurde $\max\limits_{S} |H(S)| = 1$ gewählt. Die Koeffizienten b können den Tabellen 7.26 und 7.27 entnommen werden. Der Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der 3.01 dB-Grenzfrequenz $\omega_{3.01\text{dB}}$ und ω_D sowie $A_{\max}$ kann mit folgender Abb. 7.112 bestimmt werden:

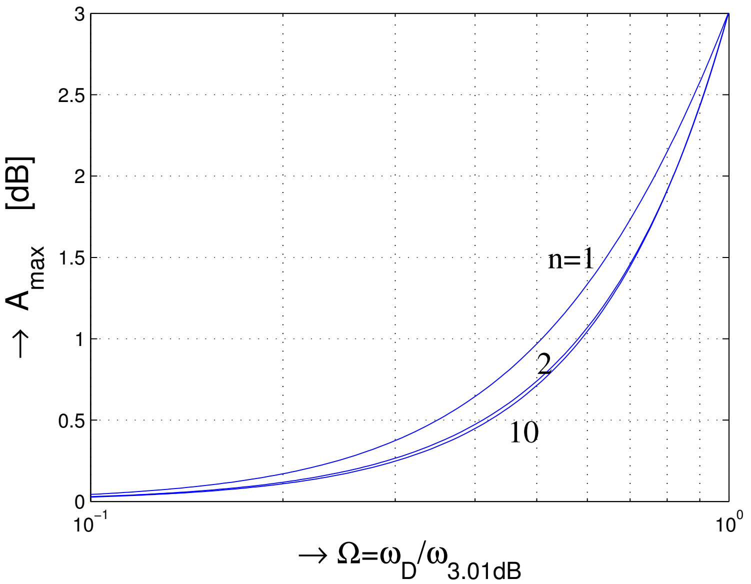


Abbildung 7.112: Graphen $A_{\max}$ der normierten Bessel-Tiefpassfilter der Ordnung $1 \ldots 10$ in Funktion von $\Omega = \omega_D/\omega_{3.01\text{dB}}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_0	1	1.3617	1.7557	2.1139	2.4274	2.7034	2.9517	3.1796	3.3917	3.5910
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T_0	3.7796	3.9592	4.1308	4.2956	4.4542	4.6074	4.7556	4.8993	5.0389	5.1747

Tabelle 7.25: Werte der **Gruppenlaufzeit T_0** zur Umnormierung der Bessel-Polynome $B_n(S)$ auf $D(S)$ für eine Dämpfung von $\sqrt{2} \equiv 3.01$ dB bei $\Omega = 1$, d. h., $\frac{1}{|H(j\Omega)|_{\Omega=1}} \equiv A(1) = \sqrt{2} \equiv 3.01$ dB.

Aufgabe 7.11:
Bestimmen Sie T_0 für das Bessel-Polynom $B_{20}(S)$ und $B_{25}(S)$ (siehe Tabelle 7.25).
Für die Koeffizienten b von $D(S)$ des auf die 3.01 dB-Grenzfrequenz normierten Bessel-Tiefpassfilter der Ordnung n gilt: $b_i = \frac{\beta_i}{T_0^{(n-i)}}$, wobei $i = 0, \ldots, n$.

Beispiel 7.30: Berechnung von b_8 des normierten Bessel-Filters der Ordnung $n = 10$
Mit $i = 8$ und $n = 10$ folgt mit Tabelle 7.25: $b_8 = \frac{\beta_i}{T_0^{(n-i)}} = \frac{1485}{3.5910^{(10-8)}} = 115.16$.

n	$b_0 = K$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9
1	1									
2	1.6180	2.2032								
3	2.7718	4.8664	3.4175							
4	5.2582	11.115	10.070	4.7306						
5	11.213	27.218	29.364	17.820	6.1794					
6	26.630	71.991	88.463	63.774	28.734	7.768				
7	69.22	204.32	278.35	228.23	122.49	43.39	9.4860			
8	194.03	616.93	915.41	831.62	508.5	215.58	62.315	11.3221		
9	580.18	1967.8	3140.7	3107	2107.6	1021.2	355.23	86.06	13.268	
10	1836.2	6593.9	11216	11934	8823	4752.5	1896.2	555.8	115.16	15.316

Tabelle 7.26: Koeffizienten b von $D(S)$, sowie K der UTF $H(S)$

n	$D(S)$
1	$(1 + S)$
2	$(1.6180 + 2.2032S + S^2)$
3	$(1.3227 + S)(2.0956 + 2.0948S + S^2)$
4	$(2.0454 + 2.7401S + S^2)(2.5708 + 1.9904S + S^2)$
5	$(1.5023 + S)(2.4222 + 2.7618S + S^2)(3.0814 + 1.9154S + S^2)$
6	$(2.5726 + 3.1430S + S^2)(2.8533 + 2.7637S + S^2)(3.6279 + 1.8613S + S^2)$
7	$(1.6844 + S)(2.9459 + 3.2241S + S^2)(3.3212 + 2.7578S + S^2)(4.2004 + 1.8197 + S^2)$
8	$(3.1629 + 3.5148S + S^2)(3.3566 + 3.2739S + S^2)(3.815 + 2.7477S + S^2)(4.7905 + 1.7857S + S^2)$
9	$(1.8566 + S)(3.5284 + 3.6143S + S^2)(3.7942 + 3.3048S + S^2)(4.3281 + 2.7352S + S^2)(5.3932 + 1.7568S + S^2)$
10	$(3.7741 + 3.8552S + S^2)(3.9226 + 3.6844S + S^2)(4.2527 + 3.3236S + S^2)(4.8565 + 2.7214S + S^2)(6.0056 + 1.7315S + S^2)$

Tabelle 7.27: Faktorzerlegung von $D(S)$

Die konjugiert-komplexen Polpaare von $D(S)$ weisen folgende Polgüten auf:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q_{p1}	0.577	0.691	0.806	0.916	1.023	1.126	1.226	1.322	1.415
q_{p2}			0.522	0.563	0.611	0.661	0.711	0.761	0.810
q_{p3}					0.510	0.532	0.560	0.589	0.620
q_{p4}							0.506	0.520	0.538
q_{p5}									0.504

Tabelle 7.28: Polgüten q_{p_i} der konj.-kompl. Polpaare der Bessel-Filter der Ordnung n

7.B.5 Cauer-Filter (elliptische Filter)

Beim **Cauer-Filter** (Tschebyscheff-Cauer, elliptische Filter, oder auch CC - Filter genannt) lassen sich die Übertragungsfunktionen nicht mehr einfach tabellieren. Die **Ordnung** lässt sich jedoch mittels dem MATLAB-Befehl `ellipord` einfach bestimmen und die UTF kann mit `ellipap` eruiert werden. Ebenfalls können die UTFs anhand der **Pol-** und **Nullstellenangaben** in den *LC*-Filtertabellen (Anhang 7.C) bestimmt werden.

Aufgabe 7.12:
Bestimmen Sie die Filterordnung für ein Cauer-TP-Filter mit $A_{\min} = 50$ dB, $A_{\max} = 1$ dB und $\Omega_S/\Omega_D = 3$.

Aufgabe 7.13:
Berechnen Sie mit MATLAB die Lage der Pole und Nullstellen für die normierte Cauer-Tiefpassapproximation für $A_{\min} = 77.05$ dB, $A_{\max} = 0.09883$ dB und $\Omega_S/\Omega_D = 14.336$ und vergleichen Sie Ihre Werte mit den Tabellenwerten in Tab. 7.34.

7.C Tabellen zum Entwurf von LC-Filtern

7.C.1 Tabellen für Allpolfilter

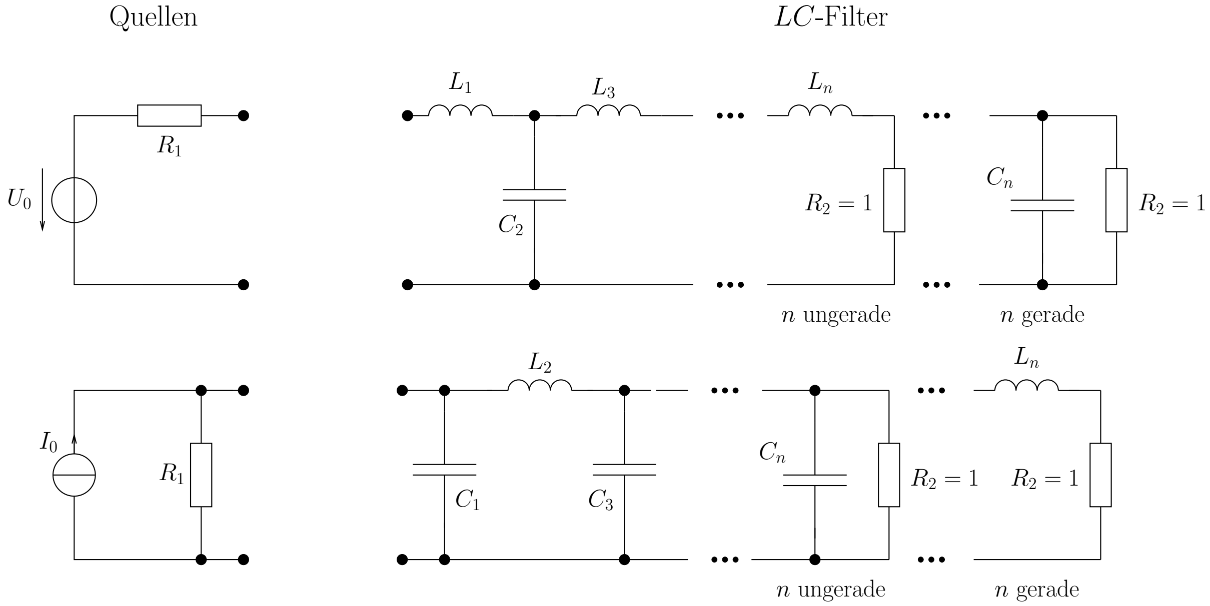


Abbildung 7.113: Mögliche Anordnungen der LC-Filter. Diese Anordnungen gelten nur für Allpolfilter, also Bessel-, Butterworth-, kritisch-gedämpfte und Tschebyscheff-I-Filter und nicht für inverse Tschebyscheff-Filter (Tschebyscheff-II) und Cauer-Filter (elliptische Filter). (Werte gemäss den Tabellen 7.29 bis 7.33).

Bemerkung:
In den folgenden Tabellen sind jeweils Widerstandswerte $R_1 = \alpha \cdot R_2$ aufgezeigt, wobei auf $\boldsymbol{R_2 = 1}$ **normiert** wurde. Die Werte für α sind bei den verschiedenen Tiefpassapproximationsarten nicht gleich. Bei kritisch-gedämpften RLC-Tiefpassfiltern kann α alle positiven, reellen Werte (negative Widerstände machen keinen Sinn bei passiven Schaltungen) annehmen, bei Butterworth RLC-Tiefpassfiltern sind jeweils Werte für α kleiner (oder grösser) als 1 nicht möglich (abhängig ob die Filter gerade oder ungerade Ordnung haben), da ansonsten komplexe Werte für die L und C auftreten würden. Bei Bessel- und Tschebyscheff-Tiefpassfiltern liegen die Grenzen für α zum Teil an anderen Stellen.

n	R_1	C_1	L_2	C_3	L_4	C_5	L_6	C_7	L_8	C_9
2	∞	1.4142	0.7071							
	10.0000	0.0743	14.8138							
	5.0000	0.1557	7.7067							
	3.3333	0.2447	5.3126							
	2.5000	0.3419	4.0951							
	2.0000	0.4483	3.3461							
	1.6667	0.5657	2.8284							
	1.4286	0.6971	2.4387							
	1.2500	0.8485	2.1213							
	1.1111	1.0353	1.8352							
	1.0000	1.4142	1.4142							
3	∞	1.5000	1.3333	0.5000						
	0.1000	5.1672	0.1377	15.4554						
	0.2000	2.6687	0.2842	7.9102						
	0.3000	1.8380	0.4396	5.3634						
	0.4000	1.4254	0.6042	4.0642						
	0.5000	1.1811	0.7789	3.2612						
	0.6000	1.0225	0.9650	2.7024						
	0.7000	0.9152	1.1652	2.2774						
	0.8000	0.8442	1.3840	1.9259						
	0.9000	0.8082	1.6332	1.5994						
	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000						
4	∞	1.5307	1.5772	1.0824	0.3827					
	10.0000	0.0392	11.0942	0.1616	15.6421					
	5.0000	0.0804	5.6835	0.3307	7.9397					
	3.3333	0.1237	3.8826	0.5072	5.3381					
	2.5000	0.1692	2.9858	0.6911	4.0094					
	2.0000	0.2175	2.4524	0.8826	3.1868					
	1.6667	0.2690	2.1029	1.0824	2.6131					
	1.4286	0.3251	1.8618	1.2913	2.1752					
	1.2500	0.3882	1.6946	1.5110	1.8109					
	1.1111	0.4657	1.5924	1.7439	1.4690					
	1.0000	0.7654	1.8478	1.8478	0.7654					
5	∞	1.5451	1.6944	1.3820	0.8944	0.3090				
	0.1000	3.1522	0.0912	14.0945	0.1727	15.7103				
	0.2000	1.6077	0.1861	7.1849	0.3518	7.9345				
	0.3000	1.0937	0.2848	4.8835	0.5367	5.3073				
	0.4000	0.8378	0.3877	3.7357	0.7274	3.9648				
	0.5000	0.6857	0.4955	3.0510	0.9237	3.1331				
	0.6000	0.5860	0.6094	2.5998	1.1255	2.5524				
	0.7000	0.5173	0.7313	2.2849	1.3326	2.1083				
	0.8000	0.4698	0.8660	2.0605	1.5443	1.7380				
	0.9000	0.4416	1.0265	1.9095	1.7562	1.3887				
	1.0000	0.6180	1.6180	2.0000	1.6180	0.6180				
6	∞	1.5529	1.7593	1.5529	1.2016	0.7579	0.2588			
	10.0000	0.0263	7.7053	0.1222	15.7855	0.1788	15.7375			
	5.0000	0.0535	3.9170	0.2484	8.0201	0.3628	7.9216			
	3.3333	0.0816	2.6559	0.3788	5.4325	0.5517	5.2804			
	2.5000	0.1108	2.0275	0.5139	4.1408	0.7450	3.9305			
	2.0000	0.1412	1.6531	0.6542	3.3687	0.9423	3.0938			
	1.6667	0.1732	1.4071	0.8011	2.8580	1.1431	2.5092			
	1.4286	0.2072	1.2363	0.9567	2.4991	1.3464	2.0618			
	1.2500	0.2445	1.1163	1.1257	2.2389	1.5498	1.6881			
	1.1111	0.2890	1.0403	1.3217	2.0539	1.7443	1.3347			
	1.0000	0.5176	1.4142	1.9319	1.9319	1.4142	0.5176			
7	∞	1.5576	1.7988	1.6588	1.3972	1.0550	0.6560	0.2225		
	0.1000	2.2571	0.0665	10.7004	0.1417	16.8222	0.1823	15.7480		
	0.2000	1.1448	0.1350	5.4267	0.2874	8.5263	0.3692	7.9079		
	0.3000	0.7745	0.2055	3.6706	0.4373	5.7612	0.5600	5.2583		
	0.4000	0.5899	0.2782	2.7950	0.5917	4.3799	0.7542	3.9037		
	0.5000	0.4799	0.3536	2.2726	0.7512	3.5532	0.9513	3.0640		
	0.6000	0.4075	0.4322	1.9284	0.9170	3.0050	1.1503	2.4771		
	0.7000	0.3571	0.5154	1.6883	1.0910	2.6177	1.3498	2.0277		
	0.8000	0.3215	0.6057	1.5174	1.2777	2.3338	1.5461	1.6520		
	0.9000	0.2985	0.7111	1.4043	1.4891	2.1249	1.7268	1.2961		
	1.0000	0.4450	1.2470	1.8019	2.0000	1.8019	1.2470	0.4450		
8	∞	1.5607	1.8246	1.7287	1.5283	1.2588	0.9371	0.5776	0.1951	
	10.0000	0.0198	5.8479	0.0949	12.7455	0.1547	17.4999	0.1846	15.7510	
	5.0000	0.0400	2.9608	0.1921	6.4523	0.3133	8.8538	0.3732	7.8952	
	3.3333	0.0608	1.9995	0.2919	4.3563	0.4757	5.9714	0.5650	5.2400	
	2.5000	0.0822	1.5201	0.3945	3.3106	0.6424	4.5308	0.7594	3.8825	
	2.0000	0.1042	1.2341	0.5003	2.6863	0.8139	3.6678	0.9558	3.0408	
	1.6667	0.1272	1.0455	0.6102	2.2740	0.9912	3.0945	1.1530	2.4524	
	1.4286	0.1513	0.9138	0.7257	1.9852	1.1760	2.6879	1.3490	2.0017	
	1.2500	0.1774	0.8199	0.8499	1.7779	1.3721	2.3874	1.5393	1.6246	
	1.1111	0.2075	0.7575	0.9925	1.6362	1.5900	2.1612	1.7092	1.2671	
	1.0000	0.3902	1.1111	1.6629	1.9616	1.9616	1.6629	1.1111	0.3902	
9	∞	1.5628	1.8424	1.7772	1.6202	1.4037	1.1408	0.8414	0.5155	0.1736
	0.1000	1.7558	0.0521	8.5074	0.1153	14.1930	0.1638	17.9654	0.1862	15.7504
	0.2000	0.8878	0.1054	4.3014	0.2333	7.1750	0.3312	9.0766	0.3757	7.8838
	0.3000	0.5987	0.1600	2.9006	0.3539	4.8373	0.5022	6.1128	0.5680	5.2249
	0.4000	0.4545	0.2159	2.2019	0.4775	3.6706	0.6771	4.6310	0.7624	3.8654
	0.5000	0.3685	0.2735	1.7846	0.6046	2.9734	0.8565	3.7426	0.9579	3.0223
	0.6000	0.3117	0.3330	1.5092	0.7361	2.5124	1.0410	3.1516	1.1533	2.4328
	0.7000	0.2719	0.3954	1.3162	0.8734	2.1885	1.2323	2.7314	1.3464	1.9812
	0.8000	0.2434	0.4623	1.1777	1.0200	1.9542	1.4336	2.4189	1.5318	1.6033
	0.9000	0.2242	0.5388	1.0835	1.1859	1.7905	1.6538	2.1796	1.6930	1.2446
	1.0000	0.3473	1.0000	1.5321	1.8794	2.0000	1.8794	1.5321	1.0000	0.3473
n	$1/(R_1)$	L_1	C_2	L_3	C_4	L_5	C_6	L_7	C_8	L_9

Tabelle 7.29: Normierte Elementwerte für Butterworth-TP-Filter (frequenznormiert auf die 3.01 dB-Grenzfrequenz bei $\Omega = 1$)

Aufgabe 7.14:

Bestimmen Sie für $n = 2$ und $R_1 = 2 \cdot R_2$ die Elementwerte C_1 und L_2. Gehen Sie dabei analog wie Beispiel 7.21 vor.

n	R_1	C_1	L_2	C_3	L_4	C_5	L_6	C_7	L_8
2	∞	1.3617	0.4539						
	10.0000	0.0469	14.5097						
	5.0000	0.0965	7.6876						
	3.3333	0.1486	5.4050						
	2.5000	0.2032	4.2577						
	2.0000	0.2601	3.5649						
	1.6667	0.3191	3.0993						
	1.4286	0.3801	2.7638						
	1.2500	0.4433	2.5096						
	1.1111	0.5084	2.3097						
	1.0000	0.5755	2.1478						
3	∞	1.4631	0.8427	0.2926					
	0.1000	2.9825	0.0860	15.4697					
	0.2000	1.5176	0.1752	8.1403					
	0.3000	1.0283	0.2673	5.6888					
	0.4000	0.7829	0.3618	4.4573					
	0.5000	0.6353	0.4587	3.7144					
	0.6000	0.5365	0.5576	3.2159					
	0.7000	0.4657	0.6584	2.8575					
	0.8000	0.4124	0.7609	2.5867					
	0.9000	0.3708	0.8650	2.3745					
	1.0000	0.3374	0.9705	2.2034					
4	∞	1.5012	0.9781	0.6127	0.2114				
	10.0000	0.0214	6.2086	0.0993	15.8372				
	5.0000	0.0434	3.1416	0.2013	8.3185				
	3.3333	0.0658	2.1174	0.3056	5.8048				
	2.5000	0.0887	1.6040	0.4120	4.5430				
	2.0000	0.1120	1.2952	0.5202	3.7824				
	1.6667	0.1356	1.0886	0.6299	3.2727				
	1.4286	0.1596	0.9406	0.7410	2.9066				
	1.2500	0.1839	0.8292	0.8534	2.6304				
	1.1111	0.2085	0.7423	0.9670	2.4143				
	1.0000	0.2334	0.6725	1.0815	2.2404				
5	∞	1.5125	1.0232	0.7531	0.4729	0.1618			
	0.1000	1.6349	0.0478	7.6043	0.1036	15.9487			
	0.2000	0.8251	0.0964	3.8352	0.2095	8.3747			
	0.3000	0.5548	0.1457	2.5768	0.3174	5.8433			
	0.4000	0.4194	0.1958	1.9464	0.4270	4.5731			
	0.5000	0.3380	0.2465	1.5672	0.5382	3.8077			
	0.6000	0.2836	0.2977	1.3138	0.6506	3.2952			
	0.7000	0.2447	0.3494	1.1323	0.7642	2.9272			
	0.8000	0.2154	0.4016	0.9959	0.8789	2.6497			
	0.9000	0.1926	0.4542	0.8894	0.9945	2.4328			
	1.0000	0.1743	0.5072	0.8040	1.1110	2.2582			
6	∞	1.5124	1.0329	0.8125	0.6072	0.3785	0.1287		
	10.0000	0.0130	3.8146	0.0612	8.1860	0.1045	15.9506		
	5.0000	0.0261	1.9209	0.1232	4.1204	0.2110	8.3775		
	3.3333	0.0395	1.2890	0.1859	2.7633	0.3193	5.8467		
	2.5000	0.0530	0.9725	0.2492	2.0837	0.4292	4.5770		
	2.0000	0.0666	0.7824	0.3131	1.6752	0.5405	3.8122		
	1.6667	0.0804	0.6553	0.3775	1.4022	0.6530	3.3001		
	1.4286	0.0943	0.5644	0.4424	1.2069	0.7665	2.9325		
	1.2500	0.1082	0.4961	0.5076	1.0600	0.8810	2.6554		
	1.1111	0.1223	0.4429	0.5732	0.9456	0.9964	2.4388		
	1.0000	0.1365	0.4002	0.6392	0.8538	1.1126	2.2645		
7	∞	1.5087	1.0293	0.8345	0.6752	0.5031	0.3113	0.1054	
	0.1000	1.0612	0.0313	5.0616	0.0679	8.3967	0.1040	15.9166	
	0.2000	0.5338	0.0630	2.5448	0.1365	4.2214	0.2100	8.3623	
	0.3000	0.3579	0.0951	1.7051	0.2058	2.8280	0.3177	5.8380	
	0.4000	0.2698	0.1274	1.2847	0.2755	2.1304	0.4269	4.5718	
	0.5000	0.2168	0.1599	1.0321	0.3457	1.7111	0.5374	3.8090	
	0.6000	0.1815	0.1927	0.8634	0.4163	1.4312	0.6491	3.2984	
	0.7000	0.1562	0.2257	0.7428	0.4873	1.2308	0.7618	2.9319	
	0.8000	0.1372	0.2589	0.6521	0.5586	1.0803	0.8754	2.6556	
	0.9000	0.1224	0.2923	0.5815	0.6302	0.9630	0.9899	2.4396	
	1.0000	0.1106	0.3259	0.5249	0.7020	0.8690	1.1052	2.2659	
8	∞	1.5044	1.0214	0.8392	0.7081	0.5743	0.4253	0.2616	0.0883
	10.0000	0.0089	2.6307	0.0427	5.7710	0.0711	8.4376	0.1032	15.8768
	5.0000	0.0179	1.3218	0.0859	2.8981	0.1429	4.2389	0.2083	8.3441
	3.3333	0.0269	0.8852	0.1294	1.9396	0.2151	2.8380	0.3151	5.8271
	2.5000	0.0360	0.6667	0.1732	1.4599	0.2878	2.1367	0.4233	4.5645
	2.0000	0.0452	0.5354	0.2173	1.1718	0.3608	1.7154	0.5329	3.8041
	1.6667	0.0545	0.4477	0.2616	0.9794	0.4342	1.4340	0.6435	3.2949
	1.4286	0.0637	0.3850	0.3061	0.8418	0.5078	1.2328	0.7552	2.9295
	1.2500	0.0731	0.3380	0.3509	0.7385	0.5817	1.0816	0.8678	2.6541
	1.1111	0.0825	0.3013	0.3958	0.6580	0.6559	0.9639	0.9813	2.4388
	1.0000	0.0919	0.2719	0.4409	0.5936	0.7303	0.8695	1.0956	2.2656
n	$1/(R_1)$	L_1	C_2	L_3	C_4	L_5	C_6	L_7	C_8

Tabelle 7.30: Normierte Elementwerte für Bessel-TP-Filter (frequenznormiert auf die 3.01 dB-Grenzfrequenz bei $\Omega = 1$)

Aufgabe 7.15:

Bestimmen Sie für $n = 2$ und $R_1 = 10 \cdot R_2$ die UTF von $U_{R_2}(S)/U_0(S)$. Wie gross ist $U_{R_2}(S)/U_0(S)$ bei $S = j0$ ausgedrückt durch R_1 und R_2? Bestimmen Sie für $n = 2$ und $R_1 = 10 \cdot R_2$ die UTF von $I_{R_2}(S)/I_0(S)$. Wie gross ist $I_{R_2}(S)/I_0(S)$ bei $S = j0$ ausgedrückt durch R_1 und R_2?

n	R_1	C_1	L_2	C_3	L_4
2	∞	1.2872	0.3218		
	100.0000	1.2968	0.3226		
	10.0000	1.3830	0.3295		
	5.0000	1.4773	0.3365		
	3.3333	1.5705	0.3429		
	2.5000	1.6625	0.3488		
	2.0000	1.7536	0.3543		
	1.6667	1.8438	0.3594		
	1.4286	1.9333	0.3642		
	1.2500	2.0219	0.3687		
	1.1111	2.1100	0.3730		
	1.0000	2.1974	0.3770		
	0.5000	3.0455	0.4080		
	0.3333	3.8616	0.4291		
	0.2500	4.6571	0.4447		
	0.2000	5.4380	0.4570		
	0.1667	6.2080	0.4671		
	0.1429	6.9691	0.4755		
	0.1250	7.7231	0.4827		
	0.1111	8.4712	0.4890		
	0.1000	9.2141	0.4945		
	0.0100	71.4711	0.5853		
3	∞	1.3595	0.5736	0.1699	
	100.0000	1.3689	0.5746	0.1702	
	10.0000	1.4521	0.5838	0.1720	
	5.0000	1.5430	0.5931	0.1738	
	3.3333	1.6324	0.6016	0.1754	
	2.5000	1.7206	0.6094	0.1769	
	2.0000	1.8076	0.6167	0.1783	
	1.6667	1.8935	0.6234	0.1796	
	1.4286	1.9787	0.6293	0.1809	
	1.2500	2.0626	0.6356	0.1819	
	1.1111	2.1453	0.6421	0.1828	
	1.0000	2.2285	0.6464	0.1840	
	0.5000	3.0235	0.6867	0.1915	
	0.3333	3.7798	0.7139	0.1964	
	0.2500	4.5112	0.7340	0.2001	
	0.2000	5.2247	0.7498	0.2029	
	0.1667	5.9246	0.7627	0.2053	
	0.1429	6.6136	0.7736	0.2072	
	0.1250	7.2938	0.7828	0.2089	
	0.1111	7.9664	0.7909	0.2103	
	0.1000	8.6325	0.7980	0.2116	
	0.0100	62.4270	0.9182	0.2335	
4	∞	1.3919	0.6797	0.3480	0.1087
	100.0000	1.4011	0.6808	0.3483	0.1088
	10.0000	1.4827	0.6904	0.3512	0.1095
	5.0000	1.5718	0.7001	0.3540	0.1103
	3.3333	1.6593	0.7089	0.3566	0.1109
	2.5000	1.7454	0.7171	0.3590	0.1115
	2.0000	1.8303	0.7247	0.3612	0.1120
	1.6667	1.9140	0.7318	0.3633	0.1126
	1.4286	1.9969	0.7382	0.3651	0.1131
	1.2500	2.0786	0.7444	0.3669	0.1135
	1.1111	2.1595	0.7502	0.3686	0.1139
	1.0000	2.2397	0.7557	0.3701	0.1143
	0.5000	3.0222	0.7898	0.3832	0.1174
	0.3333	3.7412	0.8244	0.3903	0.1190
	0.2500	4.4360	0.8465	0.3954	0.1206
	0.2000	5.1171	0.8628	0.3998	0.1217
	0.1667	5.7827	0.8763	0.4035	0.1226
	0.1429	6.4380	0.8874	0.4065	0.1233
	0.1250	7.0828	0.8970	0.4091	0.1240
	0.1111	7.6820	0.9094	0.4112	0.1246
	0.1000	8.3488	0.9127	0.4133	0.1250
	0.0100	24.8161	1.3350	0.5982	0.1682
n	$1/(R_1)$	L_1	C_2	L_3	C_4

Tabelle 7.31: Normierte Elementwerte für kritisch-gedämpfte Filter (Gauss-Filter) (frequenznormiert auf $|H(j)| = 1/\sqrt{2}$ (3.01 dB-Grenzfrequenz bei $\Omega = 1$)

Aufgabe 7.16:

Skizzieren Sie das entnormierte, kritisch-gedämpfte LC-Tiefpassfilter 4. Ordnung mit $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 4$ kΩ, maximaler Druchlassbereichsdämpfung von $A_{\max} = 0.5$ dB und Druchlassbereichsgrenzfrequenz von $f_D = 3$ kHz, wobei das erste Filterelement nach der Quelle die Parallelkapazität C_1 sein soll. Zeichnen Sie den Amplitudengang von Quelle zu Last R_2 auf, indem Sie die UTF der gesamten Schaltung bestimmen.

n	R_1	C_1	L_2	C_3	L_4	C_5	L_6	C_7	L_8
2	∞	1.3911	0.8191						
	10.0000	0.0868	14.4332						
	5.0000	0.1841	7.4256						
	3.3333	0.2933	5.0502						
	2.5000	0.4169	3.8265						
	2.0000	0.5597	3.0538						
	1.6667	0.7326	2.4885						
	1.4286	0.9771	1.9824						
	1.3554	1.2087	1.6382						
3	∞	1.5133	1.5090	0.7164					
	0.1000	7.5121	0.1549	15.4656					
	0.2000	3.9418	0.3172	7.8503					
	0.3000	2.7630	0.4860	5.2788					
	0.4000	2.1857	0.6603	3.9675					
	0.5000	1.8530	0.8383	3.1595					
	0.6000	1.6475	1.0174	2.6026					
	0.7000	1.5210	1.1927	2.1901					
	0.8000	1.4511	1.3557	1.8711					
	0.9000	1.4258	1.4935	1.6219					
	1.0000	1.4328	1.5937	1.4328					
4	∞	1.5107	1.7682	1.4550	0.6725				
	10.0000	0.0704	14.8873	0.1802	15.2297				
	5.0000	0.1475	7.6072	0.3670	7.6142				
	3.3333	0.2329	5.1777	0.5602	5.0301				
	2.5000	0.3288	3.9606	0.7599	3.6977				
	2.0000	0.4398	3.2268	0.9672	2.8563				
	1.6667	0.5764	2.7304	1.1851	2.2425				
	1.4286	0.7789	2.3480	1.4292	1.7001				
	1.3554	0.9924	2.1476	1.5845	1.3451				
5	∞	1.5613	1.8049	1.7659	1.4173	0.6507			
	0.1000	6.7870	0.1447	17.9569	0.1820	15.7447			
	0.2000	3.5457	0.2950	9.1272	0.3659	7.8890			
	0.3000	2.4765	0.4509	6.1861	0.5503	5.2373			
	0.4000	1.9538	0.6119	4.7193	0.7333	3.8861			
	0.5000	1.6535	0.7777	3.8446	0.9126	3.0548			
	0.6000	1.4694	0.9469	3.2688	1.0846	2.4835			
	0.7000	1.3580	1.1170	2.8679	1.2437	2.0621			
	0.8000	1.2998	1.2824	2.5819	1.3815	1.7384			
	0.9000	1.2845	1.4329	2.3794	1.4878	1.4883			
	1.0000	1.3013	1.5559	2.2411	1.5559	1.3013			
6	∞	1.5339	1.8838	1.8306	1.7485	1.3937	0.6383		
	10.0000	0.0666	14.2200	0.1777	18.4267	0.1901	15.3495		
	5.0000	0.1393	7.2500	0.3613	9.2605	0.3835	7.6184		
	3.3333	0.2195	4.9266	0.5514	6.1947	0.5795	4.9962		
	2.5000	0.3095	3.7652	0.7492	4.6513	0.7781	3.6453		
	2.0000	0.4137	3.0679	0.9575	3.7118	0.9794	2.7936		
	1.6667	0.5422	2.6003	1.1830	3.0641	1.1850	2.1739		
	1.4286	0.7347	2.2492	1.4537	2.5437	1.4051	1.6293		
	1.3554	0.9419	2.0797	1.6581	2.2473	1.5344	1.2767		
7	∞	1.5748	1.8577	1.9210	1.8270	1.7340	1.3786	0.6307	
	0.1000	6.5695	0.1405	17.6031	0.1838	19.3760	0.1862	15.8127	
	0.2000	3.4278	0.2862	8.9371	0.3692	9.7697	0.3723	7.8901	
	0.3000	2.3917	0.4369	6.0535	0.5557	6.5685	0.5569	5.2167	
	0.4000	1.8853	0.5926	4.6179	0.7423	4.9702	0.7384	3.8552	
	0.5000	1.5948	0.7529	3.7642	0.9276	4.0150	0.9142	3.0182	
	0.6000	1.4170	0.9169	3.2052	1.1092	3.3841	1.0807	2.4437	
	0.7000	1.3100	1.0826	2.8192	1.2833	2.9422	1.2326	2.0207	
	0.8000	1.2550	1.2449	2.5481	1.4430	2.6242	1.3619	1.6967	
	0.9000	1.2422	1.3946	2.3613	1.5784	2.3966	1.4593	1.4472	
	1.0000	1.2615	1.5196	2.2392	1.6804	2.2392	1.5196	1.2615	
8	∞	1.5422	1.9106	1.9008	1.9252	1.8200	1.7231	1.3683	0.6258
	10.0000	0.0652	13.9469	0.1749	18.3007	0.1942	19.0437	0.1922	15.3880
	5.0000	0.1364	7.1050	0.3554	9.1917	0.3917	9.5260	0.3863	7.6164
	3.3333	0.2147	4.8250	0.5421	6.1483	0.5930	6.3423	0.5820	4.9811
	2.5000	0.3025	3.6860	0.7364	4.6191	0.7990	4.7388	0.7787	3.6241
	2.0000	0.4042	3.0029	0.9415	3.6917	1.0118	3.7619	0.9767	2.7690
	1.6667	0.5298	2.5460	1.1643	3.0568	1.2367	3.0869	1.1769	2.1477
	1.4286	0.7186	2.2054	1.4350	2.5554	1.4974	2.5422	1.3882	1.6029
	1.3554	0.9234	2.0454	1.6453	2.2826	1.6841	2.2300	1.5092	1.2515
n	$1/(R_1)$	L_1	C_2	L_3	C_4	L_5	C_6	L_7	C_8

Tabelle 7.32: Normierte Elementwerte für Tschebyscheff-I-TP-Filter mit $A_{\max} = 0.1$ dB (frequenznormiert auf die 3.01 dB-Grenzfrequenz bei $\Omega = 1$)

n	R_1	C_1	L_2	C_3	L_4	C_5	L_6	C_7	L_8	C_9	L_{10}
2	∞	1.3067	0.9748								
	10.0000	0.1052	13.3222								
	5.0000	0.2282	6.6994								
	3.3333	0.3754	4.4110								
	2.5000	0.5635	3.1648								
	2.0000	0.9086	2.1029								
	1.9841	0.9827	1.9497								
3	∞	1.5720	1.5179	0.9318							
	0.1000	9.8899	0.1534	16.1177							
	0.2000	5.2543	0.3087	8.2251							
	0.3000	3.7292	0.4633	5.5762							
	0.4000	2.9854	0.6146	4.2416							
	0.5000	2.5571	0.7592	3.4360							
	0.6000	2.2889	0.8937	2.8984							
	0.7000	2.1135	1.0149	2.5172							
	0.8000	1.9965	1.1203	2.2368							
	0.9000	1.9175	1.2086	2.0255							
	1.0000	1.8636	1.2804	1.8636							
4	∞	1.4361	1.8888	1.5211	0.9129						
	10.0000	0.0975	15.3521	0.1940	14.2616						
	5.0000	0.2100	7.7076	0.3996	6.9874						
	3.3333	0.3440	5.1196	0.6208	4.4790						
	2.5000	0.5162	3.7660	0.8693	3.1206						
	2.0000	0.8452	2.7197	1.2383	1.9848						
	1.9841	0.9202	2.5864	1.3036	1.8258						
5	∞	1.6299	1.7400	1.9217	1.5138	0.9034					
	0.1000	9.5560	0.1525	19.6465	0.1731	16.5474					
	0.2000	5.0639	0.3060	10.0537	0.3430	8.3674					
	0.3000	3.5877	0.4590	6.8714	0.5075	5.6245					
	0.4000	2.8692	0.6091	5.2960	0.6640	4.2447					
	0.5000	2.4571	0.7537	4.3672	0.8098	3.4137					
	0.6000	2.2006	0.8901	3.7651	0.9420	2.8609					
	0.7000	2.0347	1.0150	3.3525	1.0582	2.4704					
	0.8000	1.9257	1.1261	3.0599	1.1569	2.1845					
	0.9000	1.8540	1.2220	2.8478	1.2379	1.9701					
	1.0000	1.8069	1.3025	2.6914	1.3025	1.8069					
6	∞	1.4618	1.9799	1.7803	1.9253	1.5077	0.8981				
	10.0000	0.0958	15.1862	0.1974	17.6807	0.2017	14.4328				
	5.0000	0.2059	7.6144	0.4064	8.7318	0.4121	7.0310				
	3.3333	0.3370	5.0553	0.6323	5.6993	0.6348	4.4809				
	2.5000	0.5056	3.7219	0.8900	4.1092	0.8808	3.1025				
	2.0000	0.8304	2.7041	1.2913	2.8720	1.2372	1.9556				
	1.9841	0.9053	2.5774	1.3676	2.7133	1.2991	1.7962				
7	∞	1.6464	1.7772	2.0306	1.7892	1.9239	1.5034	0.8948			
	0.1000	9.4555	0.1513	19.6486	0.1778	20.6314	0.1761	16.6655			
	0.2000	5.0070	0.3034	10.0491	0.3524	10.4959	0.3478	8.4041			
	0.3000	3.5456	0.4548	6.8674	0.5221	7.1341	0.5129	5.6350			
	0.4000	2.8348	0.6035	5.2947	0.6846	5.4698	0.6690	4.2428			
	0.5000	2.4275	0.7470	4.3695	0.8377	4.4886	0.8137	3.4050			
	0.6000	2.1744	0.8824	3.7717	0.9786	3.8524	0.9441	2.8481			
	0.7000	2.0112	1.0070	3.3638	1.1050	3.4163	1.0582	2.4554			
	0.8000	1.9045	1.1182	3.0761	1.2149	3.1071	1.1546	2.1681			
	0.9000	1.8348	1.2146	2.8691	1.3080	2.8829	1.2335	1.9531			
	1.0000	1.7896	1.2961	2.7177	1.3848	2.7177	1.2961	1.7896			
8	∞	1.4710	2.0022	1.8248	2.0440	1.7911	1.9218	1.5003	0.8926		
	10.0000	0.0951	15.1014	0.1969	17.7748	0.2081	18.0544	0.2035	14.4924		
	5.0000	0.2044	7.5682	0.4052	8.7770	0.4257	8.8832	0.4146	7.0453		
	3.3333	0.3344	5.0234	0.6304	5.7322	0.6577	5.7760	0.6370	4.4806		
	2.5000	0.5017	3.6988	0.8878	4.1404	0.9184	4.1470	0.8814	3.0954		
	2.0000	0.8249	2.6915	1.2919	2.9133	1.3160	2.8799	1.2331	1.9448		
	1.9841	0.8998	2.5670	1.3697	2.7585	1.3903	2.7175	1.2938	1.7852		
9	∞	1.6533	1.7890	2.0570	1.8383	2.0481	1.7910	1.9199	1.4981	0.8911	
	0.1000	9.4131	0.1507	19.5995	0.1779	20.8006	0.1822	20.8588	0.1770	16.7140	
	0.2000	4.9830	0.3021	10.0212	0.3526	10.5818	0.3600	10.5925	0.3491	8.4189	
	0.3000	3.5279	0.4528	6.8474	0.5223	7.1951	0.5318	7.1876	0.5142	5.6390	
	0.4000	2.8203	0.6008	5.2792	0.6850	5.5207	0.6957	5.5023	0.6700	4.2416	
	0.5000	2.4150	0.7436	4.3573	0.8385	4.5355	0.8493	4.5087	0.8140	3.4010	
	0.6000	2.1634	0.8786	3.7621	0.9801	3.8985	0.9900	3.8647	0.9436	2.8426	
	0.7000	2.0013	1.0028	3.3565	1.1075	3.4635	1.1157	3.4232	1.0568	2.4489	
	0.8000	1.8955	1.1139	3.0709	1.2189	3.1565	1.2246	3.1102	1.1523	2.1611	
	0.9000	1.8267	1.2103	2.8658	1.3135	2.9353	1.3165	2.8834	1.2302	1.9458	
	1.0000	1.7822	1.2921	2.7162	1.3922	2.7734	1.3922	2.7162	1.2921	1.7822	
10	∞	1.4753	2.0107	1.8386	2.0733	1.8432	2.0494	1.7904	1.9183	1.4965	0.8900
	10.0000	0.0948	15.0578	0.1965	17.7624	0.2086	18.2313	0.2107	18.1645	0.2041	14.5199
	5.0000	0.2037	7.5446	0.4042	8.7694	0.4266	8.9726	0.4300	8.9248	0.4154	7.0518
	3.3333	0.3332	5.0070	0.6289	5.7273	0.6594	5.8398	0.6631	5.7947	0.6376	4.4803
	2.5000	0.4999	3.6869	0.8857	4.1383	0.9216	4.2020	0.9238	4.1540	0.8812	3.0919
	2.0000	0.8224	2.6845	1.2901	2.9166	1.3246	2.9390	1.3191	2.8782	1.2306	1.9397
	1.9841	0.8972	2.5610	1.3683	2.7632	1.4009	2.7795	1.3927	2.7148	1.2908	1.7801
n	$1/(R_1)$	L_1	C_2	L_3	C_4	L_5	C_6	L_7	C_8	L_9	C_{10}

Tabelle 7.33: Normierte Elementwerte für Tschebyscheff-I-TP-Filter mit $A_{\max} = 0.5$ dB (frequenznormiert auf die 3.01 dB-Grenzfrequenz bei $\Omega = 1$)

7.C.2 Tabellen für Cauer-Filter

Anordnungen für Filter der 3. Ordnung

In der Pol- & Nullstellendarstellung für Cauer-Filter der 3. Ordnung sind **beide Nullstellen immer** auf der $j\Omega$-Achse (bei $\pm j\Omega_2$) und die Pole sind **immer** in der linken S-Halbebene. **Ein** Pol ist auf der negativen σ'-Achse und ein Polpaar ist konjugiert-komplex. Die normierte UTF ist somit[11]: $H(S) = K \cdot \frac{(S-j\Omega_2)(S+j\Omega_2)}{(S+\sigma_0)(S+\sigma_1+j\Omega_1)(S+\sigma_1-j\Omega_1)}$. Die folgenden beiden Abbildungen sind gültig für die Tabellen 7.34 bis 7.35.

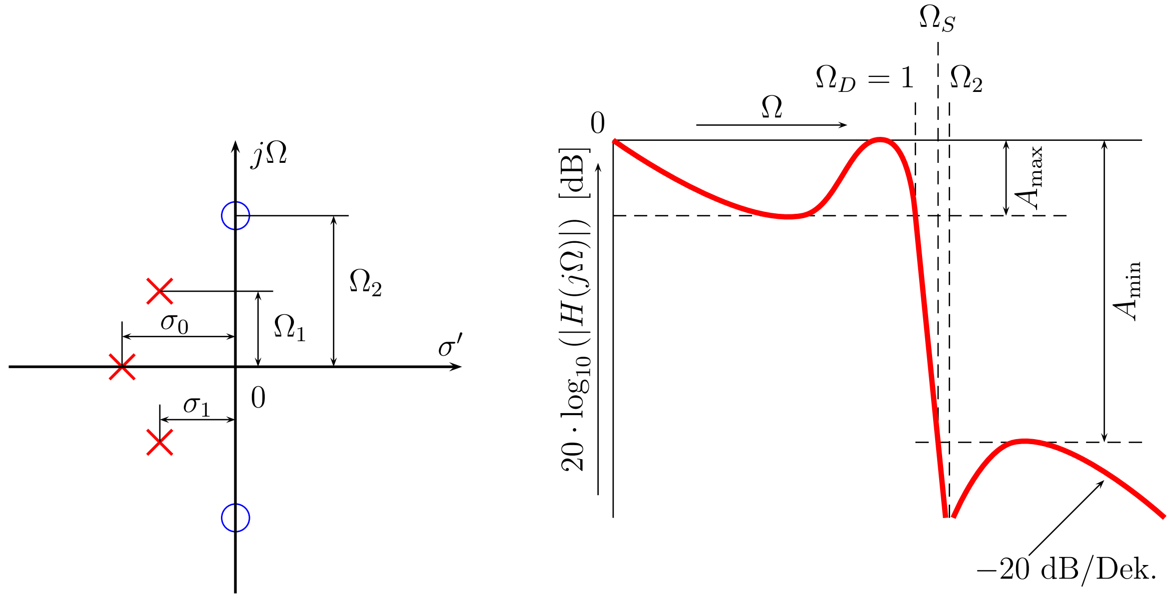


Abbildung 7.114: Links: Pol- & Nullstellenverteilung; Rechts: Amplitudengang. Es gilt immer: $\Omega_2 > \Omega_S > \Omega_D$.

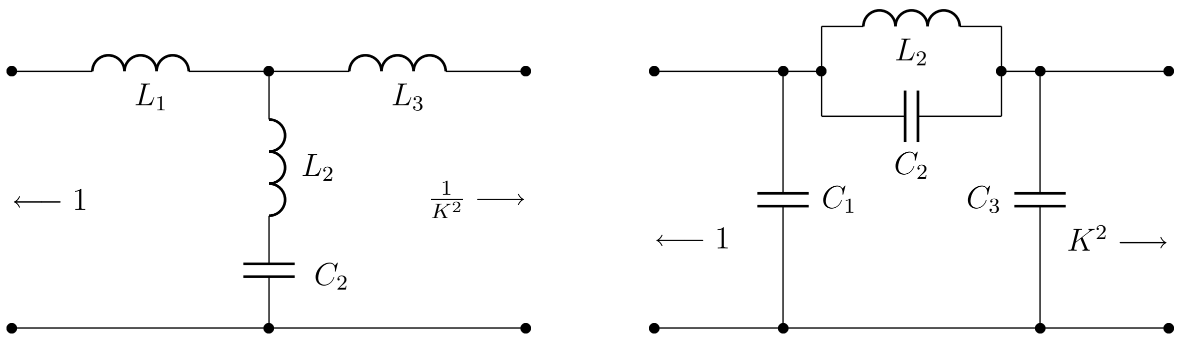


Abbildung 7.115: Links: Minimal-C Filter; Rechts: Minimal-L Filter. Diese beiden Anordnungen gelten für die Tabellen 7.34 bis 7.35.

[11] K ist nicht in den Tabellen 7.34 bis 7.35 angegeben. Wie leicht einzusehen ist, gilt: $K = \frac{\sigma_0 \cdot (\sigma_1^2+\Omega_1^2)}{\Omega_2^2}$.

$n = 3$; $\rho = 15\% \equiv A_{\max} = 0.0988$ [dB]

							$K^2 = 1$			$K^2 = \infty$			
θ [Grad]	Ω_S	$A_{\min}$ [dB]	σ_0	σ_1	Ω_1	Ω_2	$C_1 = C_3$	C_2	L_2	C_1	C_2	L_2	C_3
1	57.2987	113.19	0.97227	0.48595	1.20782	66.1616	1.0285	0.0002	1.1468	0.5141	0.0002	1.0843	1.0878
2	28.6537	95.13	0.97271	0.48560	1.20789	33.0839	1.0281	0.0008	1.1461	0.5136	0.0008	1.0834	1.0875
3	19.1073	84.56	0.97343	0.48502	1.20800	22.0595	1.0273	0.0018	1.1449	0.5126	0.0019	1.0819	1.0871
4	14.3356	77.06	0.97444	0.48420	1.20816	16.5483	1.0262	0.0032	1.1433	0.5113	0.0034	1.0798	1.0865
5	11.4737	71.24	0.97574	0.48316	1.20836	13.2424	1.0249	0.0050	1.1411	0.5096	0.0053	1.0771	1.0858
6	9.5668	66.48	0.97734	0.48188	1.20861	11.0392	1.0232	0.0072	1.1386	0.5076	0.0076	1.0738	1.0849
7	8.2055	62.45	0.97923	0.48037	1.20890	9.4661	1.0212	0.0098	1.1355	0.5051	0.0104	1.0699	1.0838
8	7.1853	58.96	0.98143	0.47863	1.20922	8.2868	1.0189	0.0129	1.1320	0.5023	0.0137	1.0654	1.0826
9	6.3925	55.88	0.98393	0.47665	1.20959	7.3700	1.0163	0.0163	1.1280	0.4991	0.0174	1.0603	1.0812
10	5.7588	53.12	0.98674	0.47445	1.20999	6.6370	1.0134	0.0202	1.1235	0.4955	0.0215	1.0546	1.0797
11	5.2408	50.63	0.98986	0.47201	1.21042	6.0377	1.0102	0.0245	1.1186	0.4915	0.0262	1.0483	1.0780
12	4.8097	48.34	0.99330	0.46934	1.21088	5.5386	1.0067	0.0293	1.1132	0.4872	0.0313	1.0414	1.0761
13	4.4454	46.24	0.99706	0.46644	1.21137	5.1166	1.0029	0.0345	1.1073	0.4824	0.0369	1.0339	1.0742
14	4.1336	44.29	1.00116	0.46331	1.21188	4.7552	0.9988	0.0402	1.1010	0.4773	0.0431	1.0258	1.0720
15	3.8637	42.47	1.00559	0.45995	1.21241	4.4423	0.9944	0.0463	1.0941	0.4717	0.0498	1.0171	1.0698
16	3.6280	40.77	1.01038	0.45636	1.21296	4.1688	0.9897	0.0529	1.0869	0.4658	0.0571	1.0078	1.0674
17	3.4203	39.17	1.01551	0.45254	1.21352	3.9277	0.9847	0.0601	1.0791	0.4594	0.0650	0.9979	1.0648
18	3.2361	37.66	1.02102	0.44850	1.21409	3.7137	0.9794	0.0677	1.0709	0.4527	0.0734	0.9875	1.0622
19	3.0716	36.22	1.02690	0.44422	1.21466	3.5224	0.9738	0.0759	1.0623	0.4455	0.0825	0.9764	1.0594
20	2.9238	34.86	1.03317	0.43972	1.21523	3.3505	0.9679	0.0846	1.0531	0.4379	0.0923	0.9648	1.0565
21	2.7904	33.56	1.03984	0.43500	1.21579	3.1951	0.9617	0.0939	1.0436	0.4299	0.1028	0.9526	1.0535
22	2.6695	32.32	1.04692	0.43005	1.21634	3.0541	0.9552	0.1037	1.0335	0.4215	0.1141	0.9398	1.0505
23	2.5593	31.13	1.05443	0.42488	1.21687	2.9256	0.9484	0.1142	1.0230	0.4126	0.1261	0.9264	1.0473
24	2.4586	29.99	1.06238	0.41949	1.21737	2.8079	0.9413	0.1253	1.0121	0.4033	0.1390	0.9124	1.0440
25	2.3662	28.89	1.07079	0.41387	1.21784	2.6999	0.9339	0.1371	1.0006	0.3935	0.1528	0.8979	1.0407
26	2.2812	27.84	1.07967	0.40804	1.21828	2.6003	0.9262	0.1496	0.9888	0.3833	0.1675	0.8829	1.0373
27	2.2027	26.82	1.08905	0.40200	1.21867	2.5083	0.9182	0.1628	0.9765	0.3726	0.1833	0.8672	1.0339
28	2.1301	25.83	1.09894	0.39574	1.21900	2.4231	0.9100	0.1767	0.9637	0.3614	0.2001	0.8510	1.0304
29	2.0627	24.88	1.10937	0.38928	1.21928	2.3438	0.9014	0.1915	0.9505	0.3497	0.2182	0.8343	1.0269
30	2.0000	23.96	1.12036	0.38260	1.21948	2.2701	0.8926	0.2071	0.9369	0.3376	0.2375	0.8171	1.0234
31	1.9416	23.06	1.13194	0.37573	1.21962	2.2012	0.8834	0.2236	0.9228	0.3249	0.2582	0.7993	1.0199
32	1.8871	22.20	1.14412	0.36866	1.21966	2.1368	0.8740	0.2411	0.9083	0.3117	0.2804	0.7810	1.0165
33	1.8361	21.35	1.15695	0.36139	1.21962	2.0765	0.8643	0.2596	0.8934	0.2980	0.3043	0.7623	1.0130
34	1.7883	20.53	1.17044	0.35393	1.21947	2.0199	0.8544	0.2792	0.8780	0.2837	0.3299	0.7430	1.0097
35	1.7434	19.73	1.18464	0.34629	1.21921	1.9666	0.8441	0.2999	0.8623	0.2689	0.3575	0.7233	1.0064
36	1.7013	18.95	1.19957	0.33847	1.21883	1.9165	0.8336	0.3218	0.8461	0.2535	0.3872	0.7031	1.0032
37	1.6616	18.20	1.21528	0.33048	1.21833	1.8692	0.8229	0.3450	0.8296	0.2375	0.4194	0.6825	1.0001
38	1.6243	17.46	1.23180	0.32233	1.21768	1.8245	0.8118	0.3697	0.8126	0.2209	0.4541	0.6615	0.9972
39	1.5890	16.73	1.24918	0.31402	1.21689	1.7823	0.8005	0.3959	0.7953	0.2036	0.4918	0.6401	0.9945
40	1.5557	16.03	1.26745	0.30556	1.21594	1.7423	0.7890	0.4237	0.7776	0.1857	0.5327	0.6184	0.9920
41	1.5243	15.34	1.28668	0.29697	1.21483	1.7044	0.7772	0.4532	0.7595	0.1671	0.5772	0.5964	0.9898
42	1.4945	14.67	1.30691	0.28824	1.21354	1.6684	0.7652	0.4847	0.7411	0.1478	0.6258	0.5740	0.9879
43	1.4663	14.02	1.32819	0.27940	1.21206	1.6343	0.7529	0.5183	0.7224	0.1278	0.6790	0.5514	0.9863
44	1.4396	13.38	1.35059	0.27046	1.21040	1.6018	0.7404	0.5541	0.7033	0.1070	0.7372	0.5286	0.9850
45	1.4142	12.75	1.37416	0.26142	1.20853	1.5710	0.7277	0.5924	0.6840	0.0854	0.8013	0.5057	0.9842
46	1.3902	12.14	1.39898	0.25231	1.20645	1.5415	0.7148	0.6334	0.6643	0.0630	0.8719	0.4826	0.9839
47	1.3673	11.54	1.42511	0.24313	1.20416	1.5135	0.7017	0.6774	0.6444	0.0398	0.9501	0.4595	0.9841
48	1.3456	10.96	1.45262	0.23390	1.20164	1.4868	0.6884	0.7246	0.6243	0.0156	1.0367	0.4364	0.9849
49	1.3250	10.40	1.48160	0.22464	1.19890	1.4613	0.6749	0.7745	0.6039	−0.0094	1.1332	0.4133	0.9864
50	1.3054	9.84	1.51212	0.21536	1.19593	1.4369	0.6613	0.8301	0.5834	−0.0355	1.2409	0.3903	0.9885
θ [Grad]	Ω_S	$A_{\min}$ [dB]	σ_0	σ_1	Ω_1	Ω_2	$L_1 = L_3$	L_2	C_2	L_1	L_2	C_2	L_3

Tabelle 7.34: Normierte Elementwerte für Cauer-Filter 3. Ordnung für $\rho = 15\% \equiv 0.0988$ dB (frequenznormiert auf die Rippelgrenzfrequenz $\Omega_D = 1$) (Werte gemäss [71])

$n = 3$; $\rho = 20\% \equiv A_{\max} = 0.1773$ [dB]

							$K^2 = 1$			$K^2 = \infty$			
θ [Grad]	Ω_S	$A_{\min}$ [dB]	σ_0	σ_1	Ω_1	Ω_2	$C_1 = C_3$	C_2	L_2	C_1	C_2	L_2	C_3
1	57.2987	115.77	0.84082	0.42027	1.13143	66.1616	1.1893	0.0002	1.1540	0.5946	0.0002	1.1713	1.1717
2	28.6537	97.70	0.84114	0.42001	1.13150	33.0839	1.1889	0.0008	1.1533	0.5940	0.0008	1.1704	1.1715
3	19.1073	87.13	0.84169	0.41958	1.13160	22.0595	1.1881	0.0018	1.1522	0.5932	0.0018	1.1690	1.1710
4	14.3356	79.63	0.84246	0.41899	1.13175	16.5483	1.1870	0.0032	1.1507	0.5920	0.0031	1.1670	1.1704
5	11.4737	73.81	0.84345	0.41822	1.13194	13.2424	1.1856	0.0050	1.1488	0.5904	0.0049	1.1645	1.1696
6	9.5668	69.05	0.84466	0.41728	1.13218	11.0392	1.1839	0.0072	1.1464	0.5885	0.0071	1.1614	1.1686
7	8.2055	65.03	0.84609	0.41617	1.13245	9.4661	1.1819	0.0098	1.1436	0.5862	0.0096	1.1577	1.1675
8	7.1853	61.54	0.84776	0.41489	1.13276	8.2868	1.1796	0.0128	1.1404	0.5836	0.0126	1.1535	1.1662
9	6.3925	58.46	0.84965	0.41344	1.13331	7.3700	1.1770	0.0162	1.1387	0.5807	0.0160	1.1487	1.1647
10	5.7588	55.70	0.85177	0.41182	1.13350	6.6370	1.1740	0.0200	1.1326	0.5773	0.0199	1.1434	1.1630
11	5.2408	53.20	0.85413	0.41003	1.13392	6.0377	1.1708	0.0243	1.1281	0.5737	0.0241	1.1374	1.1611
12	4.8097	50.92	0.85673	0.40807	1.13438	5.5386	1.1672	0.0290	1.1231	0.5696	0.0288	1.1310	1.1591
13	4.4454	48.82	0.85957	0.40593	1.13486	5.1166	1.1634	0.0342	1.1177	0.5653	0.0340	1.1239	1.1570
14	4.1336	46.87	0.86266	0.40363	1.13538	4.7552	1.1592	0.0398	1.1119	0.5605	0.0396	1.1163	1.1546
15	3.8637	45.05	0.86600	0.40115	1.13592	4.4423	1.1547	0.0458	1.1057	0.5554	0.0457	1.1082	1.1521
16	3.6280	43.35	0.86959	0.39851	1.13649	4.1688	1.1500	0.0524	1.0990	0.5500	0.0523	1.0994	1.1495
17	3.4203	41.75	0.87345	0.39569	1.13709	3.9277	1.1449	0.0594	1.0919	0.5441	0.0595	1.0902	1.1467
18	3.2361	40.23	0.87759	0.39270	1.13770	3.7137	1.1395	0.0669	1.0844	0.5379	0.0671	1.0803	1.1437
19	3.0716	38.80	0.88199	0.38954	1.13833	3.5224	1.1338	0.0749	1.0764	0.5314	0.0753	1.0700	1.1407
20	2.9238	37.44	0.88668	0.38621	1.13897	3.3505	1.1278	0.0834	1.0681	0.5244	0.0841	1.0590	1.1374
21	2.7904	36.14	0.89167	0.38272	1.13963	3.1951	1.1215	0.0925	1.0593	0.5171	0.0935	1.0475	1.1340
22	2.6695	34.90	0.89695	0.37905	1.14029	3.0541	1.1149	0.1021	1.0500	0.5095	0.1035	1.0355	1.1305
23	2.5593	33.71	0.90254	0.37521	1.14096	2.9256	1.1080	0.1123	1.0404	0.5013	0.1142	1.0229	1.1269
24	2.4586	32.57	0.90845	0.37120	1.14162	2.8079	1.1008	0.1231	1.0303	0.4928	0.1256	1.0098	1.1232
25	2.3662	31.47	0.91469	0.36702	1.14228	2.6999	1.0933	0.1345	1.0199	0.4839	0.1377	0.9961	1.1193
26	2.2812	30.41	0.92127	0.36268	1.14294	2.6003	1.0855	0.1466	1.0090	0.4746	0.1506	0.9819	1.1153
27	2.2027	29.39	0.92820	0.35817	1.14358	2.5083	1.0773	0.1593	0.9976	0.4649	0.1643	0.9672	1.1113
28	2.1301	28.41	0.93550	0.35349	1.14420	2.4231	1.0689	0.1728	0.9859	0.4548	0.1789	0.9519	1.1071
29	2.0627	27.45	0.94318	0.34864	1.14480	2.3438	1.0602	0.1869	0.9738	0.4443	0.1944	0.9362	1.1029
30	2.0000	26.53	0.95125	0.34364	1.14538	2.2701	1.0512	0.2019	0.9612	0.4333	0.2110	0.9199	1.0985
31	1.9416	25.63	0.95973	0.33847	1.14592	2.2012	1.0420	0.2176	0.9483	0.4219	0.2285	0.9030	1.0942
32	1.8871	24.76	0.96863	0.33313	1.14643	2.1368	1.0324	0.2343	0.9349	0.4101	0.2473	0.8857	1.0897
33	1.8361	23.92	0.97799	0.32764	1.14689	2.0765	1.0225	0.2518	0.9212	0.3978	0.2672	0.8679	1.0853
34	1.7883	23.90	0.98780	0.32199	1.14730	2.0199	1.0123	0.2792	0.9070	0.3851	0.2885	0.8496	1.0808
35	1.7434	22.29	0.99810	0.31619	1.14766	1.9666	1.0019	0.2897	0.8925	0.3719	0.3112	0.8308	1.0762
36	1.7013	21.51	1.00890	0.31023	1.14796	1.9165	0.9912	0.3103	0.8776	0.3582	0.3355	0.8116	1.0717
37	1.6616	20.74	1.02024	0.30412	1.14819	1.8692	0.9802	0.3320	0.8623	0.3441	0.3614	0.7919	1.0672
38	1.6243	20.00	1.03213	0.29786	1.14835	1.8245	0.9689	0.3549	0.8466	0.3294	0.3892	0.7718	1.0627
39	1.5890	19.27	1.04460	0.29147	1.14842	1.7823	0.9573	0.3791	0.8305	0.3142	0.4191	0.7512	1.0583
40	1.5557	18.56	1.05768	0.28493	1.14841	1.7423	0.9455	0.4047	0.8141	0.2985	0.4511	0.7303	1.0540
41	1.5243	17.86	1.07140	0.27825	1.14830	1.7044	0.9334	0.4318	0.7973	0.2823	0.4856	0.7089	1.0497
42	1.4945	17.18	1.08579	0.27145	1.14810	1.6684	0.9210	0.4605	0.7801	0.2655	0.5228	0.6872	1.0456
43	1.4663	16.52	1.10089	0.26452	1.14778	1.6343	0.9084	0.4909	0.7627	0.2481	0.5629	0.6651	1.0416
44	1.4396	15.86	1.11673	0.25747	1.14735	1.6018	0.8955	0.5232	0.7448	0.2301	0.6064	0.6427	1.0378
45	1.4142	15.22	1.13336	0.25031	1.14679	1.5710	0.8823	0.5576	0.7267	0.2115	0.6535	0.6200	1.0341
46	1.3902	14.60	1.15082	0.24304	1.14611	1.5415	0.8689	0.5942	0.7082	0.1923	0.7048	0.5971	1.0307
47	1.3673	13.98	1.16915	0.23567	1.14528	1.5135	0.8553	0.6331	0.6895	0.1725	0.7607	0.4739	1.0276
48	1.3456	13.38	1.18840	0.22821	1.14432	1.4868	0.8415	0.6747	0.6705	0.1519	0.8217	0.5505	1.0248
49	1.3250	12.79	1.20862	0.22067	1.14320	1.4613	0.8274	0.7192	0.6511	0.1307	0.8886	0.5270	1.0223
50	1.3054	12.22	1.22988	0.21306	1.14192	1.4369	0.8131	0.7668	0.6316	0.1087	0.9621	0.5034	1.0202
51	1.2868	11.65	1.25221	0.20539	1.14048	1.4137	0.7986	0.8179	0.6118	0.0860	1.0431	0.4797	1.0185
52	1.2690	11.10	1.27570	0.19766	1.13887	1.3914	0.7839	0.8728	0.5918	0.0625	1.1327	0.4560	1.0173
53	1.2521	10.56	1.30040	0.18990	1.13709	1.3702	0.7690	0.9319	0.5716	0.0382	1.2320	0.4323	1.0166
54	1.2361	10.03	1.32639	0.18211	1.13521	1.3498	0.7539	0.9958	0.5512	0.0130	1.3426	0.4088	1.0165
55	1.2208	9.51	1.35374	0.17431	1.13297	1.3303	0.7387	1.0648	0.5306	−0.0131	1.4662	0.3854	1.0171
θ [Grad]	Ω_S	$A_{\min}$ [dB]	σ_0	σ_1	Ω_1	Ω_2	$L_1 = L_3$	L_2	C_2	L_1	L_2	C_2	L_3

Tabelle 7.35: Normierte Elementwerte für Cauer-Filter 3. Ordnung für $\rho = 20\% \equiv 0.1773$ dB (frequenznormiert auf die Rippelgrenzfrequenz $\Omega_D = 1$) (Werte gemäss [71])