Formelblatt — Wahrscheinlichkeit und Statistik

Kombinatorik

Produktregel k Positionen müssen unabhängig von einadner markiert werden, wobai n_i verschiedene Markierungen zur Verfügung stehen.	$n_1 n_2 \cdots n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$
Permutation Auf wie viele Arten lassen sich n verschiedene Objekte anordnen?	$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$
Kombination Auf wie vielen Arten kann man k aus n verschiedenen Objekte auswählen?	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Variation Auf wie viele Arten kann man k mal unter n verschiedenen Objekten auswählen?	$V_{n,k} = n^k$

Wahrscheinlichkeit

Ereignis	$\Omega =$ (sicheres Ereignis) $\emptyset =$ (unmögliches Ereignis) $A, B \subseteq \Omega$ $A \cap B = (A$ und $B)$ $A \cup B = (A$ oder $B)$ $\bar{A} = \Omega \setminus A =$ (nicht A)
Wahrscheinlichkeit	$\mathrm{P} : \Omega \to [0;1]$ $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ $\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$ A und B unabhängig $\iff \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$
Bedingte Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit von A wenn B bereits eingetreten ist	$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \overset{\text{unabh.}}{=} \mathrm{P}(A)$ $\mathrm{P}(\bar{A} \mid B) = 1 - \mathrm{P}(A \mid B)$
Totale Wahrscheinlichkeit	$\mathrm{P}(A) = \sum_i \mathrm{P}(A \mid B_i)$ $A \subset \bigcup_i B_i$
Satz von Bayes	$\mathrm{P}(A \mid B) \cdot \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B)$
Experimente In einem Laplace Experiment haben alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit. In einem Bernoulli Experiment es gibt nur 2 Ereignisse A und $\bar{A}$ mit Wahrscheinlichkeiten p und $1-p$.	
Zufallsvariable	$X : \Omega \to U \subseteq \mathbb{R}$ Ereignisse $\subset \Omega$ wie $\{X = k\}, \{X \leq x\}, \{X > x\}$
Erwartungswert	$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in U} x \cdot \mathrm{P}(X = x)$ $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ $\mathrm{E}(\lambda X) = \lambda \mathrm{E}(X)$ $\mathrm{E}(XY) \overset{\text{unabh.}}{=} \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$
Varianz Mass für Streuung der Werte	$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$ $\mathrm{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \mathrm{Var}(X)$ $\mathrm{Var}(X + Y) \overset{\text{unabh.}}{=} \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$
Covarianz	$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \overset{\text{unabh.}}{=} 0$
Satz von Tschebyscheff	

W'keitsverteilung

Verteilungsfunktion	ZV ist verteilt $X \sim \mathcal{V}$ mit $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ monoton steigend $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) \qquad F(x \to \infty) = 1 \qquad F(x \to -\infty) = 0$
Median	$\operatorname{med} X = \inf\{x : F(x) = 0.5\}$
Dichtefunktion	$\varphi(x) = \frac{dF}{dx} \qquad \mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi \, dx \qquad 1 = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, dx$
Erwartungswert	$\mathrm{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\varphi(x) \, dx \qquad \mathrm{E}(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \varphi(x) \, dx$
Variablentransformation	$Y = g(X) \qquad \varphi_Y = \frac{\varphi_X}{g'} \circ g^{-1}$
Standardisierung	$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \qquad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Rechenregeln	

Katalog von W'keitsverteilungen

Name	$X \sim$	$\varphi(x)$ oder $\mathrm{P}(X = k)$	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
Gleichverteilung Laplace Experimente	$\mathcal{U}(a,b)$	$\frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}} = \log(2)/a$	$\mathcal{E}(a)$	$ae^{-ax} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$
Normalverteilung Viele unabh. ZV	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$	μ	σ^2
Potenzverteilung Pareto Verteilung	$\mathrm{Pow}(x_{\mathrm{m}}, \alpha)$		$x_{\mathrm{m}} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}$	
Chi–Quadrat V. Für das χ^2 Test	$\mathcal{X}^2(k)$			
Geometrische V.	$\mathcal{G}(p)$	$p(1-p)^k$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hypergeometrische V.	$\mathcal{H}(N,R,n)$	$\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}/\binom{N}{n}$	$\frac{nR}{N}$	$\frac{nR}{N}\left(1 - \frac{R}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$
Poissonverteilung Seltener Ereignisse	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
Binomialverteilung Bernoulli Experimente	$\mathcal{B}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

Für grosse n wird $\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{N}\left(\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}\right)$ und für kleine p (selten) ist $\approx \mathcal{P}(\lambda = np)$.

Schätzen

Regression Lineares Modell	ZV X, Y $\quad y \approx ax + b \quad a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)} \quad b = \mathrm{E}(Y) - a\mathrm{E}(X)$	
Regressionskoeffizient	$r = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \quad r^2 \approx 1 \implies$ gute Approx.	

Hypotesentesten